Ernst Zwinggi

Ein Beitrag zur Deckungskapitalberechnung

Aktuárské vědy, Vol. 4 (1933), No. 1, 1–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144590

Ein Beitrag zur Deckungskapitalberechnung.

Von Dr. *Ernst Zwinggi*, Basel.

Der Durchführung einer vollständigen, exakten Deckungskapitalberechnung muss öfters die Lösung der folgenden speziellen Aufgabe vorangehen: ein Versicherter, der aus einer bestimmten, genau zu beschreibenden Ursache aus der Versicherung ausscheidet, hat ganz oder teilweise Anrecht auf das vorhandene Deckungskapital; zu berechnen ist das Deckungskapital für einen Versicherten, wenn diese auszufolgenden Rücklagen schon zum vornherein in die Berechnung einbezogen werden. Notwendige Voraussetzung ist dabei natürlich, dass sich die Austritte, bei denen die Reserve ausgefolgt wird, auch zahlenmässig erfassen lassen. Wir möchten das Gesagte gleich an einigen Beispielen verdeutlichen und damit zeigen, dass der Aufgabe auch eine praktische Bedeutung zukommt.

a) In der Lebensversicherung werde bei vorzeitiger Vertragslösung (Storno) das Deckungskapital netto zurückvergütet. Der Fall, wo nur ein Teil davon zur Auszahlung gelangt, ergibt sich als sinngemässe Ausdehnung der nachfolgenden Formeln.

b) Eine Pensionskasse mit Durchschnittsbeiträgen vergüte männlichen Versicherten, die unverheiratet im aktiven Zustande und ohne pensionsberechtigte Kinder zu hinterlassen sterben, das angesammelte retrospektive Deckungskapital. Diese Bestimmung kann als eine Milderung des Prinzipes gleicher Beiträge für alle Versicherten gelten, da die soziale Gleichstellung aller Mitglieder oft bedeutende Härten mit sich bringt.

c) Erfolgt der Tod eines Unfallversicherten aus andern Ursachen als durch Unfall, so zahle die Anstalt das vorhandene Deckungskapital zurück.

Das erste der angeführten Beispiele, die Frage des Stornos in der Lebensversicherung, ist in der Literatur bereits ausführlich behandelt worden,[1]) dagegen haben die aufgezählten Probleme aus der sozialen

[1]) Vergl. die Abhandlung von Loewy: „Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik" (Heidelberg 1917) und vom Verfasser: „Reserve und Integralgleichung in der Versicherungsmathematik" (Blätter für Versicherungs-Mathematik, 9. Heft, 1933.

Versicherung unseres Wissens bis heute noch keine Darstellung erfahren. Wir möchten hier den Versuch unternehmen, die Lösung der Aufgabe in allgemeinster Form zu geben, so dass die zu erstellenden Gleichungen die angegebenen konkreten Beispiele als Spezialfälle insichschliessen. Die am Schlusse unserer Darstellung durchgeführten praktischen Anwendungen zeigen dann wirklich die Allgemeingültigkeit der abgeleiteten Beziehungen.

Zuerst ist notwendig, eine Versicherungskasse ganz allgemein zu konstruieren[2]) und darin die Vorgänge des Ausscheidens und Übertretens mathematisch zu fassen. Wir schliessen dazu am besten an die Abfallsordnungen an. In der Lebensversicherung haben wir nur eine einzige Ordnung vor uns; diese Abfallsordnung ist im einfachsten Falle durch die Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten vollständig bestimmt. Die soziale Versicherung dagegen kommt mit einer einzigen Ordnung nicht aus, sie muss vielmehr auf zwei Ordnungen aufbauen. An einem konkreten Beispiel erläutert: in der Krankenversicherung haben wir die Ordnung der „Gesunden" und die Ordnung der „Kranken" zu betrachten; diese Ordnungen sind durch Intensitäten der Erkrankung und der Heilung, sowie die Sterblichkeitsintensitäten der Gesunden und Kranken voll gegeben. — Eine schematische Versicherungskasse, die sowohl alle vorkommenden Fälle der individuellen und der sozialen Versicherung umfassen soll, muss sich also auf zwei Ordnungen gründen, denn es ist klar, dass der Übergang zu einer einzigen Ordnung vereinfachend wirkt. — Im folgenden Abschnitt stellen wir die Ordnungen so dar, wie wir sie für unsere Ableitungen brauchen.

Die Ordnungen.

Wir stellen uns zwei fiktive Ordnungen $l^a_{[x]+t}$ und $l^b_{[x]+t}$ vor, die stets der Bedingung

$$l_{[x]+t} = l^a_{[x]+t} + l^b_{[x]+t} \text{ mit } l^b_{[x]} = 0$$

genügen. Diese beiden Gesamtheiten sind aus einer durch keine nachfolgenden Neueintritte vermehrten Anfangsgesamtheit $l_{[x]}$ hervorgegangen. Ist $l^b_{[x]+t} \equiv 0$, so haben wir es mit der gewöhnlichen Abfallsordnung in der Lebensversicherung zu tun; in der Krankenversicherung anderseits bedeutet $l^a_{[x]+t}$ die Ordnung der Gesunden und $l^b_{[x]+t}$ die

[2]) Über das hier behandelte Problem hinaus erhebt sich überhaupt die Frage nach einer einheitlichen Darstellung des Deckungskapitals in der individuellen und in der sozialen Versicherung; Ansätze zu einer derartigen Behandlung finden sich in der Arbeit „Zur Darstellung der Reserve in der Einzel- und in der Sozialversicherung" (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 27. Heft 1932). Die in diesem Absatz entwickelten Gedankengänge decken sich im wesentlichen mit den dort dargelegten.

Ordnung der Kranken. — Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir künftig in allen Bezeichnungen die Klammern [ ] weg.

Auf diese beiden Gesamtheiten wirkt nun eine ganze Anzahl von Ausscheideursachen vermindernd ein, die z. T. ein dauerndes Ausscheiden zur Folge haben (wie Tod, Invalidität); ein anderer Teil bewirkt aber nur ein vorübergehendes Ausscheiden (wie Krankheit, Unfall), das wir stets als ein Übertreten von der Ordnung a zu b und umgekehrt deuten wollen. In der Gruppe der Ursachen, die ein dauerndes Ausscheiden nachsichziehen, kann der Mathematiker von seinem Betrachtungsstandpunkt aus wieder eine Unterteilung vornehmen. Der ersten Untergruppe ordnen wir alle diejenigen Ursachen zu, die immer zu einer richtigen Versicherungsleistung Anlass bieten, wie der Tod zu einer Sterbesumme, die Invalidität zu einer Rente. Die zweite Untergruppe dagegen umfasst bloss diejenigen Ursachen, die zur Auszahlung des Deckungskapitals Veranlassung geben, wie das Storno in der Lebensversicherung.

Wir definieren daher als:

α^1_{x+t} Intensität des dauernden Ausscheidens aus der Gesamtheit a, wobei eine richtige Versicherungsleistung zur Auszahlung kommt.

α^2_{x+t} Intensität des dauernden Ausscheidens aus der Gesamtheit a, wobei aber nur das Deckungskapital vergütet wird.

β^1_{x+t} und β^2_{x+t} die analogen Intensitäten für die Gesamtheit b.

ν^{ab}_{x+t} Intensität des Übertrittes von a zu b.

ν^{ba}_{x+t} Intensität des Übertrittes von b zu a.

Zur genauen Erfassung der Wirklichkeit müssten die Intensitäten β_{x+t} und ν^{ba}_{x+t} auch als Funktion von der Dauer der Zugehörigkeit zur Gesamtheit b angesetzt werden. (So ist die Intensität der Heilung stark von der Dauer der vorangegangenen Krankheit abhängig.) Die Berechnung der Ordnungen kompliziert sich aber infolge der dabei auftretenden Integralgleichungen derart, dass wir auf diese exakteste Darstellung verzichten müssen. Wir bemerken aber, dass die nachfolgend abgeleiteten Formeln auch auf diesen Fall ausgedehnt werden könnten.

Wenn noch

$$\alpha_{x+t} = \alpha^1_{x+t} + \alpha^2_{x+t}, \quad \beta_{x+t} = \beta^1_{x+t} + \beta^2_{x+t},$$

so bestimmen sich die Ordnungen aus dem folgenden System von Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}l^a_{x+t} &= -l^a_{x+t}(\alpha_{x+t} + \nu^{ab}_{x+t})\mathrm{d}t + l^b_{x+t}\cdot\nu^{ba}_{x+t}\cdot\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}l^b_{x+t} &= -l^b_{x+t}(\beta_{x+t} + \nu^{ba}_{x+t})\mathrm{d}t + l^a_{x+t}\cdot\nu^{ab}_{x+t}\cdot\mathrm{d}t. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Lösung dieses Systems stellt einen speziellen Fall der soeben angedeuteten allgemeinen Aufgabe der Berechnung zweier Gesamtheiten aus den Intensitäten dar, die von *Schoenbaum*[3]) unter allgemeinsten Voraussetzungen über die funktionellen Eigenschaften der Intensitäten erstmals in der Abhandlung „Anwendung der Volterraschen Integralgleichungen in der mathematischen Statistik" behandelt wurde. *Du Pasquier*[4]) dagegen hat sich mit dem System selber eingehend auseinandergesetzt. — Wir treten aber hier auf die eigentliche Lösung nicht ein, da sie für unsere Aufgabe nicht Hauptproblem ist, wir setzen vielmehr für die Zukunft die Ordnungen als berechnet voraus. — Wir führen noch ein:

$$\frac{l^a_{x+t}}{l_{x+t}} = w^a_{x+t}, \quad \frac{l^b_{x+t}}{l_{x+t}} = w^b_{x+t}.$$

Durch Kombination der beiden Gleichungen (1) findet man:

$$\begin{aligned} dl_{x+t} &= -(l^a_{x+t} \cdot \alpha_{x+t} + l^b_{x+t} \cdot \beta_{x+t})dt = \\ &= -l_{x+t}(w^a_{x+t} \cdot \alpha_{x+t} + w^b_{x+t} \cdot \beta_{x+t})dt = \\ &= -l_{x+t}(w^a_{x+t} \cdot \alpha^1_{x+t} + w^b_{x+t} \cdot \beta^1_{x+t} + w^a_{x+t} \cdot \alpha^2_{x+t} + w^b_{x+t} \cdot \beta^2_{x+t})dt. \end{aligned}$$

Durch logarithmische Integration und gleichzeitige Zerlegung in zwei Integralexponenten geht hervor:

$$l_{x+t} = l_x \cdot e^{-\int\limits_0^t \left(w^a_{x+s} \cdot \alpha^1_{x+s} + w^b_{x+s} \cdot \beta^1_{x+s}\right)ds - \int\limits_0^t \left(w^a_{x+s} \cdot \alpha^2_{x+s} + w^b_{x+s} \cdot \beta^2_{x+s}\right)ds}$$

In diese Form führen wir rein symbolisch die Schreibweise der Theorie der unabhängigen Ordnungen ein. Wir bezeichnen mit:

$$\begin{aligned} l^{(u)}_{x+t} &= l_x \cdot e^{-\int\limits_0^t \left(w^a_{x+s} \cdot \alpha^1_{x+s} + w^b_{x+s} \cdot \beta^1_{x+s}\right)ds} \\ l^{(v)}_{x+t} &= l_x \cdot e^{-\int\limits_0^t \left(w^a_{x+s} \cdot \alpha^2_{x+s} + w^b_{x+s} \cdot \beta^2_{x+s}\right)ds} \end{aligned} \tag{2}$$

Dann gilt:

$$l_{x+t} = \frac{1}{l_x} l^{(u)}_{x+t} \cdot l^{(v)}_{x+t}. \tag{3}$$

Um den Charakter der neu eingeführten Ordnungen zu erkennen, greifen wir zuerst auf den Fall $l^{(v)}_{x+t} \equiv 0$ zurück. Es ist dann:

$$l^{(u)}_{x+t} = l_x \cdot e^{-\int\limits_0^t \alpha^1_{x+s} ds}, \quad l^{(v)}_{x+t} = l_x \cdot e^{-\int\limits_0^t \alpha^2_{x+s} ds}$$

[3]) Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgänge 7 & 8, 1924 & 1925.

[4]) Du Pasquier: „Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung" (Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicherungsmathematiker, Hefte 7 & 8, 1912 & 1913).

Die beiden letzten Gleichungen stellen uns aber die von *Friedli*[5]) eingeführten unabhängigen Ordnungen dar. Die erste Gleichung stellt die Abfallsordnung dar, wie wenn nur die durch a^1_{x+t} gemessenen Ursachen (die zu einer richtigen Versicherungsleistung Anlass geben) wirken würden, oder auch, wie wenn jeder Versicherte, der aus einer andern Ursache ausscheidet, sofort wieder durch einen gleichartigen ersetzt würde. Im konkreten Falle der Lebensversicherung ist die erste Ordnung identisch mit der Abfallsordnung, wenn kein Storno wirkt. In genau gleicher Weise stellt die zweite Ordnung das Abfallen dar, wie wenn nur Ursachen vorhanden wären, die Veranlassung zur Rückzahlung des Deckungskapitals geben. Jede der Ordnungen kann für sich allein vollständig berechnet werden, ohne dass man die andere zu kennen braucht. — Kehren wir aber zum allgemeinen Fall zurück, so sind die Ordnungen nicht unabhängig voneinander, sie sind vielmehr durch die Wahrscheinlichkeiten w^a_{x+t} und w^b_{x+t} miteinander verknüpft. Wenn die früher eingeführten Ordnungen l^a_{x+t} und l^b_{x+t} berechnet sind, so haben wir auch die Wahrscheinlichkeiten w^a_{x+t} und w^b_{x+t}, und damit können auch die neuen Ordnungen bestimmt werden. — Führt man in (3) an Stelle der Ordnungen fiktive Überlebenswahrscheinlichkeiten ein, also

$$
{}_tp_x = {}_tp_x^{(u)} \cdot {}_tp_x^{(v)},
$$

so haben wir äusserlich eine Beziehung aus der Theorie der echten unabhängigen Ordnungen vor uns; in Anlehnung an diese Begriffe bezeichnen wir ${}_tp_x^{(u)}$ und ${}_tp_x^{(v)}$ als pseudo-unabhängige Wahrscheinlichkeiten. — Die allgemeine Abfallsordnung ist also in zwei pseudo-unabhängige Ordnungen gespalten; die erste gibt symbolisch den Einfluss derjenigen Ursachen auf das Gesamtausscheiden wieder, die eine eigentliche Versicherungsleistung nachsichziehen, während die zweite Ordnung den Einfluss derjenigen Ursachen widerspiegelt, welche nur die Rückzahlung der Reserve bedingen.

Das Deckungskapital.

Nach der Berechnung der Ordnungen treten wir auf die Bestimmung des Deckungskapitals ein. Wir setzen voraus, dass an das endgültige Ausscheiden immer die Versicherungsleistung „1“ gebunden sei, ausgenommen im Falle, wo das Deckungskapital zur Auszahlung kommt. Für die Dauer der Zugehörigkeit zur Gesamtheit b werde eine Rente R_{x+t} gewährt; diese Rente hat in der Kranken- und Unfallversicherung den Charakter eines Taggeldes. Die für die ganze Versicherungskombination zu entrichtende Prämie betrage P_{x+t}.

---

[5]) Friedli: „Intensitätsfunktion und Zivilstand“ (Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 21, 1926).

Die Versicherungsleistung „1", die λ Jahre nach Beginn der Versicherung fällig wurde, stellt zur Zeit t den Wert

$$(1+i)^{t-\lambda} = r^{t-\lambda} = v^{\lambda-t}$$

dar. — Die Beitragszahlungen rühren von der Gesamtheit l^a_{x+t} her. Die im Zeitelement $d\lambda$ entrichteten Prämien weisen im Zeitpunkt t den Wert auf:

$$v^{\lambda-t} \cdot l^a_{x+\lambda} \cdot P_{x+\lambda} \cdot \mathrm{d}\lambda = v^{\lambda-t} \cdot l_{x+\lambda} \cdot u^a_{x+\lambda} \cdot P_{x+\lambda} \cdot \mathrm{d}\lambda.$$

Der Wert der an die Gesamtheiten $l^a_{x+\lambda}$ und $l^b_{x+\lambda}$ zur Auszahlung gelangten Versicherungsleistungen „1" beträgt:

$$v^{\lambda-t} \cdot l^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^1_{x+\lambda} \cdot \mathrm{d}\lambda = v^{\lambda-t} \cdot l_{x+\lambda} \cdot u^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^1_{x+\lambda} \cdot \mathrm{d}\lambda,$$
$$v^{\lambda-t} \cdot l^b_{x+\lambda} \cdot \beta^1_{x+\lambda} \cdot \mathrm{d}\lambda = v^{\lambda-t} \cdot l_{x+\lambda} \cdot w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^1_{x+\lambda} \cdot \mathrm{d}\lambda.$$

Die Rentenzahlung an die Gesamtheit $l^b_{x+\lambda}$ weist den Wert auf:

$$v^{\lambda-t} \cdot l^b_{x+\lambda} \cdot T_{x+\lambda} \cdot \mathrm{d}\lambda = v^{\lambda-t} \cdot l_{x+\lambda} \cdot w^b_{x+\lambda} \cdot T_{x+\lambda} \cdot \mathrm{d}\lambda.$$

Dazu kommen noch die auszufolgenden Deckungskapitalien. Erfolgt das spezielle Ausscheiden im Zeitpunkt λ, so ist ${}_\lambda V_x$ der auszufolgende Betrag. Der Wert der insgesamt zu vergütenden Deckungskapitalien ist:

$$v^{\lambda-t} \cdot l_{x+\lambda} \cdot w^a_{x+\lambda} \cdot {}_\lambda V_x \cdot \mathrm{d}\lambda +$$
$$v^{\lambda-t} \cdot l_{x+\lambda} \cdot w^b_{x+\lambda} \cdot {}_\lambda V_x \cdot \mathrm{d}\lambda.$$

Das retrospektive Deckungskapital ist die Summe aller auf den Zeitpunkt t beverteten Zahlungen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = t$ (unter richtiger Berücksichtigung des Zahlungssinnes), bezogen auf einen vorhandenen Versicherten. Von einer Anfangsreserve wollen wir absehen.

$${}_tV_x = \frac{1}{v^t \cdot l_{x+t}} \int_0^t v^\lambda \cdot l_{x+\lambda}\Big(u^a_{x+\lambda} \cdot P_{x+\lambda} - u^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^1_{x+\lambda} -$$
$$- w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^1_{x+\lambda} - u^b_{x+\lambda} \cdot T_{x+\lambda} - \left(u^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^2_{x+\lambda} + u^b_{x+\lambda} \cdot \beta^2_{x+\lambda}\right) \cdot {}_\lambda V_x\Big)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Die Lösung der Gleichung für das Deckungskapital.

Die zu lösende Beziehung für das Deckungskapital stellt eine Volterrasche Integralgleichung II. Art dar. Ihre allgemeine Form ist:

$${}_tV_x = \mathrm{f}(t) + \varepsilon \int_0^t \mathrm{K}(t, \lambda) \cdot {}_\lambda V_x \cdot \mathrm{d}\lambda. \qquad \varepsilon = -1$$

Es ist:

$$\mathrm{f}(t) = \frac{1}{v^t \cdot l_{x+t}} \int_0^t v^\lambda \cdot l_{x+\lambda}\Big(w^a_{x+\lambda} \cdot P_{x+\lambda} - w^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^1_{x+\lambda} -$$
$$- u^b_{x+\lambda} \cdot \beta^1_{x+\lambda} - u^b_{x+\lambda} \cdot T_{x+\lambda}\Big)\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{v^t \cdot l_{x+t}} \int_0^t \mathrm{H}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. \qquad (4)$$

Der Kern $K(t, \lambda)$ selber ist:

$$K(t, \lambda) = \frac{v^\lambda \cdot l_{x+\lambda}(w^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^2_{x+\lambda} + w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^2_{x+\lambda})}{v^t \cdot l_{x+t}}$$

Der lösende Kern $\Gamma(t, \lambda; \varepsilon)$ muss nach der Theorie der Integralgleichungen der Bedingung

$$\Gamma(t, \lambda; \varepsilon) - K(t, \lambda) = -\int_\lambda^t K(t, \tau)\Gamma(\tau, \lambda; \varepsilon)\, d\tau \tag{5}$$

genügen. Als lösenden Kern[6]) setzen wir an:

$$\Gamma(t, \lambda; \varepsilon) = \frac{v^\lambda \cdot {}_\lambda p_x(w^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^2_{x+\lambda} + w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^2_{x+\lambda})}{v^t \cdot {}_t p_x} \frac{{}_t p_x{}^{(v)}}{{}_\lambda p_x{}^{(v)}},$$

wo ${}_t p_x{}^{(v)}$ die im vorhergehenden Abschnitt entwickelte Bedeutung einer pseudo-unabhängigen Wahrscheinlichkeit hat. Zuerst müssen wir nun nachweisen, dass der lösende Kern $\Gamma(t, \lambda; \varepsilon)$ wirklich Bedingung (5) erfüllt. Wir setzen $K(t, \lambda)$ und $\Gamma(t, \lambda; \varepsilon)$ ein und finden, nachdem noch passend ausgeklammert wird:

$$\frac{v^\lambda \cdot {}_\lambda p_x(w^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^2_{x+\lambda} + w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^2_{x+\lambda})}{v^t \cdot {}_t p_x} \left(\frac{{}_t p_x{}^{(v)}}{{}_\lambda p_x{}^{(v)}} - 1\right) =$$

$$= -\frac{v^\lambda \cdot {}_\lambda p_x(w^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^2_{x+\lambda} + w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^2_{x+\lambda})}{v^t \cdot {}_t p_x} \frac{1}{{}_\lambda p_x{}^{(v)}} \int_\lambda^t (w^a_{x+\tau} \cdot \alpha^2_{x+\tau} + w^b_{x+\tau} \cdot$$
$$\cdot \beta^2_{x+\tau}) \cdot {}_\tau p_x{}^{(v)} \cdot d\tau.$$

Der gleiche Faktor wird weggekürzt. Unter Beachtung der Bedingung (2), die differentiert äquivalent ist

$$-dl^{(v)}_{x+t} = l^{(v)}_{x+t}(w^a_{x+t} \cdot \alpha^2_{x+t} + w^b_{x+t} \cdot \beta^2_{x+t})\, dt,$$

geht für das Integral hervor:

$$\text{Integral} = -\int_\lambda^t \frac{dl^{(v)}_{x+\tau}}{l_x{}^{(v)}} = {}_\lambda p_x{}^{(v)} - {}_t p_x{}^{(v)}.$$

Man erkennt nun sofort, dass beide Seiten identisch sind.

---

[6]) Berger („Über simultane Versicherungswerte", Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des Deutschen Vereines für Versicherungswesen in der Tschechoslovakischen Republik, 6. Heft 1930) und Loewy („Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik", Blätter für Versicherungs-Mathematik, 2. Band, Heft 2, 1931) haben unseres Wissens erstmals Integralgleichungen für das Deckungskapital aufgestellt; dabei gingen sie allerdings von andern Voraussetzungen aus als wir hier. Die Bergersche Integralgleichung, die durch eine besondere Zusammenfassung der Thieleschen Reservendifferentialgleichung beim Integrationsprozess entstanden ist, ähnelt aber der unsern in ihrer Struktur, so dass auch die lösenden Kerne einen ähnlichen Aufbau zeigen müssen. Durch Einführung der pseudounabhängigen Ordnungen konnte der Bergersche Ansatz zu der obenstehenden Form erweitert werden.

Die Lösung der Integralgleichung mit Hilfe des lösenden Kernes hat die Form:

$$ {}_tV_x = \mathrm{f}(t) - \int_0^t \Gamma(t, \lambda; \varepsilon)\, \mathrm{f}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. $$

Wir führen $\Gamma(t, \lambda; \varepsilon)$ und $\mathrm{f}(t)$ in diese Gleichung ein:

$$ {}_tV_x = \frac{1}{v^t \cdot l_{x+t}} \int_0^t \mathrm{H}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda - $$

$$ - \frac{{}_tp_x^{(v)}}{v^t \cdot {}_tp_x} \int_0^t \frac{{}_\lambda p_x \left(w^a_{x+\lambda} \cdot \alpha_{x+\lambda} + w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^2_{x+\lambda}\right)}{{}_\lambda p_x^{(v)} \cdot l_{x+\lambda}} \int_0^\lambda \mathrm{H}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \,.\, \mathrm{d}\lambda. \qquad (6) $$

Formt man nach dem bekannten Satz

$$ \int_0^t \mathrm{d}\lambda \int_0^\lambda \mathrm{f}(\lambda, \tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_\tau^t \mathrm{f}(\lambda, \tau)\, \mathrm{d}\tau $$

von Dirichlet um, so kann das letzte Glied geschrieben werden als:

$$ \frac{{}_tp_x^{(v)}}{v^t \cdot {}_tp_x} \int_0^t \mathrm{H}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \int_\tau^t \frac{l^{(v)}_{x+\lambda}\left(w^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^2_{x+\lambda} + w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^2_{x+\lambda}\right)}{\left(l^{(v)}_{x+\lambda}\right)^2}\, \mathrm{d}\lambda. $$

Analog wie vorher schreibt man für das innere Integral auch:

$$ -\int_\tau^t \frac{\mathrm{d}l^{(v)}_{x+\lambda}}{\left(l^{(v)}_{x+\lambda}\right)^2} = \frac{1}{l_x^{(v)}}\left(\frac{1}{{}_tp_x^{(v)}} - \frac{1}{{}_\tau p_x^{(v)}}\right). $$

Eingesetzt in (6) folgt für das Deckungskapital:

$$ {}_tV_x = \frac{1}{v^t \cdot l_{x+t}} \int_0^t \mathrm{H}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda - \frac{{}_tp_x^{(v)}}{v^t \cdot {}_tp_x} \int_0^t \frac{\mathrm{H}(\tau)}{l_x^{(v)}} \left(\frac{1}{{}_tp_x^{(v)}} - \frac{1}{{}_\tau p_x^{(v)}}\right) \mathrm{d}\tau. $$

Zwei Glieder heben sich weg, in das übrigbleibende setzt man $\mathrm{H}(\tau)$ wieder in seiner Bedeutung nach (4) ein:

$$ {}_tV_x = \frac{{}_tp_x^{(v)}}{v^t \cdot {}_tp_x} \int_0^t v^\lambda \frac{{}_\lambda p_x}{{}_\lambda p_x^{(v)}} \left(w^a_{x+\lambda} \cdot P_{x+\lambda} - w^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^1_{x+\lambda} - w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^1_{x+\lambda} - \right. $$

$$ \left. - w^b_{x+\lambda} \cdot T_{x+\lambda}\right) \mathrm{d}\lambda. $$

Da aber
$$ \frac{{}_tp_x}{{}_tp_x^{(v)}} = {}_tp_x^{(u)} = \frac{l^{(u)}_{x+t}}{l_x^{(u)}} = \frac{l^{(u)}_{x+t}}{l_x}, $$

folgt als Schlussbeziehung:

$$ {}_tV_x = \frac{1}{v^t \cdot l^{(u)}_{x+t}} \int_0^t v^\lambda \cdot l^{(u)}_{x+\lambda}\left(w^a_{x+\lambda} \cdot P_{x+\lambda} - w^a_{x+\lambda} \cdot \alpha^1_{x+\lambda} - \right. $$

$$ \left. - w^b_{x+\lambda} \cdot \beta^1_{x+\lambda} - w^b_{x+\lambda} \cdot T_{x+\lambda}\right) \mathrm{d}\lambda. $$

Unsere Aufgabe ist damit gelöst, unter dem Integralzeichen sind lauter bekannte Funktionen. Die allgemeine Abfallsordnung l_{x+t} ist ersetzt durch die pseudo-unabhängige Ordnung $l^{(u)}_{x+t}$, die symbolisch nur den Einfluss derjenigen Ausscheideursachen widerspiegelt, die eine richtige Versicherungsleistung nachsichziehen. Wir wiederholen, dass die Ordnung $l^{(u)}_{x+t}$ aus den Grundgrössen vollständig bestimmbar ist. — Wir gehen noch über zu zwei Anwendungen.

Das Deckungskapital der Ablebensversicherung unter Einbezug des Stornos.

In der Lebensversicherung, speziell hier im Falle einer reinen Ablebensversicherung, haben wir nur eine Gesamtheit zu betrachten, welche durch die Intensitäten der Sterblichkeit und der Stornierung bestimmt ist. Die Ordnung $l^{(u)}_{x+t}$ gibt das Abfallen wieder, wie wenn kein Storno wirken würde. Identifiziert man noch α^1_{x+t} mit der Intensität der Sterblichkeit μ_{x+t} und α^2_{x+t} mit der Intensität der Stornierung, so ist die Reserve dargestellt durch:

$$
{}_tV_x = \frac{1}{v^t \cdot l^{(u)}_{x+t}} \int_0^t v^\lambda \cdot l^{(u)}_{x+\lambda} \left(P_{x+\lambda} - \mu_{x+\lambda}\right) d\lambda,
$$

wobei

$$
l^{(u)}_{x+t} = l_x \cdot e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}.
$$

Damit ist das bekannte Resultat erwiesen, dass das Deckungskapital unter Berücksichtigung des Stornos gleich gross ist wie das Deckungskapital ohne seine Einbeziehung; dieser Beweis ging als Spezialfall aus unserer allgemeinen Formel hervor.

Das Deckungskapital in der Unfallversicherung mit Durchschnittsbeiträgen und Rückgewähr des durchschnittlichen retrospektiven Deckungskapitals bei Nicht-Unfalltod.

Wir beschreiben hier speziell die Verhältnisse in einer sozialen Unfallversicherungskasse, bemerken aber, dass die individuelle Unfallversicherung ganz gleich behandelt werden könnte. — Während der Dauer der Unfallbeschädigung beziehe der Versicherte ein festes Taggeld vom Betrage von jährlich T. (Alle Leistungen sind auf das Jahr als Zeiteinheit zu beziehen.) Erfolgt der Tod im Zustande einer Unfallbeschädigung, so kommt das Sterbegeld „1" zur Auszahlung; erfolgt dagegen der Tod nicht als Folge eines Unfalles (also ohne dass ein Unfall vorangegangen wäre), so vergütet die Kasse bloss das retrospektive Deckungskapital.

Wir dürfen $\alpha^1_{x+t} = 0$ ansetzen. Nur wenn ein Versicherter durch einen Unfall stirbt, kommt das Sterbegeld zur Auszahlung; alle durch Unfall Sterbenden können eine kleine Zeitspanne der Gesamtheit der Unfallbeschädigten zugeordnet werden. Sodann bedeutet $\alpha^2_{x+t} \rightarrow \mu^u_{x+t}$ die gewöhnliche Sterblichkeitsintensität eines Nicht-Unfallbeschädigten.

Allen aus der Gesamtheit der Unfallbeschädigten ausscheidenden

Mitgliedern (wenn dieses Ausscheiden nicht durch Heilung geschieht) muss das Sterbegeld „1" bezahlt werden. Wir definieren daher $\beta^1_{x+t} \rightarrow \rightarrow \mu^v_{x+t}$ als Intensität der Sterblichkeit eines Unfallbeschädigten. Endlich ist noch $\beta^2_{x+t} = 0$, denn einem Unfallbeschädigten wird nie das Deckungskapital zurückgezahlt. — Die pseudo-unabhängige Ordnung $l^{(u)}_{x+t}$ ist dann dargestellt durch:

$$l^{(u)}_{x+t} = l_x \cdot e^{-\int\limits_0 w^a_{x+s} \cdot \mu^u_{x+s} \mathrm{d}s.}$$

Sind die Gesamtheiten der Nicht-Unfallbeschädigten und der Unfallbeschädigten aus dem System (1) berechnet, so sind auch die Wahrscheinlichkeiten w^a_{x+t} nicht unfallbeschädigt und w^b_{x+t} unfallbeschädigt zu sein, gegeben. Damit ist aber auch die Möglichkeit geboten, aus der letzten Gleichung die Ordnung $l^{(u)}_{x+t}$ zu errechnen. Für das Deckungskapital folgt dann:

$${}_tV_x = \frac{1}{v^t \cdot l^{(u)}_{x+t}} \int\limits_0^t v^\lambda \cdot l^{(u)}_{x+\lambda} (w^a_{x+\lambda} \cdot P_\Delta - w^b_{x+\lambda} \cdot T - w^b_{x+\lambda} \cdot \mu^v_{x+\lambda})\, \mathrm{d}\lambda.$$

Wir weisen noch einmal darauf hin, dass die speziell zur Lösung der Integralgleichung eingeführten pseudo-unabhängigen Ordnungen dem Charakter nach nicht mit den Ordnungen der „Nicht-Unfallbeschädigten" und der „Unfallbeschädigten" übereinstimmen.

Schluss.

Die beiden Beispiele mögen genügen, die Anwendbarkeit unserer allgemeinen Formel zu zeigen. Durch die ganz allgemeinen Ansätze konnten die verwickelten Vorgänge in der sozialen Versicherung ein wenig geklärt und in eine engere Bindung mit den klaren Ergebnissen der Lebensversicherung gebracht werden. Eine Behandlung des Problems der Deckungskapitalberechnung unter allgemeinsten Voraussetzungen dürfte sicher dazu beitragen, der sozialen Versicherung das feste Gefüge zu verleihen, wie es die Lebensversicherung bereits aufweist.

Juni 1932.

La généralisation des courbes de fréquence de Pearson par Romanovsky.

Par le Dr. *J. Kašpar.*

Romanovsky a montré, dans un de ses multiples travaux, publiés dans la revue „Biométrie", année XVI, comment on peut généraliser les courbes de fréquence du premier, deuxième et troisième type, à savoir