Aktuárské vědy

Stefan Vajda

Anwendung einiger Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Berechnung der Prämien mehrerer Versicherungskombinationen

Aktuárské vědy, Vol. 2 (1931), No. 3, 144–157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144548

$$\times \frac{\Gamma(n+m+2)\,\Gamma(s)}{\Gamma\left(\overline{s-1}-\frac{n+1}{n+m+2}\,\overline{s-1}+1-\frac{x}{\omega}\right)\Gamma(n+m+s+1)}$$

$$\varphi_\lambda(n, m, x = \frac{\left(s-1-\frac{n+1}{n+m+2}\,\overline{s-1}+m+1-\frac{x}{\omega}\,,\,\lambda\right)}{(n+1,\lambda)\,(m+1,\lambda)} \times$$

$$\times \frac{\left(\frac{n+1}{n+m+2}\,\overline{s-1}-\lambda+1+\frac{x}{\omega}\,,\,\lambda\right)(n+m+2,\,2\lambda)}{(n+m+s+1,\lambda)\,(s-\lambda,\lambda)}\,.$$

(To be continued.)

Anwendung einiger Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Berechnung der Prämien mehrerer Versicherungskombinationen.

Von Dr. phil. *Stefan Vajda* in Wien.

Einleitung.

Die Nettoprämie für eine gemischte Versicherung wird bekanntlich so berechnet, dass die Prämienzahlungen einer bestimmten Anzahl von Versicherten gerade ausreichen, um alle Auszahlungen der Gesellschaft zu decken, wenn in jedem Versicherungsjahre gerade die aus der Sterbetafel entnommene wahrscheinlichste Anzahl von Todesfällen eintritt und die Verzinsung den Annahmen entspricht.

Es ist nun naheliegend, nach der Prämie zu fragen, die sich ergibt, wenn wir nicht nur für jedes Jahr die wahrscheinlichste Anzahl von Todesfällen betrachten, sondern alle überhaupt möglichen Verteilungen der Todesfälle auf die einzelnen Jahre berücksichtigen, wobei jede Kombination mit ihrer Wahrscheinlichkeit in die Rechnung eingeführt wird. Es zeigt sich für die gemischte Versicherung, dass sich auf beide Arten dieselbe Prämie ergibt. (Den Beweis hiefür wiederholen wir kurz in unserem ersten Kapitel.)

Fassen wir die einzelnen Kombinationen mit ihren Wahrscheinlichkeiten als Abweichungen von derjenigen Kombination auf, die wir bei der ersten Art der Berechnung als einzige berücksichtigen, so sehen wir in der zweiten Art der Berechnung den Beginn einer risikotheoretischen Betrachtungsweise.*)

---

*) Vgl. hiezu O. Gruder, Zur Theorie des Risikos. 9. intern. Kongress. D III (1), besonders S. 228, 2. Absatz.

In unseren weiteren Kapiteln wollen wir diese Betrachtungsweise auf kompliziertere Versicherungsarten ausdehnen.

Wir führen nun die Hilfssätze an, die wir im Folgenden verwenden werden. Es sind dies die Sätze:

$$\sum_{c_1=0}^{s} \cdots \sum_{c_n=0}^{s} \frac{s!}{c_1!\, c_2! \ldots c_n!} q_1^{c_1} \ldots q_n^{c_n} = 1, \tag{I}$$

$$c_1 + \ldots + c_n = s \qquad q_1 + \ldots + q_n = 1.$$

Dies folgt aus dem polynomischen Lehrsatz, denn nach diesem ist die rechte Seite der obigen Gleichung

$$(q_1 + \ldots + q_n)^s = 1^s = 1.$$

Ein Spezialfall dieses Satzes ($n = 2$) ist der Satz

$$\sum_{c=0}^{s} \binom{s}{c} q^c (1-q)^{s-c} = 1. \tag{Ia}$$

Nun untersuchen wir den Ausdruck

$$\sum_{c_1=0}^{s} \cdots \sum_{c_n=0}^{s} \frac{s!}{c_1! \ldots c_n!} q_1^{c_1} \ldots q_n^{c_n} c_i,$$

den wir auch so schreiben können (da c_i als Faktor auftritt und daher das Glied mit $c_i = 0$ verschwindet):

$$\sum_{c_1=0}^{s-1} \cdots \sum_{c_i=1}^{s} \cdots \sum_{c_n=0}^{s-1} \frac{(s-1)!\, s}{c_1! \ldots (c_i-1)! \ldots c_n!} q_1^{c_1} \ldots q_i^{c_i} \ldots q_n^{c_n}.$$

Wir führen als neue Veränderliche c'_i ein: $c'_i = c_i - 1$

$$s q_i \sum_{c_1=0}^{s-1} \cdots \sum_{c'_i=0}^{s-1} \cdots \sum_{c_n=0}^{s-1} \frac{(s-1)!}{c_1! \ldots c'_i! \ldots c_n!} q_1^{c_1} \ldots q_i^{c'_i} \ldots q_n^{c_n} = s q_i (q_1 + \ldots + q_n)^{s-1}$$

oder

$$\sum_{c_1=0}^{s} \cdots \sum_{c_n=0}^{s} \frac{s!\, c_i}{c_1! \ldots c_n!} q_1^{c_1} \ldots q_n^{c_n} = s\, q_i. \tag{II}$$

Ein Spezielfall dieses Satzes ist wieder

$$\sum_{c=1}^{s} \binom{s}{c} q^c (1-q)^{s-c} c = sq. \tag{IIa}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von $m^b n^{c+t-b}$ in der binomischen Entwicklung von

$$(m+n)^{c+t} = (m+n)^c\,(m+n)^t$$

ergibt sich bekanntlich

$$\sum_{a=0}^{c} \binom{c}{a}\binom{t}{b-a} = \binom{c+t}{b}. \tag{III}$$

Durch zweimalige Verwendung des Satzes

$$\binom{c}{a}\,a = \binom{c-1}{a-1}\,c \text{ für } a \geqq 1$$

erhalten wir hieraus

$$\sum_{a=1}^{c} \binom{c}{a}\binom{t}{b-a}\,a = \sum_{a=1}^{c} c\binom{c-1}{a-1}\binom{t}{b-a} = c\binom{c+t-1}{b-1} = \frac{cb}{c+t}\binom{c+t}{b}. \tag{IV}$$

Aus letzterer Gleichung folgt sofort

$$\begin{aligned}\sum_{a=d}^{c+d} \binom{c}{a-d}\binom{t}{b-a}\,a &= \sum_{a=d}^{c+d} \binom{c}{a-d}\binom{t}{b-a}(a-d+d) = \\ &= \binom{c+t}{b-d}\frac{(b-d)\,c}{c+t} + \binom{c+t}{b-d}\,d = \binom{c+t}{b-d}\frac{bc+dt}{c+t}.\end{aligned} \tag{IV'}$$

1. Kapitel.

Die Prämie der gemischten Versicherung auf ein Leben.

Es sei q_i die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen, im i-ten Versicherungsjahre zu sterben. Wir untersuchen eine gemischte Versicherung mit der Dauer n und betrachten daher das Erleben des Endes des n-ten Jahres ebenfalls als „Sterbefall“. Dann gilt

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$$

und $1 - q_1 - \ldots - q_{i-1}$ ist die Wahrscheinlichkeit, den Beginn des i-ten Versicherungsjahres zu erleben.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($a_1 + \ldots + a_n = s$) die Anzahlen der in den einzelnen Jahren Sterbenden angibt, wenn s x-jährige Personen zugleich die erwähnte Versicherung abschliessen, ist

$$\frac{s!}{a_1!\ldots a_n!}\,q_1^{a_1}\ldots q_n^{a_n}.$$

Wie gross ist nun der Gewinn (Verlust) der Gesellschaft bei dieser Kombination der Anzahl der Sterbefälle?

Wenn jeder Versicherte am Beginn eines jeden Jahres, falls er noch lebt, die Prämie P bezahlt, dann ist der Barwert der Leistungen eines

Versicherten, der im i-ten Jahre stirbt,

$$P(1 + v + \ldots + v^{i-1}) = P\frac{v^i - 1}{v - 1}$$

der Barwert der Zahlung der Gesellschaft, die am Ende seines Sterbejahres den Betrag Eins zahlt, ist v^i. Der Gewinn der Gesellschaft ist daher bei diesem Versicherten

$$g_i = P\frac{v^i - 1}{v - 1} - v^i,$$

wobei ein Verlust, wie üblich, als negativer Gewinn betrachtet wird.

Der Gewinn der Gesellschaft an allen Versicherten ist daher bei der eben betrachteten Versicherungskombination

$$a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n.$$

Der Erwartungswert aller möglichen Gewinne ist also

$$G = \sum_{a_1} \cdots \sum_{a_n} \frac{s!}{a_1! \ldots a_n!} q_1^{a_1} \ldots q_n^{a_n} (a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n)$$

$$a_1 + \ldots + a_n = s.$$

Unser Hilfssatz (II) gibt sofort

$$G = s(g_1 q_1 + \ldots + g_n q_n)$$

oder

$$G = sP\left(q_1\frac{v-1}{v-1} + \ldots + q_n\frac{v^n - 1}{v-1}\right) - s(q_1 v + \ldots + q_n v^n).$$

Soll nun, dem Äquivalenzprinzip entsprechend, $G = 0$ sein, dann muss P so bestimmt werden, dass

$$P = \frac{q_1 v + q_2 v^2 + \ldots + q_n v^n}{q_1 + q_2(1 + v) + \ldots + q_n(1 + \ldots + v^{n-1})} =$$

$$= \frac{q_1 v + q_2 v^2 + \ldots + q_n v^n}{1 + v(1 - q_1) + \ldots + v^{n-1}(1 - q_1 - \ldots - q_{n-1})}.$$

Also erhalten wir die gewöhnliche Form für die Prämie der gemischten Versicherung.*)

Bemerkungen zu den folgenden Kapiteln.

In den folgenden Kapiteln behandeln wir Versicherungen auf verbundene Leben. Hier treten neue wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme auf, denen wir uns jetzt zuwenden wollen.

*) Vgl. hiezu St. Vajda, Über das Äquivalenzprinzip. Zeitschr. f. d. ges. Vers.-wiss. Bd. 29, Heft 2. (1929.) Beilage.

Wir halten uns an die typischen Betrachtungen des Urnenschemas und stellen uns vor, wir hätten zwei Urnen, die eine mit A Kugeln, die zweite mit B Kugeln gefüllt. Die Kugeln seien mit Nummern versehen, wobei je 2 Kugeln derselben Urne verschiedene Nummern haben sollen. Es gebe p Nummern, die in beiden Urnen vorkommen, während die restlichen $A-p$ und $B-p$ Nummern sämtlich voneinander verschieden seien.

Nun werden aus der Urne mit A Kugeln a beliebige, aus der andern b beliebige Kugeln gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den a Kugeln genau c_1 von den p ursprünglich gleich bezeichneten vorkommen, ist dann

$$\frac{\binom{p}{c_1}\binom{A-p}{a-c_1}}{\binom{A}{a}}. \tag{a}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen c_1 noch genau c unter den b aus der andern Urne gezogenen vorkommen, ist

$$\frac{\binom{c_1}{c}\binom{B-c_1}{b-c}}{\binom{B}{c}}.$$

Es ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den gezogenen $a+b$ Kugeln genau c Nummern in beiden Gruppen vorkommen, wobei die Zahl c_1 gleichgültig sein soll,

$$\sum_{c_1}\binom{P}{c_1}\binom{c_1}{c}\binom{A-p}{a-c_1}\binom{B-c_1}{b-c} : \binom{A}{a}\binom{B}{b}. \tag{b}$$

Wenn wir nun s Paare von Versicherten betrachten und zwar je s x-jährige Männer und y-jährige Frauen, die einander als verbundene Leben zugeordnet sind, so haben wir Aufgaben vor uns, die dem obigen Schema entsprechen.

Es seien nach i Jahren $s-a_1-\ldots-a_i\,(=A)$ Männer und $s-b_1-\ldots-b_i\,(=B)$ Frauen vorhanden. Unter diesen seien $s-$ $-a_1-\ldots-a_i\,(=p)$ Paare intakt. Wenn nun nach einem weiteren Jahre noch $s-a_1-\ldots-a_i-a_{i+1}\,(=a)$ Männer und $s-b_1-\ldots$ $\ldots-b_{i+1}\,(=b)$ Frauen leben, so ist der Fall, dass unter den noch lebenden Männern c_{i+1} von denen vorhanden sind, die im Vorjahre zu den damals intakten Paaren gehört haben (Formel a!), gleichbedeutend damit, dass $s-a_1-\ldots-a_i-c_{i+1}$ Auszahlungen von Seiten der Gesellschaft stattfinden, wenn es sich um eine einseitige Überlebensversicherung handelt, wobei das Kapital zur Auszahlung gelangt, wenn die Frau zu Beginn des Sterbejahres des Mannes noch lebt. Andrerseits ist der Fall, dass nach $i+1$ Jahren noch $s-\alpha_1-\ldots-\alpha_i-\alpha_{i+1}$ Paare intakt sind (Gleichung b!), gleichbedeutend damit, dass a_{i+1} Auszahlungen stattfinden, wenn es sich um eine gemischte Versicherung auf 2 verbundene Leben handelt.

2. Kapitel.

Die Prämie der gemischten Versicherung auf zwei Leben.

Wir betrachten die eben erwähnten s Paare von Männern und Frauen und führen analoge Überlegungen zu denen des ersten Kapitels durch.

Es sei w_i die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Mann, im i-ten Versicherungsjahre zu sterben und u_i dieselbe Wahrscheinlichkeit für eine y-jährige Frau. Bezüglich des Erlebens des Ablaufes der Dauer n gelte dieselbe Bemerkung wie bei der gemischten Versicherung auf ein Leben.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Folgen $a_1, a_2, \ldots a_n$ $(a_1 + \ldots \ldots + a_n = s)$ und

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$
$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_n = s)$$

die Anzahlen der in den einzelnen Jahren sterbenden Männer und Frauen angeben, ist

$$\frac{s!}{a_1!\, a_2! \ldots a_n!} \frac{s!}{b_1!\, b_2! \ldots b_n!} w_1^{a_1} \ldots w_n^{a_n} u_1^{b_1} \ldots u_n^{b_n}.$$

Wenn jedes noch intakte Paar am Beginne eines jeden Jahres die Prämie P bezahlt, dann ist der Barwert des Gewinnes der Gesellschaft an einem Paare, das im i-ten Jahre aufgelöst wird,

$$g_i = P \frac{v^i - 1}{v - 1} - v^i.$$

Der Gewinn der Gesellschaft ist daher, wenn im ersten Jahre α_1, im zweiten Jahre α_2, im i-ten Jahre α_i Paare aufgelöst werden,

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n.$$

Wir müssen nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass, bei einer bestimmten Annahme über die Folgen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gerade $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, die Anzahlen der in den einzelnen Jahren aufgelösten Paare angibt.

Wenn bis zum Beginn des i-ten Jahres $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i-1}$ Paare bereits aufgelöst sind, dann erhalten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im i-ten Jahre α_i Paare aufgelöst werden, aus Formel (b), wenn wir setzen

$$A = s - a_1 - \ldots - a_{i-1}, \qquad a = s - a_1 - \ldots a_{i-1} - a_i,$$
$$B = s - b_1 - \ldots b_{i-1}, \qquad b = s - b_1 - \ldots - b_{i-1} - b_i,$$

$$p = s - \alpha_1 - \dots - \alpha_{i-1},$$
$$c = s - \alpha_1 - \dots - \alpha_{i-1} - \alpha_i.$$

Es ist demnach die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

im ersten Jahre a_1 Männer und b_1 Frauen,
im zweiten Jahre a_2 Männer und b_2 Frauen,
. . . .
im n-ten Jahre a_n Männer und b_n Frauen,

sterben und die Verteilung dieser Sterbefälle dazu führt, dass dadurch

im ersten Jahre α_1
im zweiten Jahre α_2
. . . .
im n-ten Jahre α_n Paare aufgelöst werden,

$$\frac{s!}{a_1! \dots a_n!} \frac{s!}{b_1! \dots b_n!} w_1^{a_1} \dots w_n^{a_n} u_1^{b_1} \dots u_n^{b_n} \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{c_1} \binom{s}{c_1} \binom{c_1}{s - \alpha_1} \binom{s - s}{s - a_1 - c_1} \binom{s - c_1}{\alpha_1 - b_1}}{\binom{s}{s - a_1} \binom{s}{s - b_1}} \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{c_2} \binom{s - \alpha_1}{c_2} \binom{c_2}{s - \alpha_1 - \alpha_2} \binom{\alpha_1 - a_1}{s - a_1 - a_2 - c_2} \binom{s - b_1 - c_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - b_1 - b_2}}{\binom{s - a_1}{s - a_1 - a_2} \binom{s - b_1}{s - b_1 - b_2}} \dots$$

$$\dots \frac{\sum\limits_{c_n} \binom{s - \dots - \alpha_{n-1}}{c_n} \binom{c_n}{0} \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} - a_1 \dots - a_{n-1}}{0 - c_n}}{\binom{a_n}{0} \binom{b_n}{0}} \times$$

$$\times \binom{s - b_1 - \dots - b_{n-1} - c_n}{0}.$$

Wir haben hier, wie schon in (b), die Grenzen für die Summe über die c_i nicht angeschrieben, da die Summierung einfach für alle jene Werte durchzuführen ist, für welche die Binomialkoeffizienten nicht verschwinden.

Um den Erwartungswert des Gewinnes zu bestimmen, haben wir diesen Ausdruck mit

$$\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$$

zu multiplizieren und über

$$\alpha_1, \dots \alpha_n, \; a_1 \dots a_n, \; b_1, \dots b_n$$

zu summieren. Auch hier brauchen wir die Grenzen der α_i nicht anzugeben, da für sie dieselbe Bemerkung gilt.

Dasselbe gilt auch dann noch, wenn wir wie folgt neue Veränderliche einführen

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_i; \quad \alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1}.$$

Schreiben wir noch

$$a_1 + \ldots + a_i = \bar{a}_i; \quad b_1 + \ldots + b_i = \bar{b}_i$$

so erhalten wir

$$G = \sum_{a_1} \cdots \sum_{a_n} \sum_{b_1} \cdots \sum_{b_n} \frac{s!}{a_1! \ldots a_n!} \frac{s!}{b_1! \ldots b_n!} w_1^{a_1} \ldots w_n^{a_n} u_1^{b_1} \ldots u_n^{b_n} \times$$

$$\times \sum_{c_1} \sum_{\beta_1} \cdots \sum_{c_n} \sum_{\beta_n},$$

$$\frac{\binom{s}{c_1} \binom{0}{s - \bar{a}_1 - c_1} \binom{c_1}{s - \beta_1} \binom{s - c_1}{\beta_1 - \bar{b}_1}}{\binom{s}{s - \bar{a}_1} \binom{s}{s - \bar{b}_1}} \times$$

$$\times \frac{\binom{s - \beta_1}{c_2} \binom{\beta_1 - \bar{a}_1}{s - \bar{a}_2 - c_2} \binom{c_2}{s - \beta_2} \binom{s - \bar{b}_1 - c_2}{\beta_2 - \bar{b}_2}}{\binom{s - \bar{a}_1}{s - \bar{a}_2} \binom{s - \bar{b}_1}{s - \bar{b}_2}} \cdots$$

$$\cdots \frac{\binom{s - \beta_{n-1}}{c_n} \binom{\beta_{n-1} - \bar{a}_{n-1}}{s - \bar{a}_n - c_n} \binom{c_n}{s - \beta_n} \binom{s - \bar{b}_{n-1} - c_n}{\beta_n - \bar{b}_n}}{\binom{s - \bar{a}_{n-1}}{s - \bar{a}_n} \binom{s - \bar{b}_{n-1}}{s - \bar{b}_n}} \times$$

$$\times [\beta_1 (g_1 - g_2) + \ldots + \beta_{n-1} (g_{n-1} - g_n) + \beta_n g_n.$$

Wir betrachten den in dieser mehrfachen Summe vorkommenden Ausdruck

$$\sum_{c_1} \sum_{\beta_1} \cdots \sum_{c_n} \sum_{\beta_n} \frac{\binom{s}{c_1} \binom{0}{s - \bar{a}_1 - c_1} \binom{c_1}{s - \beta_1} \binom{s - c_1}{\beta_1 - \bar{b}_1}}{\binom{s}{s - \bar{a}_1} \binom{s}{s - \bar{b}_1}} \cdots$$

$$\cdots \frac{\binom{s - \beta_{n-1}}{c_n} \binom{\beta_{n-1} - \bar{a}_{n-1}}{s - \bar{a}_n - c_n} \binom{c_n}{s - \beta_n} \binom{s - \bar{b}_{n-1} - c_n}{\beta_n - \bar{b}_n}}{\binom{s - \bar{a}_{n-1}}{s - \bar{a}_n} \binom{s - \bar{b}_{n-1}}{s - \bar{b}_n}} \beta_i,$$

den wir X_i nennen wollen.

Durch mehrmalige Anwendung des Satzes (III) wird aus diesem Ausdruck

$$\sum_{c_1}\sum_{\beta_1}\cdots\sum_{c_i}\sum_{\beta_i}\frac{\binom{s}{c_1}\binom{0}{s-\overline{a}_1-c_1}\binom{c_1}{s-\beta_1}\binom{s-c_1}{\beta_1-\overline{b}_1}}{\binom{s}{s-\overline{a}_1}\binom{s}{s-\overline{b}_1}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\binom{s-\beta_{i-1}}{c_i}\binom{\beta_{i-1}-\overline{a}_{i-1}}{s-\overline{a}_i-c_i}\binom{c_i}{s-\beta_i}\binom{s-\overline{b}_{i-1}-c_i}{\beta_i-\overline{b}_i}}{\binom{s-\overline{a}_{i-1}}{s-\overline{a}_i}\binom{s-\overline{b}_{i-1}}{s-\overline{b}_i}}\beta_i.$$

Durch Anwendung des Satzes (IV′) bezüglich β_i wird hieraus zunächst

$$X_i=\sum_{c_1}\sum_{\beta_1}\cdots\sum_{c_i}\frac{\binom{s}{c_1}\binom{0}{s-\overline{a}_1-c_1}\binom{c_1}{s-\beta_1}\binom{s-c_1}{\beta_1-\overline{b}_1}}{\binom{s}{s-\overline{a}_1}\binom{s}{s-\overline{b}_1}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\binom{s-\beta_{i-1}}{c_i}\binom{\beta_{i-1}-\overline{a}_{i-1}}{s-\overline{a}_i-c_i}}{\binom{s-a_{i-1}}{s-a_i}}\,\frac{\overline{b}_i c_i+s\,(s-\overline{b}_{i-1}-c_i)}{s-\overline{b}_{i-1}}=$$

$$=\sum_{c_1}\sum_{\beta_1}\cdots\sum_{c_i}\frac{\binom{s}{c_1}\binom{0}{s-\overline{a}_1-c_1}\binom{c_1}{s-\beta_1}\binom{s-c_1}{\beta_1-\overline{b}_1}}{\binom{s}{s-\overline{a}_1}\binom{s}{s-\overline{b}_1}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\binom{s-\beta_{i-1}}{c_i}\binom{\beta_{i-1}-\overline{a}_{i-1}}{s-\overline{a}_i-c_i}}{\binom{s-\overline{a}_{i-1}}{s-\overline{a}_i}}\left[\frac{(\overline{b}_i-s)\,c_i}{s-\overline{b}_{i-1}}+s\right].$$

Durch Anwendung des Satzes (IV) bezüglich der Summierung über c_i und des Satzes (III) wie früher erhalten wir

$$X_i=\sum_{c_1}\sum_{\beta_1}\cdots\sum_{c_{i-1}}\sum_{\beta_{i-1}}\frac{\binom{s}{c_1}\binom{0}{s-\overline{a}_1-c_1}\binom{c_1}{s-\beta_1}\binom{s-c_1}{\beta_1-\overline{b}_1}}{\binom{s}{s-\overline{a}_1}\binom{s}{s-\overline{b}_1}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\binom{s-\beta_{i-2}}{c_{i-1}}\binom{\beta_{i-2}-\bar{a}_{i-2}}{s-\bar{a}_{i-1}-c_{i-1}}\binom{c_{i-1}}{s-\beta_{i-1}}\binom{s-\bar{b}_{i-2}-c_{i-1}}{\beta_{i-1}-\bar{b}_{i-1}}}{\binom{s-\bar{a}_{i-2}}{s-\bar{a}_{i-1}}\binom{s-\bar{b}_{i-2}}{s-\bar{b}_{i-1}}}\times$$

$$\times\left[-\frac{(s-\bar{a}_i)(s-\bar{b}_i)}{(s-\bar{a}_{i-1})(s-\bar{b}_{i-1})}(s-\beta_{i-1})\right]+s$$

oder

$$X_i-s=\frac{(s-\bar{a}_i)(s-\bar{b}_i)}{(s-\bar{a}_{i-1})(s-\bar{b}_{i-1})}\times$$

$$\times\left[\sum_{c_1}\sum_{\beta_1}\cdots\sum_{c_{i-1}}\sum_{\beta_{i-1}}\frac{\binom{s}{c_1}\binom{0}{s-\bar{a}_1-c_1}\binom{c_1}{s-\beta_1}\binom{s-c_1}{\beta_1-\bar{b}_1}}{\binom{s}{s-\bar{a}_1}\binom{s}{s-\bar{b}_1}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\frac{\binom{s-\beta_{i-2}}{c_{i-1}}\binom{\beta_{i-2}-\bar{a}_{i-2}}{s-\bar{a}_{i-1}-c_{i-1}}\binom{c_{i-1}}{s-\beta_{i-1}}\binom{s-\bar{b}_{i-2}-c_{i-1}}{\beta_{i-1}-\bar{b}_{i-1}}}{\binom{s-\bar{a}_{i-2}}{s-\bar{a}_{i-1}}\binom{s-\bar{b}_{i-2}}{s-\bar{b}_{i-1}}}\beta_{i-1}-s.\right]$$

Nennen wir für einen Augenblick

$$\frac{(s-\bar{a}_i)(s-\bar{b}_i)}{(s-\bar{a}_{i-1})(s-b_{i-1})}=\mu_i,$$

so haben wir also folgende Rekursionsformel gewonnen

$$X_i-s=\mu_i\,(X_{i-1}-s).$$

Das heisst

$$X_i-s=(X_1-s)\,\mu_1\mu_2\ldots\mu_i.$$

Da $X_1=s-s\mu_1$ oder $X_1-s=-s\mu_1$ ist, so gilt

$$X_i=s\,(1-\mu_1\mu_2\ldots\mu_i)=s\left(1-\frac{(s-\bar{a}_i)(s-\bar{b}_i)}{s\,.\,s}\right).$$

Wir erhalten demnach für G den Ausdruck

$$G=\sum_{a_1}\cdots\sum_{a_n}\sum_{b_1}\cdots\sum_{b_n}\frac{s!}{a_1!\ldots a_n!}\,\frac{s!}{b_1!\ldots b_n!}\,w_1^{a_1}\ldots w_n^{a_n}\,u_1^{b_1}\ldots u_n^{b_n}\times$$

$$\times\, s\sum_{i=1}^{n}(g_i-g_{i+1})\left(1-\frac{(s-\bar{a}_i)(s-\bar{b}_i)}{s^2}\right)$$

$$(g_{n+1}=0).$$

Satz (II) gibt

$$G = \sum_{a_1} \cdots \sum_{a_n} \frac{s!}{a_1! \ldots a_n!} w_1^{a_1} \ldots w_n^{a_n} \, s \sum_{i=1}^{n} (g_i - g_{i+1}) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{(s - \bar{a}_i)(1 - u_1 - \ldots - u_i)}{s}\right) =$$

$$= s \sum_{i=1}^{n} (g_i - g_{i+1}) \left[1 - (1 - w_1 - \ldots - w_i)(1 - u_1 - \ldots - u_i)\right] =$$

$$= s \sum_{i=1}^{n} g_i \left[(1 - w_1 - \ldots - w_{i-1})(1 - u_1 - \ldots - u_{i-1}), \right.$$

$$\left. - (1 - w_1 - \ldots - w_i)(1 - u_1 - \ldots - u_i)\right]$$

und dies ist, wie man sofort sieht, die gewöhnliche Formel für die Prämie der gemischten Versicherung auf zwei Leben, wenn wir noch für g_i seinen Wert setzen und G verschwinden lassen.

3. Kapitel.

Die Prämie der einseitigen Überlebensversicherung.

Wir betrachten noch einmal den Ausdruck (1) des vorigen Kapitels. Wenn wir zunächst von der Summierung über die c_i absehen, so haben wir die Wahrscheinlichkeit vor uns, dass die eintretenden Ereignisse durch die Folgen

$$\begin{array}{ll} a_1, \ldots, a_n & b_1, \ldots, b_n \\ c_1, \ldots, c_n & \alpha_1, \ldots, \alpha_n \end{array}$$

beschrieben werden.

Wenn wir diesen Ausdruck mit

$$\gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_n g_n$$

multiplizieren, wobei γ_i irgendeine Funktion dieser Grössen ist, und über alle diese Grössen summieren, so erhalten wir den allgemeinsten Ausdruck für den Erwartungswert des Gewinnes der Gesellschaft bei einer Versicherung, deren Auszahlungsbedingungen irgendwie an das Absterben von $2s$ Personen, die in s Paare geordnet sind, geknüpft sind. Im vorigen Kapitel war einfach $\gamma_i = \alpha_i$. In unserem, komplizierteren Falle haben wir den Bemerkungen der Einleitung zu diesen beiden Kapiteln entsprechend $\gamma_i = s - \beta_{i-1} - c_i$ zu setzen, wobei es dieselbe Bedeutung hat wie im vorigen Kapitel.

Wir bilden den Ausdruck

$$\sum_{c_1} \sum_{\beta_1} \cdots \sum_{c_n} \sum_{\beta_n} \frac{\binom{s}{c_1} \binom{o}{s - \bar{a}_1 - c_1} \binom{c_1}{s - \beta_1} \binom{s - c_1}{\beta_1 - \bar{b}_1}}{\binom{s}{s - \bar{a}_1} \binom{s}{s - \bar{b}_1}} \cdots$$

$$\ldots\frac{\binom{s-\beta_{n-1}}{c_n}\binom{\beta_{n-1}-\overline{a}_{n-1}}{s-\overline{a}_n-c_n}\binom{c_n}{s-\beta_n}\binom{s-\overline{b}_{n-1}-c_n}{\beta_n-\overline{b}_n}}{\binom{s-\overline{a}_{n-1}}{s-\overline{a}_n}\binom{s-\overline{b}_{n-1}}{s-\overline{b}_n}}\,c_i,$$

den wir Y_i nennen wollen.

Wenn wir ihn so behandeln, wie früher den Ausdruck X_i, so erhalten wir zunächst

$$\sum_{c_1}\sum_{\beta_1}\cdots\sum_{c_i}\sum_{\beta_i}\frac{\binom{s}{c_1}\binom{0}{s-\overline{a}_1-c_1}\binom{c_1}{s-\beta_1}\binom{s-c_1}{\beta_1-\overline{b}_1}}{\binom{s}{s-\overline{a}_1}\binom{s}{s-\overline{b}_1}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\binom{s-\beta_{i-1}}{c_i}\binom{\beta_{i-1}-\overline{a}_{i-1}}{s-\overline{a}_i-c_i}\binom{c_i}{s-\beta_i}\binom{s-\overline{b}_{i-1}-c_i}{\beta_i-\overline{b}_i}}{\binom{s-\overline{a}_{i-1}}{s-\overline{a}_i}\binom{s-\overline{b}_{i-1}}{s-\overline{b}_i}}\,c_i$$

und dann

$$\sum_{c_1}\sum_{\beta_1}\cdots\sum_{c_{i-1}}\sum_{\beta_{i-1}}\frac{\binom{s}{c_1}\binom{0}{s-\overline{a}_1-c_1}\binom{c_1}{s-\beta_1}\binom{s-c_1}{\beta_1-\overline{b}_1}}{\binom{s}{s-\overline{a}_1}\binom{s}{s-\overline{b}_1}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\binom{s-\beta_{i-2}}{c_{i-1}}\binom{\beta_{i-2}-\overline{a}_{i-2}}{s-\overline{a}_{i-1}-c_{i-1}}\binom{c_{i-1}}{s-\beta_{i-1}}\binom{s-\overline{b}_{i-2}-c_{i-1}}{\beta_{i-1}-\overline{b}_{i-1}}}{\binom{s-\overline{a}_{i-2}}{s-\overline{a}_{i-1}}\binom{s-\overline{b}_{i-2}}{s-\overline{b}_{i-1}}}\times$$

$$\times\frac{s-\overline{a}_i}{s-\overline{\overline{a}}_{i-1}}(s-\beta_{i-1})=\frac{s-\overline{a}_i}{s-\overline{\overline{a}}_{i-1}}(s-X_{i-1}).$$

Der Koeffizient von g_i, $\gamma_i = s-\beta_{i-1}-c_i$ führt daher im Ausdruck für G zum Summanden

$$\sum_{a_1}\cdots\sum_{a_n}\sum_{b_1}\cdots\sum_{b_n}\frac{s!}{a_1!\ldots a_n!}\,\frac{s!}{b_1!\ldots b_n!}\,w_1^{a_1}\ldots w_n^{a_n}\,u_1^{b_1}\ldots$$

$$\ldots u_n^{b_n}\,g_i\,(s-X_{i-1})\left(1-\frac{s-\overline{a}_i}{s-\overline{\overline{a}}_{i-1}}\right),$$

worin wir noch für $1-\dfrac{s-\overline{a}_i}{s-\overline{\overline{a}}_{i-1}}$ setzen $\dfrac{a_i}{s-\overline{\overline{a}}_{i-1}}$.

Wir wissen schon, dass

$$s - X_{i-1} = s\mu_1 \ldots \mu_{i-1} = s\,\frac{s - \overline{a}_{i-1}}{s}\,\frac{s - \overline{b}_{i-1}}{s}.$$

Also erhalten wir für G den Ausdruck

$$\sum_i g_i \Big\{ \sum_{a_1} \ldots \sum_{a_n} \sum_{b_1} \ldots \sum_{b_n} \frac{s!}{a_1! \ldots a_n!}\,\frac{s!}{b_1! \ldots b_n!}\, w_1^{a_1} \ldots w_n^{a_n} u_1^{b_1} \ldots$$

$$\ldots u_n^{b_n}\,\frac{s - b_{i-1}}{s}\, a_i \Big\} = s \sum_i g_i w_i (1 - u_1 - \ldots - u_{i-1}).$$

Setzen wir $G = 0$, so erhalten wir, wie früher, den üblichen Ausdruck für die Prämie der eben betrachteten Versicherungsart.

Schlussbemerkung.

Es ergibt sich nun die Frage nach dem inneren Grund für die Übereinstimmung der Resultate, die auf verschiedenen Wegen abgeleitet wurden. Ich verdanke Herrn Dr. E. Helly in Wien die Bemerkung, dass sich für den Fall der gemischten Versicherung auf ein Leben, den wir im ersten Kapitel behandeln, diese Übereinstimmung leicht im Voraus einsehen lässt. Hiezu gehen wir wie folgt vor:

Wir betrachten zunächst eine Gruppe von x-jährigen Personen in der Anzahl l_x, wie sie die Sterbetafel für dieses Alter angibt. Wir teilen nun, der Sterbetafel entsprechend, $l_x - l_{x+1}$ Personen das Sterbealter x bis $x+1$, $l_{x+1} - l_{x+2}$ Personen das Sterbealter $x+1$ bis $x+2$, u. s. w. zu, während l_{x+n-1} Personen im letzten Versicherungsjahr sterben oder nach n Jahren noch am Leben sind. Dieses Schema entspricht der ersten Berechnungsart. Wenn v^i die dem i-ten Sterbejahr entsprechende Auszahlung ist, so führt dieses Schema zur Einmalprämie

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{(l_x - l_{x+1})\, v + (l_{x+1} - l_{x+2})\, v^2 + \ldots + l_{x+n-1}\, v^n}{l_x}.$$

Nun wollen wir das der zweiten Berechnungsart entsprechende Schema bilden. Wir erzeugen aus den l_x Personen, von denen jeder ein bestimmtes Sterbejahr zukommt, alle möglichen Gruppen von s Personen. Als Auszahlung an eine solche Gruppe betrachten wir die Summe der Auszahlungen an die einzelnen Mitglieder dieser Gruppe, die vom Sterbejahr abhängen. Die Summe der Zahlungen an die einzelnen Gruppen ist gleich dem $\binom{l_x - 1}{s - 1}$ fachen der Summe der Auszahlungen im ersten Schema, die $l_x A_{x\overline{n}|}$ betrug, da jetzt jede der früheren Personen $\binom{l_x - 1}{s - 1}$ mal auftritt. Dividieren wir diese Auszahlungssumme durch die Anzahl aller im zweiten Schema auftretenden Personen, d. h. durch

$$s\binom{l_x}{s} = l_x\binom{l_x-1}{s-1},$$

so erhalten wir dieselbe Durchschnittszahlung wie früher.

Man sieht sofort, dass diese Überlegung auch dann gilt, wenn sie, statt auf die Auszahlungen, auf die Gewinne angewendet wird.

Eine prinzipielle Untersuchung der Ergebnisse, zu denen verschiedene Schemata führen und die Durchführung für kompliziertere Fälle, insbesondere für die in unseren letzten Kapiteln behandelten, muss einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Note sur quelques inégalités entre les valeurs probables d'une grandeur aléatoire qui ne prend que des valeurs positives.

Fr. Kudela.

(L'idée de cet article provient du séjour au séminaire pour les mathématiques appliquées de M. Prof. Dr. Emil Schoenbaum à l'université tchèque de Prague.)

I.

En étudiant les mémoires de M. Liapounoff sur le calcul des probabilités, surtout le mémoire[1]) qui est consacré à la formulation et la démonstration les plus précises du théorème célèbre de Laplace-Tchebycheff sur la limite de probabilité, nous y rencontrons certaines inégalités entre les valeurs probables qui méritent, à cause de leur généralité, d'être bien étudiées au point de vue de leur déduction.

Dans le mémoire cité, M. Liapounoff n'a pas fait réellement la démonstration des inégalités que nous venons d'établir, mais il a seulement indiqué comment on peut, par induction, arriver à leur existence. Dans une étude bien connue „Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes",[2]) M. Jensen a établi une inégalité valable pour toutes les fonctions dites convexes et en a tiré, par un procédé fort simple, les inégalités à peu près équivalentes aux inégalités de Liapounoff. Comme on le sait, il s'agit de l'existence de l'inégalité de Cauchy (voir Analyse algébrique, p. 455)

$$\Sigma(a_i \,.\, b_i)^2 \leqq \Sigma a_i^2 \,.\, \Sigma b_i^2$$

---

[1]) Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, volume XII, No. 5 (1901).

[2]) Acta Mathematica, T. 30 (1906).