

# Aktuárské vědy

---

## Literatura

*Aktuárské vědy*, Vol. 2 (1931), No. 4, 209–214

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144555>

## Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## LITERATURA.

**Politická aritmetika;** autorisované vydání přednášek Dr. V. Lenze, Praha 1931. Spolek posluchačů pojistné techniky v Praze vydal za podpory Ústřední vydavatelské komise při českém vysokém učení technickém tyto přednášky v autorisovaném vydání jako první díl přednášek z pojistné matematiky. Při posouzení hodnoty této publikace nutno míti na zřeteli, že autorovi nešlo ani o úplnou učebnici ani o souborné dílo shrnující všechny práce vztahující se k otázkám finančně-aritmetickým, nýbrž jen o studijní pomůcku usnadňující posluchačům pojistné techniky jejich práci. Po stručném úvodu zmiňujícím se o významu úroků se stanoviska národohospodářského a formulujícím zásadní otázky, které náležejí do oboru finanční aritmetiky, dodržují přednášky celkem rozdělení látky, jak je užívané v podobných pracích. Začíná se vysvětlením rozdílu mezi anticipativním a dekursivním úrokováním, načež řeší se některé úlohy o jednom kapitálu při jednoduchém i složitém úrokování. V této partii snad bylo by na místě zmíniti se alespoň o algebraické stránce kontokorentů, což však pravděpodobně autor pomíjí z toho důvodu, že kontokorenty zasahují do oboru přednášek o účetnictví. Velmi obsírně a podrobně, při čemž podrobnost je místy až na újmu rychlé orientaci, probírá autor teorii jistých důchodů. Jednoduchým grafem (str. 50) názorně je dán a objasněn pravý obsah pojmu jistých důchodů jakožto hodnoty určité řady kapitálových částek, splatných v různých termínech, takže posluchač řádně si uvědomující význam tohoto faktu a dostatečně pohotový v algebraickém vyjadřování může již sám snadno řešiti všechny úlohy dále podrobně probírané. Probírá-li přesto autor všechny možné případy, lze to vysvětliti pedagogickými ohledy, neboť na tomto místě u důchodů jistých, tedy početně a pojmově jednodušších, nabude posluchač dostatečné přípravy pro algebraicky obdobné vztahy a formule v životním pojišťování. S touto partií úzce souvisí část jednající o umořovacích plánech, která však zde, podle mého názoru na úkor systematiky, je zařazena až za partii, jednající o výpočtu úrokové míry, před stať, pojednávající o kursu a efektivní úrokové míře zápůjček. Partie o umořovacích plánech velmi výstižně a stručně seznamuje posluchače se všemi otázkami s umořovacími plány souvisejícími a dokazuje praktické zkušenosti autorovy. Pro výpočet efektivní úrokové míry odvozeny jsou všechny běžně používané metody až na metodu iterační, která pro praktické použití je velmi důležitá a které vhodně lze použítí v některých příkladech autorem uváděných. Také metoda Achardova je odvozena příliš stručně, ač jde o věc matematicky i prakticky zajímavou a důležitou. Naproti tomu myslím, že zbytečně je uvedena obdoba Achardovy a Lerchovy metody pro anticipativní úrokování hlavně proto, že anticipativní efektivní úroková míra nemá vůbec praktického významu, neboť v samotném pojmu efektivní úrokové míry je obsažen předpoklad úrokování dekursivního. Velmi obsírná je kapitola, pojednávající o kursu a o efektivní úrokové míře zápůjček, na kterou autor plným právem klade značný důraz, neboť zde skutečně je veliké pole pro uplatnění finanční aritmetiky v praxi. Závěrem připojeny jsou kapitoly o všeobecné teorii úrokování a o stanovení středního úrokového výnosu pojišťovacích ústavů, které drží se v celku obvyklých vzorů. V závěrečných kapitolách mohla by snad také býti zmínka o významu  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$  a o asymptotických výrazech, kterými někteří matematikové snažili se odstraniti rozpor mezi aritmetickou formulí a skutečností.

Přednášky ukazují na mnoha místech dobrý pedagogický postřeh a svědčí o veliké péli a svědomitosti, která jim byla věnována. Přehlednosti neprospívá přemíra velmi podrobných a detailních výkladů věcí samo-

zřejmých, což lze vysvětliti zahrnutím evičení. Určité výklady předpokládají malou pohotovost posluchačů při aplikaci čisté matematiky, která je nezbytným předpokladem pro dobrého aktuára. Dále je nutno upozorniti na určitá nedopatření po stylistické i věcné stránce (na př. rozvoj  $a_n^i$  v řadu na str. 54, pojem konvergence na str. 19 a pod.), která by snadno méně informované čtenáře — pro které jsou přednášky hlavně určeny — mohla svést k mylným představám.

První pokus opatřiti studujícím pojistné techniky aspoň nejnútnejší domácí literaturu je jen vítati a jest si jen přáti, aby na začaté cestě bylo pokračováno. Avšak kompendium politické aritmetiky, které by našim aktuárům dalo bezpečné, správné a úplné vodítko pro jejich práce, čeká stále u nás na svého autora.

Dr. A. Zelenka.

Ugo Cassina: *Calcolo numerico. Con numerosi esempi e note storiche originali.* Zanichelli, Bologna 1928, stran XVII+451.

Autor této knihy, profesor university v Miláně, jest žákem G. Peanovým a kniha jak ve zpracování, tak ve výběru obsahu nese zřetelně vlivy směru Peanova. Můžeme vytknouti celkem tři směrnice, které se tu uplatnily: je to jednak ustavičný zřetel k historickému vývoji jednotlivých problémů, dále snaha od obecných výrazů analytických přejíti cestou co nejkratší k numerickému jejich vyjádření a konečně — problematická směrnice — důsledné používání Peanovy logistické symboliky. Autor formuluje věty a jejich důkazy logisticky podle vzoru Peanova „Formulario matematico“ (ed. V., 1908), a odůvodňuje tento svůj záměr jednak snahou po přesnosti a jednak zřeteli ekonomickými.

V tomto posledním nemohu autora následovat, a to z těchto důvodů: Symbol sám o sobě nezaručuje ani exaktnost ani nesvědčí o zřetelích ekonomických. Exaktnost symbolu (logického nebo matematického) zaručena jest teprve určitou teorií, která vzata jako celek jest správná; to však o Peanově logistice nelze říci. Pokud jde o ekonomické vyjadřování úsudků (logických a matematických), stačí poznamenat, že systém symbolů musí se dáti rychle dešifrovat, čemuž rovněž Peanova logistika odporuje. A konečně: logistika (matematická logika) má své oprávnění teprve při formálním rozboru matematiky; pokud nám jde o konkrétní obsah matematických soudů, jest zcela zbytečná.

Nutno však říci, že tato symbolika není při četbě knihy žádnou podstatnou závadou, protože autor logistické formule vysloví také vždy určitou větou. Kromě toho jest kniha zpracována tak, že stačí čísti toliko určitou její část.

Obsahově kniha jest velmi bohatá na konkrétní počtářské problémy a jest rozdělena na šest kapitol.

Kapitoly I. a II. jsou převážně rázu historického a jsou v nich uvedeny zajímavé příklady z elementárních počtů antických národů. V kap. II. kromě toho jsou různé zkoušky pro početní správnost, stručná zmínka o tabulkách čtverců a delší § o umocňování a odmocňování.

Kap. III. věnována jest početním operacím s čísly neúplnými spolu s různým odhadem chyb, kterých se při tom dopouštíme. Mnoho místa jest věnováno t. zv. „součinu stupně  $n$ -tého ( $n = \text{celé číslo} > 0$ ) dvou čísel reálných  $a, b > 0$ “. Tím se rozumí následující početní operace: Je-li  $a$  libovolné reálné číslo ( $\leq 0$ ), označme symbolem  $V_n a$  číselný úsek hodnoty  $a$ , který obsahuje právě  $n$  desetinných míst ( $V_n a$  vznikne z  $a$ , omezíme-li se na  $n$  míst desetinných). Značí-li  $T_n a = V_n a - V_{n-1} a$ , pak součinem  $n$ -tého stupně čísel  $a, b$  — autor součin ten značí jako  $a \times_n b$  — rozumíme součet všech součinů tvaru  $T_r a \cdot T_s b$ , při čemž  $r + s \leq n$ . Na př.  $3 \cdot 143 \times_2 2 \cdot 111 = 6 \cdot 62$ . Podobně můžeme odstupňovat další početní operace (dělení, loga-

ritmování a pod.). Autor podrobně studuje tyto počtářské obraty a ukazuje na různé jejich výhody. V závěru kapitoly činí zmínku o geodetických počtech a obšírněji vykládá počtářské úlohy, které mají význam pro stanovení různých dob kalendářních. O součinech desetinných pojednáno jest také v krátké kap. IV., v níž jsou diskutovány úlohy o logaritmech a odmocninách.

Matematika pravděpodobně nejvíce zaujmou poslední dvě kapitoly (V. a VI.), které zabírají přes polovinu knihy. Kap. V. obsahuje počtářské úlohy, které se vztahují na nekonečné řady. Není možno na tomto místě podati úplný přehled této zajímavé kapitoly. Připomenou toliko některé stati. Na str. 227—233 zajímavě jest řešen odhad zbytku binomické řady, na str. 237 reprodukováno jest číslo  $e$  na 707 míst desetinných a podrobně propočteny různé potence čísla  $e$ . Velmi důkladně probrány jsou numerické úlohy týkající se funkce  $\log x$  (na str. 281—283 uvedeny jsou adiční logaritmy pod názvem „logaritmy Leonelliovy“),  $\sin x$  a  $\cos x$ , spolu s odhady zbytků příslušných řad. O výpočtu čísla  $\pi$  jsou uvedeny pěkné historické příklady a na str. 312 jest číslo  $\pi$  reprodukováno rovněž na 707 míst desetinných.

Neméně zajímavá jest kap. VI., pojednávající o řešení numerických rovnic (algebraických i transcendentních). Mezi množstvím úplně vyřešených rovnic jsou na př. rovnice  $x^3 - \pi = 0$ , rovnice Peanova  $\sqrt[5]{\pi} \cdot x^3 + \sqrt[3]{\pi} \cdot x^2 + \sqrt{\pi} \cdot x = \pi$ , rovnice pro dělení kruhu, známá rovnice Leonarda Pisanského  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ . Přehledně v § 3 vložena jest t. zv. metoda regula falsi a metoda Newtonova (metodo della corda e delle tangenti). Z rovnic transcendentních jsou diskutovány hlavně různé Eulerovy rovnice, jako  $x - \cos x = 0$ ,  $x^x = 100$ . Dostí podrobně jest vložena problém Keplerův (totiž: je-li dána dráha planety, jest nalézti její polohu na dráze v libovolném okamžiku), odvozena a řešena t. zv. rovnice Keplerova. Postrádáme však výklad o řešení rovnic trinomických pomocí logaritmů adičních (resp. subtrahčních).

Závěrem citována jest obšírnější bibliografie z historie matematiky, z numerického počítání, tabulky, souborná a příležitostná díla. Rejstřík jmenný i věcný vydatně pomáhá v orientaci.

Jak tedy patrně, jest obsah knihy velmi pestrý, a i když není možno ve všem s autorem souhlasit, naleznou se v knize četná místa, která budou se zájmem čtena. (Poznamenávám ještě, že kniha má i svůj pedagogický význam, protože mnohé stati z ní mohou býti vydatně použity již při vyučování matematice na středních školách). Dr. Otomar Pankraz.

## Journal of the Institute of Actuaries, Vol. LXI, Part II.

H. Wickens: **Australian Mortality.** Článek je referátem o úmrtnostních tabulkách australského obyvatelstva, jmenovitě o konstrukci lidových tabulek, odvozených ze sčítání lidu. Zajímavé jest srovnání výsledků s tabulkami pro Anglii a pro Jižní Afriku.

L. K. File: **Disability Benefits in conjunction with Life Insurance Policies.** Autor pojednává o zkušenostech kanadských a severoamerických životních pojišťoven s dodatkovým pojištěním pro případ invalidity. Vývody zde uvedené zasluhují nejvyšší pozornosti našich aktuárů pracujících v životním pojištění, neboť jde zde o jednu z nejdůležitějších otázek vývoje životního pojišťování, která je v nynější době živě diskutována v odborném tisku.

C. F. Wood: **Experiments in modified forms of Select Mortality Tables.** Selekční tabulky jsou konstruovány pravidelně s pěti či desetiletou dobou

selektce, což vede k značnému ztížení jak konstrukce tabulek samotných, tak dalších výpočtů s nimi prováděných. V článku odvozuje z  $O$  tabulek nové tabulky, za předpokladu, že selektce působí jen jeden rok; porovnání premii i rezerv ale ukazuje, že výsledky jsou bližší agregátním tabulkám než původním selekčním. Dále uvažována je možnost, hodnoty  $\sum_k D_{[x]+k}$  vyjádřiti

pomocí čísel  $D_{[x+k]}$  z prvního roku selektce a hodnot  $N_x$  z ultimátních tabulek, a to nejen pro tabulky  $O^{[M]}$ , ale také  $H^{[M]}$ ,  $A^{[M]}$  a  $J^{[M]}$ .

**P. N. Harvey: Notes on the Relative Mortality of Married Men and on an Experiment in forecasting Mortality over a Limited Period.** Srovnáním s cizími zkušenostmi pokouší se autor zjistiti závislost pravděpodobnosti úmrtí na rodinném stavu pro Anglii a Wales. Přímých statistických pozorování není, neboť v obou zemích není povinnosti při úmrtí hlásiti také rodinný stav. V druhé části svého pojednání z koeficientů úmrtnosti  $m_x$  vypočtených pro jednotlivé věkové skupiny a pro jednotlivá léta 1921 až 1928, hledá trend úmrtnosti v jednotlivých věkových skupinách pro věk nad 20 let a jeho pomocí odvozuje pravděpodobné koeficienty úmrtnosti pro sedmiletí 1929—1935. Z výsledků lze usuzovati, že úmrtnost se stále zlepšuje v nižších letech u mužů do 45 let, u žen do 65 let — naproti tomu ve vyšším stáří vzrůstá.

**G. J. Lidstone: Notes on Professor Steffensen's first lecture.** Prof. Steffensen v první své přednášce, konané dne 12. III. 1930 na londýnské universitě, ukázal na několika případech, jak je nutno při aplikacích matematiky přihlížeti k tomu, aby výsledky neobsahovaly kontradikce. Poznámky G. J. Lidstonea někde polemizují, někde doplňují vývody Steffensenovy. A. Z.

### Transactions of the Faculty of Actuaries, Vol. VIII.

**Part VI. The Selection of Lives; L. P. Orr.** Článek jest nově upravená práce z r. 1919; pojednává o vlivu jednotlivých nemocí na zvýšení rizika pojišťovatele. Zajímavá je partie o vlivu tělesné váhy, kde je připojena tabulka průměrných vah mužů s ohledem na věk a na výšku.

**Part VII. Note on the Numerical Evaluation and the Applications of Determinants; G. J. Lidstone.** Elementární úvahy o determinantech a jejich použití.

**Note on the Computation of Determinants; A. C. Aitken.** Pro vyčíslení numericky daných determinantů je velmi výhodná Dodgsonova metoda, která ale není použitelná, když některý potřebný člen nebo minor je roven nule. Aitken pozměňuje Dodgsonovu metodu tak, aby byla použitelná pro všechny případy.

**Note on the Relation between Mortality Tables which have graduated by Makeham's Law. A. E. King.** Pro hodnoty  $a_x$  plynoucí ze dvou tabulek úmrtností vyrovnaných Gomp.-Makehamovou formulí odvozen je vztah  $\bar{a}'_x = \frac{1 - \bar{a}_{r(x+m)}}{r}$ , kde  $r = \frac{\log c'}{\log c}$ ,  $cm = \frac{\log g'}{\log g}$ . Tohoto vztahu je možno výhodně použiti tam, kde jsou dány hodnoty  $\bar{a}_x$  pro několik úrokových měr.

**Note on Decreasing Temporary Assurances with decrement in Geometrical Progression. J. R. Armstrong** dává návod, jak provéstí co nejjednodušší numerické výpočty dočasného pojištění na úmrtí s klesajícími výplatami, tvořícími součet geometrické řady.

**Note on the reconstruction of a given Marriage and Mortality Table to allow for an altered mortality. A. B. Scrimgeour a G. Kellock.** Z tabulky svobodných mužů odvozené Spraguem v XXI. ročníku JIA pro anglickou

šlechtu, udávající jednak odpady úmrtím, jednak odpady oženěním, konstruují autoři novou tabulku za předpokladu dnešní změněné úmrtnosti.

**Part VIII. Notes on Certain Tropical Discases;** A. J. MacCall. Úmrtnost Evropanů v tropických krajích je značně vyšší než v našem podnebí; jeví ale silné zlepšování od počátku tohoto století, kdy byly rozpoznány příčiny a prameny nejnebezpečnějších nemocí. A. Z.

**Giornale dell'Istituto italiano degli attuari.** Ročník I., č. 2.

**Quido Castelnuovo: O problému momentů.** Autor odvozuje nutné a dostačující podmínky pro řešitelnost problému momentů, a sice, na rozdíl od dřívějších úvah Stieltjesových a Hambergerových, pomocí elementárních procesů algebraických, při čemž často používá geometrické interpretace. V článku jsou podrobně probrány všechny případy, které se při řešení problémů momentů mohou vyskytnouti, a které souvisí s určeností nebo neurčeností problému.

**Francesco Tricomi: O rezervách v sociálním pojištění.** V tomto článku rozšiřuje autor své úvahy o výpočtu premií v sociálním pojištění obsažené v předešlém čísle časopisu, na výpočet premiových rezerv pro pojištění invalidního a starobního důchodu.

**Ilarione Romanelli: Povolování periodických lékařských prohlídek pojištěncům.** I v tomto článku pokračuje autor v úvahách o lékařských prohlídkách pojištěnců životních pojišťoven z předešlého čísla časopisu.

**Raffaele Cultrera: Skupinové pojištění.** Autor zabývá se životním pojištěním zaměstnanců jednoho zaměstnavatele, jenž za ně platí premie. Určité předpoklady o vzrůstu pojištěných kapitálů během doby a o výstupu ze služby vedou ke vztahu mezi úhrnem ročních premií v různých dobách. Úvahy jsou provedeny jednak za předpokladu, že se platí stálá roční premie, jednak za předpokladu, že se platí premie přirozená. Konec článku je věnován otázce vztahu mezi úhrnem stálých ročních premií a mezi úhrnem premií přirozených.

**Mosè Jacob: Risiko a spojení v životním pojištění.** Ze vztahu mezi premií na risiko a na spojení a mezi hodnotami těchto premií v pojištění smíšeném a na úmrtí plyne, že přílišným rozšiřováním smíšeného pojištění nabývají pojišťovny více a více rázu spořitelny, při čemž pojištění ztrácí svůj vlastní účel, t. j. pojištění riska. Pro výpočet poměru hodnoty premií na risiko a na spojení k hodnotě celého pojištění odvozuje autor jednoduchý přibližný vzorec, jehož numerické výsledky se velmi dobře shodují s výsledky podle přesného vzorce Tauberova.

**Luigi Lordi: O teorii nashromážděných kapitálů.** V článku řeší se obecný problém stanoviti kapitál, jenž po určitém čase zbývá na jednu osobu daného souboru, jestliže každá z těchto osob platí příspěvky podle určitého zákona vyjádřeného funkcí času, a má, nastane-li okolnost, pro niž je vyloučena ze souboru, nárok na určitou kvotu z kapitálu, jenž se za ni nashromáždil.

**Ettore del Vecchio: Vlastnost týkající se průměru nejobecnějších náhodných proměnných.** Autor zabývá se vztahem řady náhodných proměnných k jejich středním hodnotám, resp. k jejich mezní hodnotě.

**Giornale dell'Istituto italiano degli attuari.** Ročník II., čís. 1.

**Paul Lévy: O zákonu velkých čísel.** Autor podává jednoduchý důkaz určité věty Khintchinovy, týkající se zákona velkých čísel.

**Maurice Fréchet: Zobecnění nerovnin Bienayméovy.** Nerovнина Bienayméova, jejíž zobecnění a zpřesnění autor provádí, týká se vztahu mezi střední hodnotou a střední kvadratickou odchylkou náhodné proměnné.

**Carmela di Stefano: O momentech frekvenční funkce.**

**Ilarione Romanelli: První šetření o váze v poměru k výšce a k stáří pojištěnců pojišťovny Istituto Nazionale delle Assicurazioni.**

**Quido Tognoli: Rísiko a spojení v životním pojištění.** Autor ve svých úvahách navazuje na článek Jacobův z předešlého čísla tohoto časopisu.

**Frederico Zalai: O vztahu mezi ziskem z úročení a pojištnou prémie.**

**Ettore del Vecchio: Zákon o rozdělení důchodu.**

**Pacifico Mazzoni: Příspěvek ke studiu populace.** Autor odvozuje vztah mezi obecnými funkcemi vyjadřujícími počet obyvatelstva s ohledem na stáří, počet narozených a hodnotu životního důchodu při vhodně volené úrokové míře a zabývá se podrobně speciálním případem, kdy počet narozených v době  $t$   $\varphi(t)$  je dán výrazem

$$\varphi(t) = a + bc^t + dg^t.$$

Na konci článku upravuje autor předchozí vzorec s ohledem na vystěhovalectví a přistěhovalectví.

**Mosè Jacob: O rozvoji určité frekvenční funkce v řadu Hermiteových polynomů.** V článku jest odvozen rozvoj funkce v Charlierovu řadu  $A$  v bodech, kde tato funkce je nespojitá.

**Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari. Ročník II., č. 2.**

**Paul Lévy: Nové vzorce týkající se hry „hlava — orel“.** Teorii této hry věnoval Borel ve svém „*Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications*“ celou kapitolu; Lévy odvozuje několik nových výsledků, při čemž používá metody „aritmických trojúhelníků“, jež jsou analogické trojúhelníkům Pascalovým.

**V. Romanovsky: O mnohonásobných regresích.** Autor odvozuje regresní rovnice při mnohonásobné regresi použitím interpolační metody Čebyševovy.

**Alf Guldberg: O binomické frekvenční funkci.** V článku pojednává se o třech druzích frekvenčních funkcí, funkci binomické, Poissonově a Pascalově. Autor ukazuje, jak lze snadno počítati momenty těchto funkcí pomocí diferenčních rovnic, a jak lze stanoviti, dá-li se daná statistická řada vyjádřiti pomocí některé z těchto funkcí.

**Ilarione Romanelli: Úmrtnost sebevraždou u pojištěnců pojišťovny „Istituto Nazionale delle Assicurazioni“ v desetiletí 1920—1929.**

**Mosè Jacob: O výpočtu prémie pro dva spojené životy.**

**Carlo Alberto dell'Agnola: O rozštěpitelných zákonech kapitalisace.**

**Guido Santacroce: O určitém způsobu výpočtu hodnoty některých významných pojištění několika spojených životů.**

**Pietro Smolensky: Boj proti konkurenčním výstřelkům v životním pojištění.**

**K. G. Hagstroem: O pojmu úspory.**

**Franco Savorgnan: Metodologické úvahy týkající se měření endogamle.** Článek jest věnován studiu kontingenční tabulky vyjadřující míšení dvou populací prostřednictvím sňatků.

**Tullio Bagni: O ceně majetku.** Autor podává vybrané partie z knih Irvinga Fishera: „*Elementary principles of Economics*“ a „*The nature of capital and income*“ a připojuje k nim různé poznámky a aplikace.