L. Cvetnič

Über die mittlere Abweichung

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 4, 165–174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144581

nach a die Beziehung

$$\frac{\partial\psi(a, h)}{\partial a} = \psi(a, h) - h^3 \frac{a - 2h}{a^2 (a + h)^2 (a + 2h)}, \tag{56}$$

aus welcher durch Integration, da $\psi(a, h)$ für einen fixen Wert von h sich mit beliebig wachsen dem a der Null nähert, die Darstellung

$$\psi(a, h) = h^3 e^a \int_a^\infty e^{-a} \frac{a - 2h}{a^2 (a + h)^2 (a + 2h)} da$$

und daher auch bei $a > 2h$, wie behauptet, das positive Vorzeichen von ψ folgt.

(Der Redaktion am 27 Mai 1932 zugegangen.)

Über die mittlere Abweichung.

Von *L. Cvetnič*, Prag.

Im Folgenden wird der Versuch unternommen, unter möglichster Ausschaltung von Hypothesen den Begriff der mittleren Abweichung klarzustellen, und zwar hinsichtlich solcher statistischen Beobachtungen, die das Eintreffen oder Nichteintreffen eines Ereignisses zum Gegenstande haben, welchem Ereignisse eine Wahrscheinlichkeit zugrundeliegt oder zugrundeliegen kann.

Ein derartiger Versuch mag zunächst recht überflüssig erscheinen. Erwägt man aber, dass massgebende Autoren in der Frage der zahlenmässigen Ermittlung der mittleren Abweichung verschiedene Lösungen zulassen,[1]) so erscheint es nicht überflüssig, die Frage aufzuwerfen, welcher Weg eigentlich den Vorzug der Korrektheit hat.

Liegen die Ergebnisse der als gleich präzise angenommenen Einzelbeobachtungen vor, so unterliegt es keinem Zweifel, dass der Quotient aus der Summe der Quadrate der Einzelabweichungen und der Anzahl der Einzelbeobachtungen den einwandfreien Mittelwert des auf die Einzelbeobachtung bezüglichen Fehlerquadrates vorstellt, und somit dessen Quadratwurzel die mittlere Abweichung liefert. Dabei kommt es nicht einmal darauf an, ob die Einzelresultate Ergebnisse von Wahrscheinlichkeitsbeobachtungen betreffen oder nicht.

Ganz ähnlich liegt der Fall, wenn nicht die Einzelbeobachtungen registriert sind, vielmehr nur die Resultate von Gruppen derselben, jedoch die einzelnen Gruppen untereinander gleiche Gewichte auf-

---

[1]) C. V. L. Charlier, Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik, Kap. VIII.

Dr. R. v. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, § 9, 1; § 10, 4.

weisen. Doch liefert dann der Quotient aus der Summe der Abweichungsquadrate und der Anzahl der Gruppen einen Mittelwert, der sich nicht auf die Einzelbeobachtung, sondern auf die Gruppe bezieht. Das so resultierende Gruppenfehlerquadrat charakterisiert die Streuung in einem ganz anderen Sinne als das Fehlerquadrat aus den Einzelbeobachtungen.

Es ist nämlich zu beachten, dass der letztere Wert, den wir kurz mit σ^2 bezeichnen wollen, bei direkter Beobachtung einer Wahrscheinlichkeitsgrösse unter allen Umständen durch folgende Formel gegeben ist

$$\sigma^2 = p\,(1 - p) + (w - p)^2 \tag{1}$$

worin p das arithmetische Mittel aus den beobachteten Wahrscheinlichkeitswerten und w den sogenannten wahren Wert vorstellt. Daraus ist zu ersehen, dass σ^2 ganz unabhängig ist von dem mehr oder weniger regelmässigen Verlauf der einzelnen Beobachtungsergebnisse, also eigentlich gar kein Streuungsmass vorstellt, vielmehr eine immanente Charakteristik des gesamten Beobachtungskomplexes liefert. Die Gleichung (1) kann man übrigens auch in der Form

$$\sigma^2 = w(1 - w) - (w - p)\,(1 - 2w) \tag{1a}$$

schreiben, aus welcher zu ersehen ist, dass bei $w = \frac{1}{2}$ das σ^2 ohne Rücksicht auf die Abweichung $w - p$ mit dem apriorischen Erwartungswerte $w\,(1 - w)$ des Fehlerquadrates identisch ist. Andererseits zeigt Formel (1a), dass σ^2 grösser oder auch kleiner sein kann als $w\,(1 - w)$.

Zur Beurteilung der Streuung ist also unbedingt eine Gruppierung der Einzelergebnisse erforderlich, d. h. eine serienweise Zusammenfassung, bei der allerdings jede Willkür nach Möglichkeit auszuschalten ist.

Der allgemeinste Fall der Gruppierung der Einzelergebnisse ist der ungleich starker Serien. Wir wollen also von folgender Annahme ausgehen.

Es liegen N Einzelbeobachtungen vor, die v Gruppen oder Serien bilden. In der Serie k haben wir n_k Einzelbeobachtungen mit den Ergebnissen $m_{k1}, m_{k2}, \ldots, m_{kn}$. Fassen wir alle N Beobachtungen als einen einzigen Komplex auf, der durch einen und denselben Mittelwert M zu charakterisieren ist, so ist jedem Beobachtungsergebnis m_{kl} die Abweichung

$$\varepsilon_{kl} = M - m_{kl}$$

zugeordnet, die wir auch Fehler nennen wollen.

Die mittlere Abweichung des Einzelergebnisses mit Bezug auf das Mittel M bezeichnen wir mit σ und deren Quadrat soll kurz als Fehlerquadrat bezeichnet werden.

Die Definition des Fehlerquadrats ist dann durch die Gleichung

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{v}\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_{kl}^2 \tag{2}$$

gegeben.

Analoge Fehlerquadrate können auch aus den einzelnen Gruppen gebildet gedacht werden. Für die Serie k haben wir

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n} \varepsilon_{kl}^2. \tag{3}$$

Mit Rücksicht auf (3) kann man Gleichung (2) auch in folgender Form schreiben

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\, n_k \sigma_k^2}{\Sigma n_k} \tag{4}$$

wobei die Summation über alle k von 1 bis v auszuführen ist. Bei der Ableitung dieser Formel ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass sich alle σ_k auf ein und dasselbe M beziehen.

Darnach ist zur Bestimmung des Fehlerquadrats nicht nötig, dass gerade alle Einzelabweichungen gegeben sind, es genügt vielmehr die Kenntnis der Fehlerquadrate der einzelnen Serien.

Betrachten wir nun eine solche Gruppierung, bei der die Serienanzahl

$$v = a + b + c + \ldots$$

und gleichzeitig

$$N = a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots$$

wobei sowohl die Grössen $a, b, c \ldots$ als auch die Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ durchwegs positive ganze Zahlen sind und insbesondere jede der Grössen $a, b, c \ldots$ grösser ist als 1. Mit anderen Worten, wir setzen voraus, dass a Serien zu je α Einzelbeobachtungen, b Serien zu je β Einzelbeobachtungen usw. vorliegen. Gegeben seien die Serienresultate

$$p_1, p_2, \ldots p_k \ldots p_v$$

dass heisst die arithmetischen Mittel

$$p_k = \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n} m_{kl} = \frac{m_k}{n_k} \tag{5}$$

während die einzelnen m_{kl} nicht bekannt sind.

Dann haben wir keine Möglichkeit, das σ^2 unmittelbar nach Gleichung (2) oder (4) zu berechnen.[2])

Wohl aber können wir, ohne eine Hypothese in Anwendung zu bringen, folgende Fehlerquadrate ermitteln:

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{a}\sum^{a} \varepsilon_k^2$$

$$\sigma^2(\beta) = \frac{1}{b}\sum^{b} \varepsilon_k^2 \quad \text{usw.}$$

---

[2]) Die eventuelle Ermittlung des σ^2 durch Anwendung der Formel (1) ist in diesem Zusammenhange ohne Interesse.

Hier bedeutet $\varepsilon_k = M - p_k$, d. h. die Abweichung des Serienresultates im Sinne der Definition (5). Die Summation der ε_k^2 ist jeweilig nur bezüglich der gleich starken Serien durchzuführen.

Die so gewonnenen $\sigma(\alpha)$, $\sigma(\beta)$ . . . sind jedoch mittlere Abweichungen der Serienresultate p_k, nicht mittlere Abweichungen der Einzelergebnisse.

Handelt es sich aber bei dem gegebenen Beobachtungsmaterial um einen Komplex, dem eine Wahrscheinlichkeit zu Grunde liegt, so kann man aus den Grössen $\sigma(\alpha)$, $\sigma(\beta)$ . . . auf die Fehlerquadrate im Sinne der Formel (3) schliessen. In diesem Falle hat man nämlich zufolge eines der elementarsten Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die a Serien zu je α Beobachtungen das Fehlerquadrat — wie es in Formel (3) definiert erscheint — gleich

$$\alpha\sigma^2(\alpha) = \frac{\alpha}{a}\sum^{a} \varepsilon_k^2$$

zu setzen und in gleicher Weise auch die anderen Fehlerquadrate zu bestimmen.

Dann ist die uneingeschränkt gültige Formel (4) anwendbar und man hat nur noch zu beachten, dass die in (4) vorkommenden Gewichte n_k nunmehr $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ . . . gleichkommen. Dann erhält man

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\left\{\alpha^2\sum^{a}\varepsilon_k^2 + \beta^2\sum^{b}\varepsilon_k^2 + \gamma^2\sum^{c}\varepsilon_k^2 + \ldots\right\}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber nichts anderes als

$$\sum_1^{v} n_k^2\, \varepsilon_k^2 \quad .$$

und daher ist

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_1^{v} n_k^2\, \varepsilon_k^2}{\sum\limits_1^{v} n_k} \tag{6}$$

Da nun aber $n_k \varepsilon_k = M n_k - m_k$ mit der Abweichung des absoluten Ergebnisses m_k der Serie k von dessen Erwartungswert $M n_k$ identisch ist, führen wir für letztere Abweichung die kürzere Bezeichnung ξ_k ein, also

$$\xi_k = M n_k - m_k$$

worauf (6) die Form annimmt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_1^{v} \xi_k^2 \tag{6a}$$

Die Gleichungen (6) und (6a) sind unter der Voraussetzung abgeleitet worden, dass die Grössen $a, b, c \ldots$ grösser sind als die Einheit, d. h. dass zu jeder Serie eine andere gleich starke (ebensoviele Einzelbeobachtungen umfassende) vorhanden ist. Diese Voraussetzung erweist sich angesichts der Form, die der Zähler auf der rechten Seite der Gleichung (6) aufweist, nachträglich als praktisch irrelevant. Die gefundenen Resultate gelten also auch für den Fall durchwegs verschiedener n_k. Den Ausgangspunkt für die Ableitung der Gleichungen (6) und (6a) bildet die Definition (2), die durchaus mit jener identisch ist, welche bei direkter Beobachtung einer Wahrscheinlichkeitsgrösse zur Gleichung (1) führt. Nichtdestoweniger wird das zahlenmässige Ergebnis im Allgemeinen divergieren, da die Berechnung gemäss (6) bezw. (6a) die Streuung der Serienergebnisse berücksichtigt, was bei (1) nicht der Fall ist.

Im Weiteren wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass sich die Beobachtungen auf die Wahrscheinlichkeit w selbst beziehen, nicht etwa auf eine Funktion derselben.

Die Grössen m_k stellen dann die beobachteten günstigen Fälle vor, die Werte ε_k sind die Abweichungen der beobachteten Verhältniszahlen (Serienresultate) von dem „wahren" Werte w der Wahrscheinlichkeit. Die ξ_k sind also die Abweichungen der beobachteten Wiederholungszahlen von den Erwartungswerten wn_k.

Der durch Gleichung (6a) charakterisierte Rechnungsvorgang hat eine gewisse Ähnlichkeit mit jenem, den Charlier als Anwendung der „reduzierten und gewägten Reihe" bezeichnet. Darunter versteht er eine Darstellung, bei welcher anstatt der relativen Abweichungen ε_k die absoluten Abweichungen ξ_k in Erscheinung treten. Allerdings stellt Charlier die Grössen ξ_k nur in dem Falle als gleichgewichtig in Rechnung, wenn es sich darum handelt, die durchschnittliche Abweichung zu ermitteln. Auch Blaschke[3]) benützt die Bezeichnung „reduzierter Fehler" und zwar im Sinne gleichgewichtiger Abweichungen, indem er auf Grund der gegebenen Abweichungen ε_k analoge Grössen definiert, denen er gleiche Gewichte zuschreibt.

Betrachtet man die Gleichung (6a), so findet man, dass in derselben als „reduzierte" Abweichungen die konstatierten Abweichungen selbst in Erscheinung treten.

Diesen Umstand kann man durch einen ganz mechanischen Vorgang illustrieren, indem man folgenden Weg einschlägt.

Die untereinander verschieden starken Serien bringt man (unter Beibehaltung der Anzahl der Serien) auf solche gleichen Umfanges, indem man alle n_k auf $\frac{\Sigma n_k}{v} = \frac{N}{v}$ erhöht bezw. vermindert, wobei die unwesentliche Annahme gemacht wird, dass $\frac{N}{v}$ eine ganze Zahl

[3]) Vorlesungen über mathematische Statistik.

ist. Man entnimmt also den grösseren Serien $n_k - \frac{N}{v}$ Einzelbeobachtungen, und zwar solche, bei denen das beobachtete Ereignis insgesamt in $w\left(n_k - \frac{N}{v}\right)$ Fällen eingetreten ist; der Umstand, dass die Grösse $w\left(n_k - \frac{N}{v}\right)$ eigentlich eine ganze Zahl sein sollte, kann wohl auch als unwesentlich angesehen werden. Allerdings wird dabei auch stillschweigend vorausgesetzt, dass jedem n_k, welches grösser ist als $\frac{N}{v}$, ein m_k zugeordnet ist, das wenigstens $w \cdot \frac{N}{v}$ beträgt. Die so freigewordenen Teile der grösseren Serien werden analog zur Auffüllung der kleinen Serien verwendet, worauf jede der Serien gerade $\frac{N}{v}$ Beobachtungen umfasst und jedes der ursprünglichen m_k durch m'_k ersetzt ist. Dabei ist aber

$$m'_k = m_k + w\left(\frac{N}{v} - n_k\right)$$

$$\sum_1^v m'_k = \sum_1^v m_k + w\left(N - \sum_1^v n_k\right) = \sum_1^v m_k$$

und die gleichgewichtigen Abweichungen betragen somit

$$\xi'_k = w\frac{N}{v} - m_k - w\left(\frac{N}{v} - n_k\right) = wn_k - m_k = \xi_k$$

d. h. bei der erwähnten Umgruppierung tritt hinsichtlich der Grösse der absoluten Abweichungen keine Änderung ein. Doch beziehen sich die letzteren nunmehr auf Serien von je $\frac{N}{v}$ Beobachtungen, so dass das Gruppenfehlerquadrat den Wert

$$\frac{1}{v}\sum \xi_k^2 \tag{7}$$

annimmt, woraus dann

$$\sigma^2 = \frac{1}{v}\sum \xi_k^2 \cdot \frac{v}{N} = \frac{1}{N}\sum \xi_k^2$$

folgt, was mit Gleichung (6a) übereinstimmt.

Der Begriff der reduzierten Fehler ist dann von Bedeutung, wenn es sich darum handelt, die Streuung eines aus ungleich starken Serien bestehenden Komplexes im Detail mit der erwartungsgemässen Streuung zu vergleichen. Man wird jener Definition der reduzierten Fehler den Vorzug zu geben haben, die am Gesamtumfange des Komplexes, d. h. an der Zahl $N = \Sigma n_k$ keine Veränderung herbeiführt und auch das arithmetische Mittel $p = \frac{\Sigma m_k}{\Sigma n_k}$ unverändert belässt. Diese beiden Bedingungen sind erfüllt, wenn die reduzierten Fehler ξ'_k den unmittelbar resultierenden Fehlern $\xi_k = wn_k - m_k$ gleichgestellt und auf gleiche Serien von je $\frac{N}{v}$ Versuchen bezogen werden. Denn der transformierte Komplex umfasst dann wieder N Versuche und $\Sigma m'_k = \Sigma m_k = pN$.

Zur Festsetzung des Begriffes der reduzierten Fehler wäre es übrigens gar nicht notwendig, die oben erwähnte mechanische Transformation heranzuziehen, da schon die Gleichung (6a) den Schluss zulässt, dass die Abweichungen ξ_k ohne jedwede Korrektur als gleichgewichtige Grössen zu gelten haben.

Während nach obigen Ausführungen das Mittel des Gruppenfehlerquadrats durch den Ausdruck (7) gegeben erscheint, sind bei Untersuchungen von statistischen Reihen des in Rede stehenden Typus zwei andere Definitionen dieser Streuungsgrösse üblich.

Die eine lautet

$$s^2 = \frac{1}{v}\sum_1^v \varepsilon_k^2 \tag{7a}$$

und wird mit dem Erwartungswerte

$$\frac{1}{v} w(1-w)\sum_1^v \frac{1}{n_k}$$

verglichen. Hiebei ist also der reduzierte Fehler mit

$$\varepsilon_k = w - \frac{m_k}{n_k}$$

angenommen und auf die mittlere Gruppenstärke

$$\nu = \frac{v}{\sum \frac{1}{n_k}}$$

bezogen. Die Definition (7a) beinhaltet also eine Neugruppierung in v Serien zu je ν Versuchen, wobei die Anzahl der günstigen Fälle in der transformierten Serie k

$$m'_k = \nu \, . \frac{m_k}{n_k}$$

und demzufolge das arithmetische Mittel des ganzen transformierten Komplexes

$$p' = \frac{1}{v}\sum_{1}^{v}\frac{m_k}{n_k}$$

beträgt. Mit anderen Worten, der Umfang erscheint von N auf $vv = \frac{v^2}{\sum \frac{1}{n_k}}$ abgeändert, und das arithmetische Mittel von $p = \frac{\Sigma m_k}{\Sigma n_k}$ auf $p' = \frac{1}{v}\sum\frac{m_k}{n_k}$.

Die zweite übliche Definition lautet

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{1}^{v} n_k\,\varepsilon_k^2 \tag{7b}$$

und diese Grösse wird mit dem Erwartungswerte $\frac{v}{N}\,w\,(1 - w)$ verglichen. Diese Definition beinhaltet eine Transformation, bei welcher der Umfang N zwar keine Veränderung erfährt, die Summe der den reduzierten Fehlern $\varepsilon_k\sqrt{\frac{v\,n_k}{N}}$ zugeordneten günstigen Fälle aber einen von Σm_k verschiedenen Wert annimmt.

Die Formel (7b) scheint auf den ersten Blick die Gewichte der Serienergebnisse richtig zu erfassen, insoferne als sie der Formel

$$p = \frac{1}{N}\sum_{1}^{v} n_k p_k$$

ganz analog ist, welch letztere das gewogene arithmetische Mittel der relativen Serienergebnisse p_k liefert. Die Analogie ist aber rein äusserlich.

Auch die Formel (6a) hat eine Konstruktion, die mit jener der Formel

$$p = \frac{1}{N}\sum_{1}^{v} n_k p_k = \frac{1}{N}\sum_{1}^{v} m_k$$

durchaus analog ist. In gleicher Weise, wie hier bei der Mittelwertbildung die Zahlen m_k als gleichgewichtig bewertet sind, sind in (6a) die auf m_k bezüglichen Abweichungen ξ_k mit gleichen Gewichten in Rechnung gestellt. Diese Analogie ergibt sich allerdings erst nachträglich, sie ist bei Ableitung der Formel (6a) keineswegs vorausgesetzt oder angestrebt worden.

Eine ganz einfache Erklärung dafür, warum die Formel (7b) trotz Anwendung derselben Gewichte, dir zur Mittelwertbildung aus den relativen Serienergebnissen führen, weniger befriedigt, dürfte darin zu suchen sein, dass die Verhältniszahlen p_k keineswegs als direkt beobachtete Grössen zu werten sind. Wohl aber gilt dies von den absoluten Beobachtungszahlen m_k.

Die Lexissche Zahl ist bei Anwendung der Formel (7) gegeben durch

$$L = \frac{\Sigma n_k^2 \varepsilon_k^2}{w(1-w)N}$$

bei Anwendung der Formel (7b) dagegen durch

$$L' = \frac{\Sigma n_k \varepsilon_k^2}{w(1-w)v}.$$

Es ist unmittelbar zu sehen, dass L' als Näherungswert von L angesprochen werden kann, insoweit als jedes n_k^2 näherungsweise durch $n_k \frac{N}{v}$ ersetzt erscheint.

Bei Zugrundelegung der Formel (7a) resultiert die Lexissche Zahl

$$L'' = \frac{\Sigma \varepsilon_k^2}{w(1-w)\sum \frac{1}{n_k}}$$

die man wieder als Näherungswert des L' ansehen kann.

Führt man anstatt der wahren Abweichungen ξ_k die analogen Abweichungen vom arithmetischen Mittel

$$p = \frac{1}{N}\sum_1^v m_k$$

ein, so erhält man den mit der Formel (6a) korrespondierenden Erwartungswert

$$E\left[\frac{1}{N}\sum_1^v (pn_k - m_k)^2\right] = w(1-w)\frac{N^2 - \Sigma n_k^2}{N^2}$$

während bekanntlich

$$E[p(1-p)] = w(1-w)\frac{N-1}{N}.$$

Daraus ergibt sich zunächst die Beziehung

$$\frac{E\left[\frac{1}{N}\sum_1^v (pn_k - m_k)^2\right]}{E[p(1-p)]} = \frac{N^2 - \Sigma n_k^2}{N^2 - N}$$

und man kann dann, dem üblichen Gedankengange folgend, für die Lexissche Zahl die Formel

$$L = \frac{N-1}{N^2 - \Sigma n_k^2} \cdot \frac{\Sigma \xi_k^2}{p(1-p)}$$

anschreiben, worin nunmehr

$$\xi_k = pn_k - m_k \text{ bedeutet.}$$

Zusammenfassend wäre zu bemerken: Die Formeln (6) bezw. (7) gehen auf die primäre Definition der mittleren Abweichung zurück. Die Formel (7a) ist nur durch den Hinweis auf ihren recht einfachen Bau zu rechtfertigen, die Formel (7b) ist zwar auch willkürlich gewählt, lässt aber wenigstens die Gewichte nicht ganz unberücksichtigt. Umsoweniger ist es am Platze, aus der mehr oder weniger ausgesprochenen Übereinstimmung der rechnerischen Ergebnisse von (7a) und (7b) — beziehungsweise der aus diesen Formeln durch Ausscheidung der Unbekannten w abgeleiteten Ausdrücke — irgendwelche Schlüsse zu ziehen.

Sur quelques inégalités entre les moments absolus d'ordre positif d'une suite de variables aléatoires indépendantes et le second théorème — limite du calcul des probabilités au domaine de la loi de Laplace — Gauss dans la formulation de Liapounoff.

Par *Fr. Kudela.*

(Suite).

La question se pose comment se modifient les résultats obtenus si le nombre n des variables croît au delà de toute limite. Puisque les inégalités (13) et (16), aussi bien que (18) et (19), se rapportent aux moyennes arithmétiques des moments absolus d'une suite de variables aléatoires, il est évident qu'elles conservent leur sens dans le cas de $n = \infty$, si les variables étudiées, parlant en terminologie physique, sont de même ordre de grandeur de sorte que les limites

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\mu_i}^{(m)}}{n}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\mu_i}^{(l)}}{n}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\mu_i}^{(k)}}{n},$$

ainsi que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{m_i}^{(m)}}{n}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{m_i}^{(l)}}{n}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{m_i}^{(k)}}{n},$$

existent et sont différentes de zéro. A l'égard des inégalités (17) et (20), on peut dire seulement qu'elles seront remplies encore pour $n = \infty$ si les séries infinies entre crochets sont convergentes.

2. Dans l'article cité plus haut, nous avons démontré aussi, par une méthode élémentaire, une autre inégalité, savoir