Miloš Vacek

Sur la loi de Polya régissant les faits corrélatifs. I

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 1, 18–28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144562

Sur la loi de Polya régissant les faits corrélatifs.

Dr. *Miloš Vacek.*

C'était le défunt M. L. v. Bortkiewicz[1]) qui le premier a montré l'importance pratique de la loi de Poisson $\frac{e^{-h} h^r}{r!}$ régissant les faits rares. En outre, il a montré aussi que cette loi ne peut pas être appliquée à certains faits rares comme p. ex. aux maladies contagieuses. Ceci tient à la dépendance mutuelle des cas, fait, qui mène à la dispersion hypernormale. Bortkiewicz a réussi à le montrer par la construction d'un schéma spécial. Mais ce schéma avait un défaut: il était trop artificiel de sorte que sa discussion mathématique était fort difficile. Il s'en suit qu'on n'est pas arrivé à tirer de ce schéma comme une loi limite une loi des faits corrélatifs. C'est M. Polya qui est arrivé à résondre ce problème.

Le but de ce traité est de récapituler les idées essentielles de Polya,[2]) d'étendre certains résultats d'Eggenberger[3]) et enfin de montrer l'importance et la portée de cette loi par la discussion de quelques problèmes pris des donées de la statistique de la Tchécoslovaquie.

I. Le schéma de Polya des faits corrélatifs.

Imaginons l'expérience suivante:

Dans l'urne il y a R boules blanches, S boules noires, $R + S = N$. Nous tirons une boule, nous constatons sa couleur et nous remettrons $1 + \Delta$ boules de la même couleur dans l'urne. Si $\Delta = 0$, on obtient le schéma de Bernoulli; $\Delta > 0$ donne l'acroissement, $\Delta < 0$ la diminution de la probabilité dans le cas de résultat favorable.

La probabilité que de $n = r + s$ tirages succédant l'un à l'autre on tirera dans les premiers r tirages toujours la boule blanche et dans les s tirages suivants toujours la boule noire est:

$$\frac{R\,(R+\Delta)\ldots(R+[r-1]\,\Delta)\,.\,S\,(S+\Delta)\ldots(S+[s-1]\,\Delta)}{N\,(N+\Delta)\ldots\qquad\qquad\qquad\qquad(N+[n-1]\,\Delta)}. \tag{1}$$

La même expression (1) exprime la probabilité que dans n tirages on tirera r boules blanches et s boules noires dans n'importe quel ordre donné d'avance. Donc la probabilité que dans n tirages il y aura r boules blanches et s boules noires est donnée par la multiplication de l'expression (1) par le facteur $\binom{n}{r}$. Notation adoptée:

[1]) Bortkiewicz: Das Gesetz der kleinen Zahlen.

[2]) Polya-Eggenberger: Über die Statistik verketteter Vorgänge (Zeit. f. angw. Math. u. Mech. 1923).

[3]) Eggenberger: Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. (Mitteilungen d. Ver. schweiz. Versich.-math. 1924.)

$$\varrho = \frac{R}{N}, \quad \sigma = \frac{S}{N}, \quad \delta = \frac{\Delta}{N}.$$

La probabilité cherchée est:

$$p_{rs} = \binom{n}{r} \frac{\varrho\,(\varrho + \delta) \ldots (\varrho + [r-1]\,\delta)\,\sigma\,(\sigma + \delta) \ldots (\sigma + [s-1]\,\delta)}{1\,(1+\delta) \ldots \qquad (1 + [n-1]\,\delta)}, \tag{2}$$

$$p_{rs} = \frac{\binom{-\frac{\varrho}{\delta}}{r}\binom{-\frac{\sigma}{\delta}}{s}}{\binom{-\frac{1}{\delta}}{n}}. \tag{2'}$$

La propriété du schéma de Polya, c'est à dire que la probabilité de chaque permutation de r boules blanches et s boules noires est la même, nous permet un calcul simple de p_{rs}. Mais si nous voulons généraliser le schéma de Polya par l'introduction de certaines hypothèses plus compliquées sur la remise des boules dans l'urne, nous constatons que ce schéma nouveau n'a plus cette propriété; ceci peut être facilement démontré.

Le schéma de Polya n'est que la généralisation du schéma établi dans le cas où les boules n'ont pas été remises dans l'urne ($\Delta = -1$). Cette généralisation, quoique insignifiante en ce qui concerne la forme, est d'une importance beaucoup plus grande, car c'était justement l'introduction du paramètre général δ à la place de la constante $-1/N$, qui a permis de passer à la limite pour $n\delta \to d$ et d'arriver ainsi à la généralisation de la loi de Poisson.

Eggenberger a examiné la variation des probabilités p_{rs} et a trouvé que cette variation est, ou bien monotone, ou bien en forme de cloche, ou bien en forme de U. C'est surtout ce dernier résultat qui est intéressant.

II. Le passage à la limite de Polya.

En écartant les réflexions sur la loi non limite et sur certains passages à la limite énoncés dans le traité de M. Truksa,[4]) nous allons nous préoccuper de la loi, qui en supposant $\delta > 0$ résulte de (2) par le passage à la limite pour $n \to \infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} n\varrho = h$, $\lim\limits_{n\delta \to \infty} n\delta = d$. On peut procéder à ce passage à la limite directement (Polya), mais le procédé d'Eggenberger est beaucoup plus commode. Il consiste en l'interpolation de la fonction des nombres entiers (2) en introduisant la fonction Γ dans toutes les expressions dépendantes de n.

[4]) Dr. L. Truksa: Hypergeometric orthogonal systems of polynomiasl. (Aktuárské vědy 1931.)

$$p_{rs} = \binom{\frac{\varrho}{\delta} + r - 1}{r} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\varrho}{\delta} + n - r\right) \Gamma(n+1)\, \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\delta} + n\right) \Gamma\left(\frac{1-\varrho}{\delta}\right) \Gamma(n-r+1)} . \tag{3}$$

$A_n \sim B_n$ désigne $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1$.

En appliquant la formule de Stirling

$$\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi}\,.\, s^{s-\frac{1}{2}}\, e^{-s}$$

nous démontrons que

$$\frac{\Gamma(an+\alpha)}{\Gamma(an+\beta)} \sim (an)^{\alpha-\beta}. \tag{*}$$

Les fonctions Γ dans la relation (3) ont deux par deux la forme (*). Introduisons donc à leur place dans (3) d'après la relation (*) et passons à la limite pour $n \to \infty$, $n\varrho \to h$, $n\delta \to d$:

$$\lim p_{rs} = P_r = \binom{\frac{h}{d} + r - 1}{r} \frac{d^r}{(1+d)^{\frac{h}{d}+r}} .$$

En effectuant les opérations et en simplifiant on obtient

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= (1+d)^{-h/d} \\ P_r &= \frac{h\,(h+d)\ldots(h+[r-1]\,d)}{r!\,(1+d)^{\frac{h}{d}+r}}, \quad r > 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

La loi P_r, que nous allons appeler la loi de Polya, est la généralisation de la loi de Poisson, car celle-ci résulte de P_r par la passage à la limite pour $d \to 0$

$$\lim_{d\to 0} P_r = Q_r = \frac{1}{r!}\, h^r\, e^{-h}. \tag{5}$$

La probabilité P_r satisfait à la relation recurrente

$$P_r = \frac{h + (r-1)\,d}{r\,(1+d)}\, P_{r-1}, \tag{6}$$

qui peut être employée au calcul recurrent de P_r:

$$P_r = \left[\frac{h-d}{1+d} \cdot \frac{1}{r} + \frac{d}{1+d}\right] P_{r-1} \tag{7}$$

$$P_r = \left[C_1 \frac{1}{r} + C_2\right] P_{r-1}$$

où C_1, C_2 sont indépendants de r.

III. La forme de la loi de Polya et ses constantes caractéristiques.

Il résulte de la relation (7):

$P_r \gtreqless P_{r-1}$, si $h - d \gtreqless r$

c'est à dire:

si $h > d$, $P_0 < P_1$ et la courbe des probabilités est en forme de cloche
si $h \leqq d$, $P_0 \geqq P_1 > \ldots$ et le courbe des probabilités est monotone et descendante

Nous trouvons le maximum de P_r en utilisant la condition $P_{\mu-1} \leq \leq P_\mu > P_{\mu+1}$. Il s'en suit que

$$\mu = [h - d]. \tag{8}$$

La contagibilité (dans le sens du schéma de Polya) déplace le maximum à gauche ou bien le conserve.

La fonction génératrice de la loi de Polya:

$$H(z) = \sum_{r=0}^{\infty} z^r P_r = \sum_{r=0}^{\infty} z^r (1+d)^{-\frac{h}{d}} \frac{h(h+d)\ldots(h+[r-1]d)}{r!\,(1+d)^r} =$$

$$= (1+d)^{-\frac{h}{d}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{zd}{1+d}\right)^r \binom{-\frac{h}{d}}{r} = (1+d)^{-\frac{h}{d}} \left(1 - \frac{zd}{1+d}\right)^{-\frac{h}{d}}$$

$$H(z) = \{1 + d(1-z)\}^{-\frac{h}{d}}. \tag{9}$$

La fonction caractéristique de la loi de Polya:

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r e^{tr} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{h}{d}}{r} \frac{d^r}{(1+d)^{\frac{h}{d}-r}} e^{tr} =$$

$$= (1+d)^{-\frac{h}{d}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{h}{d}}{r} \left(\frac{de^t}{1+d}\right)^r = (1+d)^{-\frac{h}{d}} \left(1 - \frac{d}{1+d} e^t\right)^{-\frac{h}{d}}$$

$$\varphi(t) = \{1 + d(e^t - 1)\}^{-\frac{h}{d}}. \tag{10}$$

Les moments des puissances peuvent être calculés très facilement à l'aide des moments des factorielles, qui, eux-mêmes, peuvent être calculés de la relation

$$Er(r-1)\ldots(r-k+1) = \left[\frac{d^k}{dz^k} G(z)\right]_{z=1} \tag{11}$$

où $G(z)$ désigne la fonction génératrice correspondante.

$$\frac{d^k}{dz^k} H(z) = h\,(h+d)\ldots(h+[k-1]\,d)\,\{1+d\,(1-z)\}^{-\frac{h}{d}-k}$$

et d'après (11)

$$Er\,(r-1)\ldots(r-k+1) = h\,(h+d)\ldots(h+[k-1]\,d), \qquad (12)$$

d'où on tire $\quad m_2 = E\,(r-h)^2 = h\,(1+d),$

$$m_3 = E\,(r-h)^3 = h\,(1+d)\,(1+2d).$$

L'écart arithmétique est défini par la relation $A = E\,|\,r-h\,|$. Nous trouvons sa valeur de la façon suivante:

$$\sum_{r=0}^{\infty}(r-h)\,P_r = 0.$$

Donc si nous désignons par $\gamma = [h]$ il vient

$$\sum_{r=0}^{\gamma}(h-r)\,P_r = \sum_{r=\gamma+1}^{\infty}(r-h)\,P_r$$

$$A = \sum_{r=0}^{\gamma}(h-r)\,P_r + \sum_{r=\gamma+1}^{\infty}(r-h)\,P_r = 2\sum_{r=0}^{\gamma}(h-r)\,P_r.$$

Nous obtiendrons

$$\sum_{r=0}^{n}(h-r)\,P_r = (h+nd)\,P_n$$

car ceci est valable pour $n = 0$; et en supposant que

$$\sum_{r=0}^{n-1}(h-r)\,P_r = (h+[n-1]\,d)\,P_{n-1}$$

nous obtiendrons d'après (6):

$$\sum_{r=0}^{n}(h-r)\,P_r\,(h+[n-1]\;d)\,P_n\,\frac{n\,(1+d)}{h+(n-1)\,d} + (h-n)\,P_n =$$
$$= (h+nd)\,P_n.$$

Par conséquent

$$A = E\,|\,r-h\,| = 2\,(h+\gamma d)\,P\gamma,\ \gamma = [h]. \qquad (13)$$

IV. Application aux séries statistiques.

Nous avons pour but d'examiner les qualités algébriques d'une certaine série statistique. Nous examinons la disposition d'une seule propriété caractéristique. Le moyen de cette examination sera la reproduction d'une série des nombres empiriques par un schéma, éventuellement par la loi limite dérivée du schéma. La possibilité de cette reproduction a pour base l'hypothèse suivante:

Si les données d'une série statistique ont une stabilité suffisante dans le temps, nous supposons que les causes produisant systématiquement le fait sont de tel ordre, qu'on peut les remplacer par un schéma.

En procédant par ce remplacement on risque toujours de commettre des erreurs. Le schéma pris pour base peut être mal choisi et on est alors obligé d'en choisir un autre. Il existe même des cas, auxquels nul des schémas connus ne peut être appliqué.

La question principale se pose: comment déterminer les constants du schéma choisi. Nous avons à notre disposition autant de conditions que la loi a de paramètres libres; donc dans la loi de Polya il y en a deux. Il est un usage de confondre les premiers moments des puissances; cet usage est motivé par le théorème des moments de Polya.

Supposons maintenant qu'on donne m séries, (chacune à un grand nombre n de cas). Le nombre de l'apparition d'un certain fait dans les séries soit[5])

$$r'_1, r'_2, \ldots, r'_m.$$

Nous voulons représenter cet ensemble de nombres par le schéma de Pólya. Si n est grand par rapport à la fréquence moyenne du fait considéré (faits rares), nous appliquerons la loi de Polya.

Nous formons un tableau nouveau en comptant les séries dont les fréquences sont 0, 1, 2, . . .

r	f_r	mP_r
0	f_0	mP_0
1	f_1	mP_1
:	:	:

mP_r sont les résultats probables de m séries dans le schéma de Polya. Puis nous examinons la concordance des colonnes II. et III. .

Il s'agit de déterminer les constants h et d. Règle générale: on détermine la valeur présumée d'une grandeur U en formant une fonction des valeurs empiriques telle que son espérance mathématique est U.

Les valeurs h' et d' tirées des équations

$$h' = \frac{s'}{m}$$

$$h'(1 + d') = \sum_{i=1}^{m} \frac{(r'_i - h')^2}{m - 1}$$

[5]) Les valeurs empiriques sont désignées par une apostrophe.

ont la propriété que

$$Eh' = h, \qquad Eh'(1 + d') = h(1 + d). \tag{14}$$

Démonstration: La première des relations exprime que la fréquence relative du fait approche sa probabilité. La deuxième relation peut être démontrée de la façon suivante:

$$\sum \frac{(r'_i - h)^2}{m} - \sum \frac{(r'_i - h')^2}{m} = (h' - h)^2,$$

donc

$$\sum \frac{(r'_i - h')^2}{m} = \frac{m}{m-1} \left\{ \sum \frac{(r'_i - h)^2}{m} - (h' - h)^2 \right\},$$

$$E(h' - h)^2 = E\left(\frac{s'}{m} - h\right)^2 = \frac{1}{m^2} E(s' - mh)^2 = \frac{1}{m^2} . hm(1 + d) = \frac{1}{m} h(1 + d)$$

et par conséquent

$$E\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{(r'_i - h')^2}{m-1}\right) = \frac{m}{m-1} \left\{ h(1 + d) - \frac{1}{m} h(1 + d) \right\} = h(1 + d).$$

Désignons l'écart quadratique moyen par

$$\varepsilon(r) = \sqrt{h(1 + d)}.$$

Sa valeur présumée $\quad \varepsilon'(r) = \sqrt{h'(1 + d')},$

$$\text{ou} \quad \varepsilon''(r) = \sum \frac{r'_i - h}{m}.$$

M. Eggenberger a aussi démontré que

$$\varepsilon(h') = \sqrt{\frac{h(1 + d)}{m}}$$

$$\varepsilon\{[\varepsilon''(r)]^2\} = \sqrt{\frac{h(1 + d)}{m}(2h + 6d)(1 + d) + 1}.$$

Nous ne connaissons pas la valeur précise de $\varepsilon(d')$.

$$\text{Enfin } A = 2\sum_{r=0}^{\gamma}(h - r) P_r, \quad \gamma = [h],$$

$$A' = \frac{2}{m}\left\{ h \sum_{r=0}^{\gamma} X_r - \sum_{r=0}^{\gamma} r X_r \right\},$$

X_j est le nombre des séries à la fréquence j.

V. *L'influence de la non-homogénéité.*

Si les différences entre les résultats empirique et les hypothèses choisies sont plus grandes, il arrive que la représentation par un schéma donné n'est pas satisfaisante. Ceci est souvent la conséquence de la circonstance que la condition d'homogénéité n'est pas remplie.

Il faut aussi envisager si, dans les faits capables d'être représentés par le schéma de Polya, il ne s'agit pas que de la non-homogénéité d'une série à l'autre.

Adaptons la désignation d'Eggenberger:

	non limité	faits rares	séries partielles	non-kom. intérieure	non-hom. d'une série à l'autre
l'accroissement de la probabilité	p_{rs}	P_r	$P'_r \ldots P_r^{(s)}$	P^*_r	$\overline{P}_r$
l'indépendance	q_{rs}	Q_r	$Q'_r \ldots Q_r^{(s)}$	Q^*_r	$\overline{Q}_r$

La loi de prob.	la fonction génératrice	
Q_r	$F(z) =$	$e^{-h(1-z)}$
P_r	$H(z) =$	$\{1 + d\,(1 - z)\}^{-\frac{h}{d}}$
Q^*_r	$F^*(z) =$	$e^{-(1-z)\sum\limits_{i=1}^{s} h_i}$
P^*_r	$H^*(z) =$	$\prod\limits_{i=1}^{s} \{1 + d_i\,(1 - z)\}^{-\frac{h_i}{d_i}}$ (15)
$\overline{Q}_r$	$\overline{F(z)} =$	$\frac{1}{s}\sum\limits_{i=1}^{s} e^{-h_i(1-z)}$
$\overline{P}_r$	$\overline{H(z)} =$	$\frac{1}{s}\sum\limits_{i=1}^{s} \{1 + d_i\,(1 - z)\}^{-\frac{h_i}{d_i}}$

Quant au P^*, $\overline{P}$ nous supposons que la contagibilité est limitée aux séries partielles, éventuellement aux séries simples.

Il nous suffit de démontrer la relation pour $H^*(z)$. Le résultat d'une série est la somme des résultats des séries partielles, indépendantes l'une de l'autre. Si les séries partielles participent à ce résultat par des quantités $r_1, \ldots, r_s$, il vient évidemment

$$P_r^* = \sum_{r_1}\sum_{r_2} \ldots \sum_{r_s} P_{r_1}{}^{(1)} P_{r_2}{}^{(2)} \ldots P_{r_s}{}^{(s)},$$

$$r_i = 0, 1, 2, \ldots;\ r_1 + r_2 + \ldots + r_s = r.$$

D'après la définition de la fonction génératrice, P^*_r est le coefficient de z^r dans le développement de $H^*(z)$ d'après les puissances de z.

En multipliant les fonctions génératrices relatives à $P_r^{(1)}, \ldots, P_r^{(s)}$ entre elles on obtient une fonction dont le développement d'après les puissances de z a pour coefficients les P^*_r. C'est par conséquent la fonction cherchée $H^*(z)$.

VI. L'influence de la non-homogénéité de série en série sur les faits non-corrélatifs.

Eggenberger énonce deux théorèmes relatifs à ce sujet dans son traité. Leur démonstration générale selon sa méthode serait très difficile. Nous allons démontrer tout de suite ses deux théorèmes d'une façon générale et plus brève, en appliquant les théorèmes des fonctions concaves et convexes.

Définition. Si h_1, h_2 sont deux valeurs quelconques de l'intervalle $< a, b >$ et si la relation

$$\frac{\Phi(h_1) + \Phi(h_2)}{2} \geqq \Phi\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

est satisfaite, nous appelons la fonction $\Phi(h)$ convexe, si l'inégalité a le sens inverse, la fonction est concave, dans l'intervalle $< a, b >$.

1⁰ Si $\Phi''(h) \geq 0$ (ou ≤ 0) dans l'intervalle $< a, b >$, $\Phi(h)$ est convexe (ou concave) dans $< a, b >$.

2⁰ Désignons par $(h)_a$ l moyenne $\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} h_i$. Si $\Phi(h)$ est convexe (concave) dans l'intervalle contenant tous les h_i, l'inégalité

$$\Phi\left\{(h)_a\right\} \leqq \left\{\Phi(h)\right\}_a, \text{ (ou } \geqq)$$

est satisfaite.

3⁰ Désignons par $(h)_{va}$ la moyenne $\dfrac{\sum_{i=}^{s} m_i h_i}{\sum_{i=1}^{s} m_i}$. Si $\Phi(h)$ est convexe (ou concave) et continue dans l'intervalle fermée contenant tous les h_i, l'inégalité

$$\Phi\left\{(h)_{va}\right\} \leqq \left\{\Phi(h)\right\}_{va}, \text{ (ou } \geqq)$$

est satisfaite.

La loi de Poisson: $\varphi(h) = \frac{1}{r!} e^{-h} h^r,$

$$\varphi''(h) = \frac{1}{r!} e^{-h} h^{r-2} \left\{(r-h)^2 - r\right\}.$$

Nous allons trouver la condition pour que $\varphi''(h) > 0$ (ou < 0).

$$f(r) = (r-h)^2 - r = \left\{r - \left(h+\frac{1}{2}\right)\right\}^2 - \left\{h+\frac{1}{4}\right\},$$

$$f(r) = 0 \text{ dans le cas, où } r = R_{1,2} = h + \frac{1}{2} \mp \sqrt{h+\frac{1}{4}},$$

$f(r) > 0$, et par conséquent $\varphi''(h) > 0$ dans le point h, si $r < R_1$, ou $r > R_2$,
$f(r) < 0$, et par conséquent $\varphi''(h) < 0$ dans le point h, si $R_1 < r < R_2$.

Il vient alors:

$$\overline{Q_r} = \frac{\sum_{i=1}^{s} m_i \frac{e^{-h_i} h_i^r}{r!}}{\sum_{i=1}^{s} m_i} = \{\varphi(h)\}_{va}, \qquad Q_r = \varphi(h), \quad \text{où } h = (h)_{va}.$$

Le théorème 3⁰ peut être employé seulement dans le cas où $\varphi(h)$ est ou bien convexe, ou bien concave pour toutes les valeurs de h_i. Nous choisirons alors r de la façon à satisfaire à une des relations (*) pour toutes les valeurs de h_i.

$$R_1^{(i)} = h_i + \frac{1}{2} - \sqrt{h_i + \frac{1}{4}}, \qquad R_2^{(i)} = h_i + \frac{1}{2} + \sqrt{h_i + \frac{1}{4}}.$$

Si $r < R_1^{(i)}$ ou bien $r > R_2^{(i)}$ pour tous les i, nous avons $\varphi''(h) > 0$ et par conséquent $\varphi(h)$ est convexe dans l'intervalle contenant tous les h_i. — Si $R_1^{(i)} < r < R_2^{(i)}$, $\varphi(h)$ est concave.

Notation: $r_1 = \min R_1^{(i)}$, $\varrho_1 = \operatorname{Max} R_1^{(i)}$,
$r_2 = \min R_2^{(i)}$, $\varrho_2 = \operatorname{Max} R_2^{(i)}$.

D'après 3⁰: Les inégalités $r > r_1$ ou $r > \varrho_2$ entraînent l'inégalité $\overline{Q_r} > Q_r$, les inégalités $\varrho_1 < r < r_2$ entraînent l'inégalité $\overline{Q_r} < Q_r$.

(Nous avons supprimé les signes d'égalité car nous avons supposé que les valeurs de h_i ne sont pas toutes égales.)

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant: Si nous supprimons la non-homogénéité de série en série dans les faits non-corrélatifs nous obtiendrons pour les valeurs extrèmes les fréquences trop petites, et pour les valeur moyennes les fréquences trop grandes.

L'influence de la non-homogénéité sur les sommes des fréquences.

$$S_r = \sum_{i=0}^{r} Q_i = e^{-h}\left(1 + h + \ldots + \frac{h^r}{r!}\right) = \Phi(h),$$

$$\Phi''(h) = \frac{e^{-h} h^{r-1}}{r!}(h-r) \gtrless 0, \text{ si } h \gtrless r, \; \Phi(h) \text{ est} \begin{cases}\text{concave}\\ \text{convexe}\end{cases}$$

$$\overline{S}_r = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{s} e^{-h_i}\left(1 + h_i + \ldots + \frac{h_i^r}{r!}\right) = \{\Phi(h)\}_a,$$

$$S_r = \frac{1}{r!}e^{-(h)_a} \cdot \{(h)_a\}^r = \Phi\{(h)_a\}.$$

D'après (2⁰):

$\overline{S}_r < S_r$, si Φ est convexe, c'est à dire pour min $h_i > r$,

$\overline{S}_r > S_r$, si Φ est concave, c'est à dire pour Max $h_i < r$.

(A suivre.)

Durchschnittliche Prämienreserve in der Sozialversicherung.

Dr. *A. Zelenka.*

Eine von den wichtigsten, aber auch schwierigsten Aufgaben des Versicherungsmathematikers in der Sozialversicherung ist die Lösung der Frage des Anspruches der Übertretenden Versicherten. Verlässt ein Versicherter seinen bisherigen Versicherungsträger infolge Berufs- oder Gebietswechsel, entsteht begreiflich die Notwendigkeit das Verhältnis zwischen der alten und der neuen Versicherung im Interesse des Versicherten zu regeln. Eine Lösung ergibt sich dadurch, dass der ursprüngliche Versicherungsträger dem folgenden Versicherungsträger einen sog. Ueberweisungsbetrag ausfolgt, den der neue Vorsicherungsträger zur Erhöhung der Anwartschaften des Versicherten benützt. Die Feststellung dieses Ueberweisungsbetrages gehört nun zu den bisher eigentlich noch nicht befriedigend gelösten Problemen.

Der Ueberweisungsbetrag muss von zweierlei Standpunkten beurteilt werden. Für den Versicherten soll er ein Ekvivalent der Anwartschaften, welche ihm durch die Versicherung gewahrt werden, darstellen. Der Versicherungsträger hingegen steht vor der Frage, die Höhe des durch den Austritt des Versicherten freigewordenen Geldes zu bestimmen, in Erwägung, dass einerseits durch den Uebertritt des Versicherten seine Ansprüche gegenüber dem Versicherungsträger erlöschen sollen, andererseits die zukünftigen Prämieneinnahmen entfallen. Für den Versicherungsträger ist auch der Wunsch ausschlaggebend, dass das Kollektiv der sog. „treuen Versicherten" durch die Herausgabe des Ueberweisungsbetrages für die übertretenden Versicherten nicht geschädigt werden darf.

Wäre die Versicherung auf dem Systeme der vollen Deckung durch individuelle Prämien aufgebaut, so würde die Feststellung des Ueberweisungsbetrages keinerlei Schwierigkeiten bereiten, denn die Nettoreserve entspricht dann den beiden Postulaten. Die Sozialversicherung