

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Michal Křížek

O použití Einsteinových rovnic v kosmologii

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 60 (2015), No. 3, 255–272

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144419>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2015

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# O použití Einsteinových rovnic v kosmologii

Michal Krížek, Praha

Gravitace je nejdéle studovaná fyzikální interakce. I přesto je s ní spojena řada nevyřešených otázek. Cílem tohoto článku je poukázat na některá úskalí, na která narážíme, pokud ztotožňujeme výsledky jednoduchých matematických modelů vývoje vesmíru s realitou. Zejména bychom neměli bez rozmyslu aplikovat na celý vesmír a na extrémně dlouhé časové intervaly Einsteinovu obecnou teorii relativity (OTR), která se testuje jen na relativně malých škálách. Takové nekorektní extrapolace pak mohou vést k celé řadě nesrovnalostí, paradoxů, nedorozumění a záhad.

## 1. Friedmannova rovnice

Zatím není známo, jaká je globální topologie našeho vesmíru. V soudobé kosmologii se vesmír pro pevný čas  $t$  modeluje maximálně symetrickými varietami  $\mathbb{S}_r^3$ ,  $\mathbb{E}^3$  a  $\mathbb{H}_r^3$ , aby se vyjádřila jeho homogenita a izotropie na velkých prostorových škálách, což vystihuje tzv. *Einsteinův kosmologický princip*. Zde symbol  $\mathbb{E}^N$  označuje  $N$ -rozměrný eukleidovský prostor,

$$\mathbb{S}_r^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{E}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2\} \quad (1)$$

je *sféra (nadsféra)* o poloměru  $r > 0$ , tj. trojrozměrný povrch čtyřrozměrné koule, a  $\mathbb{H}_r^3$  je trojrozměrná hyperbolická pseudosféra. Posledně jmenovaný objekt si lze jen velice obtížně představit, protože jej nelze na rozdíl od sféry (1) izometricky vložit do  $\mathbb{E}^4$ . Lze jej ale izometricky vložit do dvanáctirozměrného eukleidovského prostoru  $\mathbb{E}^{12}$  (srov. [3], [20]).

V současnosti se v kosmologii nejvíce preferuje tzv.  $\Lambda$ CDM model (angl. Lambda Cold<sup>1</sup> Dark Matter model), který vychází z Friedmannovy rovnice. Alexander Friedmann<sup>2</sup> [13] ji odvodil v roce 1922 tak, že použil Einsteinovy rovnice OTR na celý vesmír reprezentovaný maximálně symetrickou varietou  $\mathbb{S}_r^3$  s obecně proměnným poloměrem  $r = r(t)$ . Získal tak obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu pro neznámou dostatečně hladkou *expanzní funkci*  $a = a(t) = r(t) > 0$  popisující rozpínání vesmíru

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2)$$

kde tečka označuje časovou derivaci,  $\rho = \rho(t) > 0$  střední hustotu látky ve vesmíru v čase  $t$ ,  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  gravitační konstantu,  $\Lambda$  kosmologickou konstantu,  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$  rychlost světla ve vakuu a  $k = 1$  je index křivosti pro

<sup>1</sup>Horká temná hmota by nemohla kondenzovat kolem galaxií.

<sup>2</sup>Příjmení Friedmann se někdy přepisuje jen s jedním n, srov. [13] a [14].

sféru. Podrobné odvození *Friedmannovy rovnice* (2) je uvedeno v [13] nebo v monografii [45, Chap. 15].

V roce 1924 Friedmann publikoval další článek, kde vesmír modeluje pseudo-sférou  $\mathbb{H}_r^3$  se záporným indexem křivosti  $k = -1$ . Rovnici (2) ale odvodil pouze pro zápornou hustotu hmoty (viz [14, s. 2006]) a není tedy jasné, jak takovýto předpoklad splnit. Případ  $k = 0$ , který odpovídá  $\mathbb{E}^3$ , neuvažoval. Naštěstí lze rovnici (2) formálně vyšetřovat i pro  $k \leq 0$  a  $\rho \geq 0$ .

Naproti tomu Albert Einstein předpokládal [8, s. 152], že se vesmír nerozpíná a že jej lze modelovat varietou  $\mathbb{S}_r^3$  pro pevný poloměr  $r$  nezávislý na čase. V roce 1917 do svých rovnic OTR (viz (10) níže) přidal kosmologickou konstantu  $\Lambda$ , aby zabránil gravitačnímu kolapsu vesmíru a zachránil tak svůj model věčného stacionárního vesmíru (přestože jaderné palivo ve hvězdách věčně nevydrží). Jestliže ale v rovnici (2) položíme  $\dot{a} = 0$ , pak odpovídající stacionární řešení není stabilní, tj. sebemenší odchylka od příslušné hodnoty  $a(t) \equiv \text{konst.}$  způsobí buď gravitační kolaps, anebo naopak expanzi (viz např. [30, s. 746]).

## 2. Nejednoznačnost pojmu vesmír

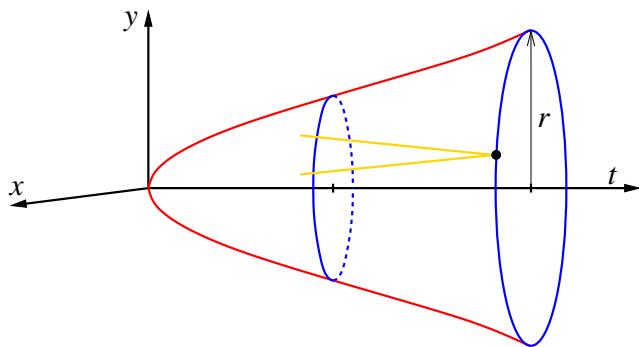
Termín vesmír se v kosmologii používá v různých významech: skutečný prostoročas, skutečný prostor (tj. prostoročas pro pevný čas) a pozorovatelný vesmír, který vlastně vidíme jen v projekci na nebeskou sféru. To jsou 3 zcela odlišné objekty. Jejich matematické modely jsou také 3 naprosto rozdílné variety [47]. Dohromady je to tedy 6 různých významů slova vesmír, pro něž zatím bohužel nemáme ustálenou českou terminologii. První tři obsahují skutečnou hmotu, zatímco další tři jsou jen abstraktní matematické idealizace.

V souladu s Einsteinovým kosmologickým principem budeme pod pojmem *vesmír* rozumět řez skutečným prostoročasem odpovídající pevnému časovému okamžiku (tj. vesmír bude izochrona v prostoročasu pro  $t = \text{konst.}$ ). Pro lepší představu je rozpínání vesmíru pro  $k = 1$  znázorněno na obr. 1. Místo sféry  $\mathbb{S}_r^3$  pro daný čas  $t$  je ale nakreslena jen její hlavní kružnice  $\mathbb{S}_r^1$  pro  $z = w = 0$ . Pozorovatelný vesmír lze modelovat sjednocením dvourozměrných sfér, jež mají střed na Zemi. Na obr. 1 je znázorněn kuželem, v jehož vrcholu je pozorovatel. Tento světelný kužel<sup>3</sup> se v kosmologických vzdálenostech značně deformuje, protože vesmír byl menší (viz [5]).

Friedmannova rovnice (2) popisuje, jak se mění expanzní funkce (tj. poloměr  $r$  kružnice na obr. 1) v čase, zatímco veškerá naměřená data jsou z pozorovatelného vesmíru (viz kužel na obr. 1). Přitom rozpínání vesmíru a rozpínání pozorovatelného vesmíru jsou dvě různé věci. Zcela nesprávně se někteří kosmologové pokoušejí odhadovat úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  v trojúhelníku v pozorovatelném vesmíru, aby pomocí součtu  $\alpha + \beta + \gamma$  odhalili eliptickou (sférickou), eukleidovskou či hyperbolickou geometrii vesmíru. Pozorovatelný vesmír totiž není homogenní, protože při pohledu do minulosti se mění jeho hustota. Vyšetřovaný trojúhelník se musí uvažovat ve vesmíru pro pevný čas, ze kterého ale vidíme jen jediný bod, v němž se právě nacházíme (srov. obr. 1). To měření úhlů znemožňuje.

---

<sup>3</sup>Pozorovatelný vesmír nelze modelovat trojrozměrným eukleidovským prostorem (ani pro  $k = 0$ ), neboť se jedná o světelný kužel. Přitom světelným kuželem se rozumí jen povrch kužele a nikoliv jeho vnitřek.



Obr. 1. Tři různé variety odpovídající indexu křivosti  $k = 1$ . Červeně je vyznačen model prostoročasu, žlutě model pozorovatelného vesmíru a modře model vesmíru s kladnou křivostí a poloměrem  $r = r(t)$  v čase  $t$ . Barevná verze obrázku bude k dispozici v roce 2016 na [www.dml.cz](http://www.dml.cz). Pro jednoduchost je sféra (1) nahrazena jen hlavní kružnicí  $\mathbb{S}_r^1$  pro  $z = w = 0$ . Vše je zredukováno o 2 prostorové dimenze.

Variety  $\mathbb{E}^3$  a  $\mathbb{H}_r^3$  mají nekonečný objem. Vesmír však nemohl být po svém vzniku nejprve konečný a pak se skokem změnit na nekonečný. Navíc si lze jen těžko představit, že by skutečný nekonečný vesmír měl v daném okamžiku po Velkém třesku všude na velkých škálách stejnou teplotu, tlak, hustotu apod., jak požaduje Einsteinův kosmologický princip. To by se informace musela šířit nekonečnou rychlostí. Proto se nejpravděpodobnějším modelem našeho vesmíru jeví sféra  $\mathbb{S}_r^3$ .

### 3. Nekorektní extrapolace

Otázka, zda Friedmannova rovnice (2) popisuje dostatečně přesně rozpínání celého skutečného vesmíru, je zcela klíčová. Pokud tomu tak není, pak kosmologové řeší mnoha různými způsoby stále tutéž nesprávnou rovnici. To se v článku pokusíme doložit konkrétními argumenty.

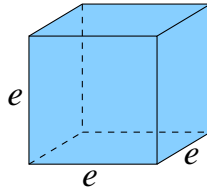
Přírodní jevy obvykle modelujeme pomocí rovnic matematické fyziky, jako jsou např. rovnice proudění tekutin, Maxwellovy rovnice či magnetohydrodynamické rovnice. Žádná taková rovnice však nepopisuje realitu absolutně přesně. Vždy tedy vzniká jistá nenulová chyba modelu vzhledem k nějakému srovnávacímu kritériu (maximální povrchová teplota, minimální tlak, průměrná rychlost atp.). Každá rovnice matematické fyziky má ale svá ohraničení na velikosti vyšetřovaných objektů.<sup>4</sup>

Uvažujme například rovnici ustáleného vedení tepla (s vhodnými okrajovými podmínkami) v pevné homogenní a izotropní látce ve tvaru krychle o délce hrany  $e = 1$  m (viz obr. 2),

$$-\Delta u = f, \tag{3}$$

kde  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  je Laplaceův operátor,  $u$  je teplota a funkce  $f$

<sup>4</sup>Proto je tak obtížně skloubit teorii gravitace s kvantovou mechanikou a najít rovnice, které by věrně popisovaly jak makrosvět, tak mikrosvět. O to se pokouší teorie, které se poněkud nadneseně říká *teorie všeho*.



Obr. 2. Krychle o hraně  $e$

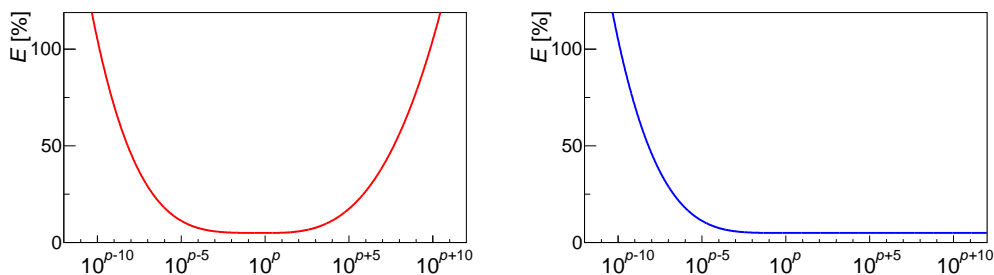
je přímo úměrná hustotě objemových tepelných zdrojů.<sup>5</sup> Tato rovnice velice dobře aproximuje skutečnou teplotu, o čemž se lze přesvědčit přímým měřením (viz [24]). Kdybychom ji ale řešili na atomární úrovni v krychličce o hraně  $e = 10^{-10}$  m, žádnou realistickou teplotu nedostaneme, protože není jasné, jak vůbec teplotu na tak malém objektu rozumně definovat. Podobně nedostaneme žádné relevantní řešení na krychli o hraně  $e = 10^{10}$  m, která by okamžitě zkolabovala do černé díry, protože  $e$  je alespoň o řád větší, než je průměr Slunce. Rovnici (3) samozřejmě můžeme řešit na libovolně velké krychli. Otázkou ale je, pro jak velkou hranu  $e$  dostaneme ještě přijatelné hodnoty teploty a kdy už dostaneme nesmyslné výsledky (srov. obr. 3). Uvažované kritérium může být např. relativní chyba  $E = E(e) = |U_{\max} - u_{\max}|/U_{\max}$ , kde  $U_{\max}$  (resp.  $u_{\max}$ ) je maximální skutečná (resp. teoretická, tj. řešení (3)) povrchová teplota na krychli z obr. 2, kde  $e$  je v logaritmickém měřítku na vodorovné ose.

Uveďme další příklady. Použití Schrödingerovy rovnice je oprávněné na škálách o velikosti atomu vodíku, tj. cca  $10^{-10}$  m, ale problematické je její použití na objekty o velikosti  $10^{-20}$  m mnohem menší než kvarky či na objekty o velikosti jednoho metru. Platnost dalších rovnic matematické fyziky (např. rovnic pružnosti, rovnic supravodivosti, polovodičových rovnic) se řídí podobnými omezeními, i když pro každou rovnici a příslušné srovnávací kritérium je průběh grafu v levé části obr. 3 obecně jiný.

Časové škály také nemohou být libovolné. Např. známý problém  $N$  těles, která na sebe gravitačně působí, dává ve Sluneční soustavě velice dobré předpovědi na škálách roků, zatímco na škálách  $10^{10}$  let dostaneme zcela chybné výsledky. Rovněž zpětná integrace v čase o  $10^{10}$  roků dává trajektorie, které s realitou nemají nic společného, protože Sluneční soustava tehdy neexistovala. Podobně nemá smysl používat matematické modely pro odhad počtu obyvatel na Zemi za  $10^{10}$  let či počítat počasí na  $10^{10}$  dnů dopředu, i když na pár dní to umíme velice dobře.

Pomocí rovnice (2) A. Friedmann [13] vyjádřil v roce 1922 dynamické chování vesmíru jako alternativu proti Einsteinovu stacionárnímu vesmíru. V té době ovšem lidstvo nemělo ani tušení o skutečných rozměrech našeho vesmíru. Až 6. října 1923 totiž Edwin Hubble objevil první cefeidu v mlhovině M31 v Andromedě (viz [17]). Z naměřené svítivosti zjistil, že M31 je vzdálený hvězdný ostrov, který nepatří do Mléčné dráhy. Hubble tak objevil galaxie (viz obr. 4). Jde tedy o to, zda se Friedmann nedopustil až příliš velké extrapolace, když použil Einsteinovy rovnice na celý vesmír. Tyto nelineární rovnice totiž nejsou invariantní škálově (tj. vůči změně měřítka), protože obsahují konstanty  $G$  a  $c$ , přičemž se předpokládá, že rychlost šíření gravitační interakce je rovna právě  $c < \infty$ . Testují se zejména na škálách Sluneční soustavy (viz

<sup>5</sup>Rovnice (3) popisuje i rozložení Newtonova gravitačního potenciálu pro  $f = -4\pi G\rho$ .



Obr. 3. Vlevo: schematicky znázorněné obecné chování relativní chyby extrapolace  $E$  pro rovnice matematické fyziky. Horizontální osa (ve vhodných fyzikálních jednotkách) má logaritmické měřítko a  $p$  je exponent, pro který je uvažovaná chyba nejmenší. Vpravo: prosazované chování relativní chyby extrapolace v případě Einsteinových rovnic.

kap. 5), zatímco galaxie mají rozměr cca  $10^{10}$  astronomických jednotek<sup>6</sup>. Galaktické škály tak mají podobný rozměr. Vesmír je ale ještě o více než 5 řádů větší a kosmologické škály proto mají alespoň  $10^{15}$  au. Díky těmto smělym extrapolacím museli kosmologové do svých modelů zavést exotickou temnou hmotu a temnou energii, aby dostali souhlas s pozorováním.

S gravitací je spojeno množství nevyřešených otázek. Zatím nevíme, zda existují gravitační vlny, jaký má gravitace dosah, zda vykazuje aberační jevy jako světlo, jakou má rychlost šíření, zda je kvantovaná, na jakých škálách ji lze ještě věrně modelovat Einsteinovými rovnicemi apod., protože každý model nutně má svá omezení. Současný kosmologický model se tak patrně opírá o nesprávnou rovnici, která byla odvozena před necelými sto lety a od té doby se toto pochybení táhne celou kosmologií.

OTR je v současnosti považována za nejlepší teorii gravitace. Slovo obecná ale neznamená, že ji lze používat bez omezení. Tato teorie nepopisuje dobře jevy na atomární úrovni. Proto relativní chyba extrapolace roste pro zmenšující se škály, jak je znázorněno na obr. 3 vpravo. Je ale velice nepravděpodobné, že by relativní chyba extrapolace pro zvětšující se škály nerostla (viz obr. 3 vlevo).

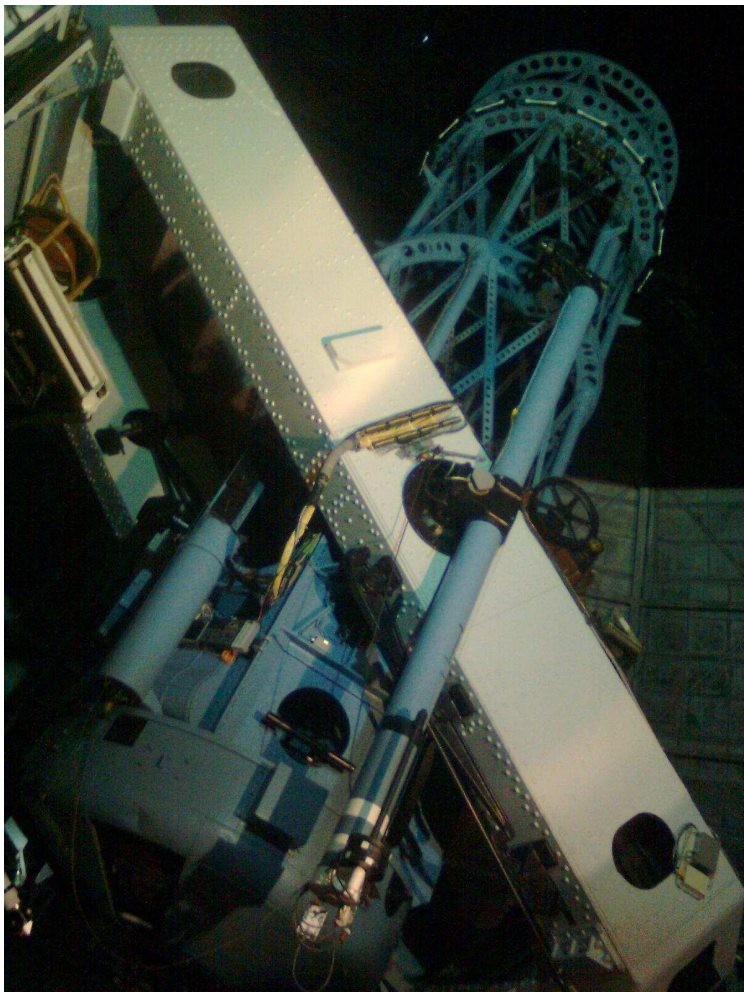
Známý astrofyzik Pavel Kroupa to ve svém článku *The dark matter crisis: Falsification of the current standard model of cosmology* [22, s.395] komentuje slovy: „Současné všeobecně rozšířené chápání kosmologie je založeno na nulové hypotéze, že OTR platí na galaktických a kosmologických měřítkách. To je obrovská extrapolace o mnoho řádů z dobře testovaných škál planetární dynamiky na ultraslabá pole na galaktických a kosmologických škálách.“

#### 4. Kosmologické parametry

Definujme nejprve *Hubbleův parametr*

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (4)$$

<sup>6</sup>Dnes je *astronomická jednotka* definována rovností  $1 \text{ au} = 149\,597\,870\,700 \text{ m}$ . Je přibližně rovna současné střední vzdálenosti Země od Slunce. Jeden světelný rok je  $63\,242 \text{ au}$  a naše Galaxie má průměr přibližně  $150\,000$  světelných let (viditelná část jen  $100\,000$  světelných let).



Obr. 4. Stopalcový dalekohled na observatoři Mount Wilson v Kalifornii, jímž E. Hubble objevil galaxie a rozpínání vesmíru (foto Michal Krížek).

a vydělme rovnici (2) čtvercem  $H^2 = (\dot{a}/a)^2 \geq 0$  tak, jak se to v kosmologické literatuře běžně dělá, tj. bez předběžného varování se eventuálně dělí nulou, což může vést k rozmanitým paradoxům (viz [26]). Pak pro všechna  $t$  dostaneme tzv. *normalizovanou Friedmannovu rovnici* pro tři bezrozměrné kosmologické parametry

$$1 = \Omega_M(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_K(t), \quad (5)$$

které jsou definovány vztahy

$$\Omega_M(t) := \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)} > 0, \quad \Omega_\Lambda(t) := \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}, \quad \Omega_K(t) := -\frac{kc^2}{\dot{a}^2(t)}, \quad (6)$$

kde  $\Omega_M$  se nazývá *parametr hustoty temné a baryonové hmoty*<sup>7</sup>,  $\Omega_\Lambda$  *parametr hustoty temné energie* a  $\Omega_K$  *parametr hustoty prostorové křivosti*. Nositel Nobelovy ceny za objev zrychleného rozpínání vesmíru Saul Perlmutter nazývá parametr  $\Omega_M$  *mass density* a  $\Omega_\Lambda$  *vacuum energy density* (viz [34]). Parametru  $\Omega_K$  se v [36] říká *curvature parameter*.

Všimněme si, že pro Einsteinův stacionární vesmír s  $\dot{a}(t) \equiv 0$  nabývá podle (4) a (6) parametr hustoty temné a baryonové hmoty  $\Omega_M$  nekonečné hodnoty, i když se nic zvláštního neděje. Správně bychom měli říkat, že tento parametr není dobře definován, protože je ve jmenovateli nula. Přitom hustota samotné baryonové látky je jistě konečná! Nulou se dělí též v případě dalších dvou parametrů z (6). Podobně dochází k dělení nulou i v případě tzv. oscilujícího vesmíru, kdy hladká expanzní funkce opakovaně roste a pak klesá. Poměr hmotností temné a baryonové látky proto zase nabývá libovolně velkých hodnot. Kosmologické parametry mají podivné chování i v dalších případech [26].

Podle (6) má kosmologická konstanta  $\Lambda$  fyzikální rozměr  $m^{-2}$ . Hovoří se o ní jako o hustotě energie. Ta ale má v jednotkách SI zcela jiný rozměr, a sice  $kg\ m^{-1}s^{-2}$ . Všimněme si, že ve veličinách definujících parametr  $\Omega_\Lambda$  se  $kg$  vůbec nevyskytuje (podrobnosti viz [26]). Můžeme tedy vůbec hovořit o nějaké hustotě energie, když v rovnici (2) není  $c = 1$  a  $G = 1$ ? Kosmologické parametry tak mají nevhodné pojmenování.

V současnosti je obtížné se orientovat v záplavě informací z oblasti kosmologie. Často se až příliš kategoricky tvrdí, že (viz obr. 5):

*Vesmír se skládá z 27 % temné hmoty, 5 % baryonové látky a 68 % temné energie.*

Správně bychom ale měli říkat:

*Podle Friedmannova kosmologického modelu<sup>8</sup> by se mohl vesmír skládat z 27 % temné hmoty, 5 % baryonové látky a 68 % temné energie.*

Důležité je uvědomit si principiální rozdíl mezi těmito dvěma tvrzeními. Podívejme se proto nyní, jak se k předkládaným procentům dospělo.

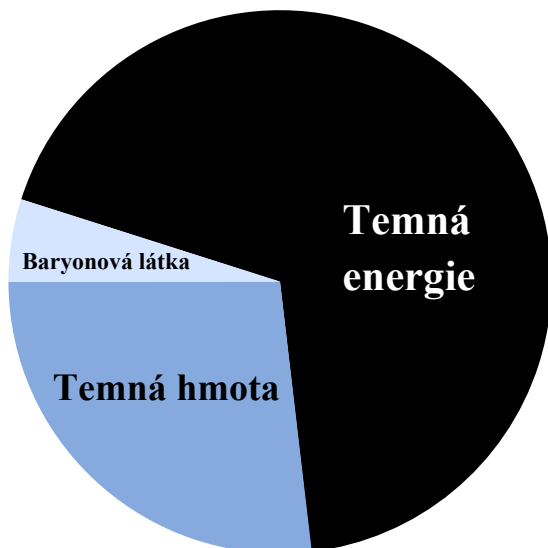
**Supernovy typu Ia.** Nositelé Nobelovy ceny za objev zrychlené expanze vesmíru, Saul Perlmutter, Adam Riess a Brian Schmidt, se se svými kolektivy zabývali určením současných hodnot kosmologických parametrů pomocí výbuchů velice vzdálených supernov typu Ia, které jsou považovány za tzv. standardní svíčky (podrobnosti viz [34], [38]). Nezávisle zjistili, že supernovy typu Ia mají o 10–15 % menší svítivost,<sup>9</sup> než kdyby se vesmír rozpínal zpomalně. Z toho usoudili, že se světlo supernov šíří do

<sup>7</sup>K baryonové hmotě astronomové počítají všechny částice, které jsou zahrnuty ve standardním modelu částic a interakcí (protony, neutrony, ale i elektrony, neutrina apod.), a též degenerovanou hmotu ukrytou v černých dírách. Temná hmota je hypotetická skrytá látka, která neinteraguje elektromagneticky ani silně, a projevuje se na velkých prostorových škálách. Svými gravitačními účinky by měla rozpínání vesmíru brzdit. Na druhé straně koncem 20. století bylo pomocí Friedmannovy rovnice (2) odvozeno zrychlující se rozpínání vesmíru (viz [38]). Proto fyzikové zavedli ještě termín *temná (skrytá) energie*, která naopak rozpínání vesmíru urychluje a působí tak proti gravitaci.

<sup>8</sup>Někdy se též říká FLRW kosmologický model, protože expanzní funkce  $a = a(t)$  vystupuje ve Friedmannově-Lemaîtreově-Robertsonově-Walkerově metrice, která popisuje prostorčasovou varietu, viz např. obr. 1 a [46].

<sup>9</sup>Podle [1] a [39] zapoměli uvažovat extinkci (zeslabení) světla hostitelskou galaxií. Naměřená svítivost totiž dosti podstatně záleží na tom, zda je supernova uvnitř či na okraji galaxie, jaký směr má její rotační osa apod. Supernovy typu Ia jsou tedy standardní svíčky jen přibližně.





Obr. 5. Výsledky družice Planck [36] se interpretují tak, že ve vesmíru je přítomno 27 % temné hmoty, necelých 5 % baryonové látky a 68 % temné energie. Přitom se vychází z normalizované Friedmannovy rovnice (5), která byla odvozena pomocí dosti nekorektních extrapolací o mnoho řádů. Kosmologické parametry se hledají tak, aby se řešení (5) co nejvíce blížilo naměřeným datům. Množství baryonové látky se odhaduje pomocí svítící látky [46, s. 74].

většího objemu, a proto vesmír expanduje zrychleně. Ke stanovení vzdáleností supernov použili (viz [38, s. 1021]) následující vztah odvozený z Friedmannovy rovnice pro tzv. *luminosity distance*<sup>10</sup> z práce [4, s. 511],

$$d_L = cH_0^{-1}(1+z)|\Omega_K|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sinn} \left\{ |\Omega_K|^{\frac{1}{2}} \int_0^z [(1+z)^2(1+\Omega_M z) - z(2+z)\Omega_\Lambda]^{-\frac{1}{2}} dz \right\},$$

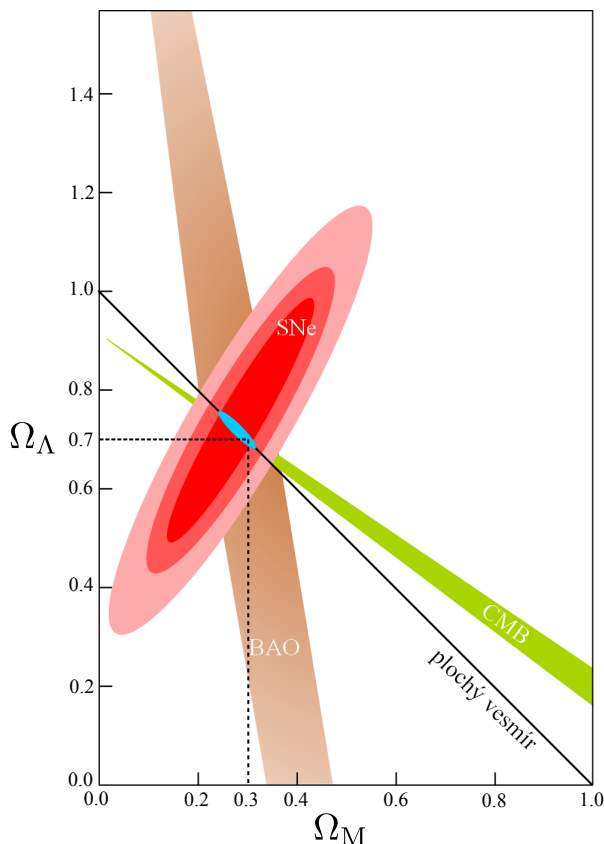
kde  $H_0 = H(t_0) \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  je všeobecně uznávaná hodnota Hubbleova parametru v čase pro  $t = t_0$ , který odpovídá současnosti,  $\Omega_K = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$  podle (5),

$$\operatorname{sinn} x = \begin{cases} \sin x & \text{pro } k = 1, \\ x & \text{pro } k = 0, \\ \sinh x & \text{pro } k = -1 \end{cases}$$

a  $k$  je index křivosti.<sup>11</sup> Odtud, z naměřených hodnot červeného posuvu  $z$  absorpčních spektrálních čar křemíku a svítivosti několika desítek supernov typu Ia určili konkrétní hodnoty kosmologických parametrů (6) pomocí  $\chi^2$  testu. Povšimněme si, že ve vztahu

<sup>10</sup>Určovat vzdálenosti v rozpínajícím se vesmíru je velice obtížné a navíc nejednoznačné. V kosmologii se proto definuje celá řada různých vzdáleností (angl. angular, comoving, Hubble, light-year, luminosity, Minkowski, parallax, proper motion, redshift, ... distance), viz např. [45]. V případě supernov typu Ia se luminosity distance jeví jako nejpřirozenější míra vzdálenosti.

<sup>11</sup>Všimněme si, že horní mez v integrálu je stejná jako proměnná, podle níž se integruje. Správně by ale integrační proměnná měla být označena jiným symbolem než horní mez.



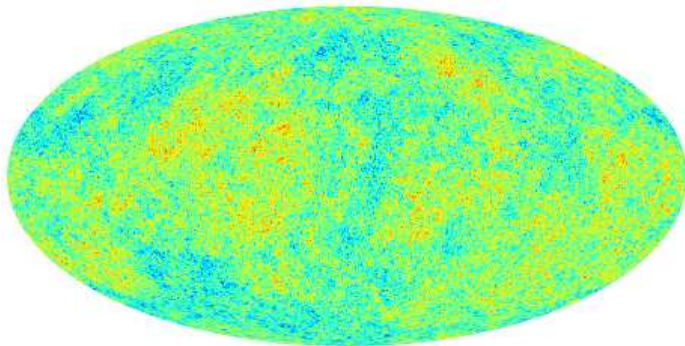
Obr. 6. Přípustné hodnoty kosmologických parametrů určené nezávislými metodami BAO, CMB a SNe mají průnik v malé oblasti obsahující parametry (7). Společně však mají to, že všechny vycházejí z Friedmannovy rovnice (5) odvozené spornými extrapolacemi.

pro  $d_L$  se pro  $\Omega_K = 0$  dělí nulou (srov. (7)). Riess a kol. nikterak nekomentuje, že pro  $k = 0$  je třeba nejprve krátit  $|\Omega_K|^{\frac{1}{2}}$ , a pak teprve definovat  $d_L$ , viz [38, s. 1021]. V případě oscilujícího (či stacionárního) vesmíru může být Hubbleův parametr nulový, a tak se opět dělí nulou.<sup>12</sup> Získaná množina přípustných hodnot kosmologických parametrů je na obr. 6 označena symbolem SNe.

**Fluktuační záření.** Další metoda pro zjišťování možných hodnot kosmologických parametrů je založena na analýze úhlových rozměrů fluktuačí v teplotě reliktního záření<sup>13</sup> CMB (Cosmic Microwave Background), které nedávno měřila sonda Planck [36]. Bylo by chybou domnívat se, že známá mapa (viz obr. 7) reliktního záření

<sup>12</sup>Weinberg [45, s. 421] uvádí odlišné vztahy pro „luminosity distance“, které jsou zcela nezávislé na Friedmannově rovnici.

<sup>13</sup>Reliktní záření pochází z doby, kdy probíhala tzv. rekombinace. V důsledku rozpínání vesmíru poklesla teplota na cca 3000 K, volné ionty a elektrony se spojily do atomů a vesmír se stal průhledný pro fotony. Vesmír se pak dále rozpínal a tyto fotony postupně ztrácely energii. A tak v současné době teplota reliktního mikrovlnného záření odpovídá vyzařování černého tělesa o teplotě 2.73 K.



Obr. 7. Fluktuace v teplotě reliktního mikrovlnného záření odpovídající červenému posuvu  $z \approx 1089$

zobrazuje celý vesmír, jak vypadal 380 000 let po Velkém třesku. Mapa znázorňuje jen dvojrozměrný<sup>14</sup> řez trojrozměrné variety odpovídající pozorovatelnému vesmíru pro červený posuv  $z \approx 1089$  (viz [9]). Hodnota expanzní funkce (tj. poloměr vesmíru pro  $k = 1$ ) byla 1090krát menší, než je dnes, tj. v průměru byl každý krychlový metr současného prostoru natěsnán do objemu menšího než  $1 \text{ mm}^3$ . Vše navíc pozorujeme jen v projekci na nebeskou sféru. Například reliktní záření vzniklé kdysi v našem okolí na mapě reliktního záření není. Rovněž zde není reliktní záření z míst, kde se dnes nalézá všech  $10^{12}$  galaxií z pozorovatelného vesmíru. Z místa každé z těchto galaxií bychom v současnosti pozorovali obecně jinou mapu fluktuací reliktního záření. Na Zemi máme tedy pouze představu o tom, jak vypadala jen zcela nepatrná část raného vesmíru.

Ukazuje se, že nejtypičtější úhlový rozměr fluktuací na mapě reliktního záření je cca  $1^\circ$ . Další lokální maximum výskytu je kolem hodnoty  $0.3^\circ$  atd., viz [36]. Tato data pocházející ze vzdálenosti více než 13 miliard let se pak pomocí Friedmannovy rovnice složitě extrapolují, aby se zjistily současné hodnoty kosmologických parametrů (7). Data jsou ale dosti zašuměná v důsledku gravitačního čočkování velmi ranými kupami galaxií a Sjuňajevovým–Zeldovičovým efektem horkého plynu [36].

**Kombinace tří metod.** V další metodě baryonových akustických oscilací BAO (Baryonic Acoustic Oscillations) se ohraničení na hodnoty kosmologických parametrů odhadují z rozložení galaktických kup [9]. Předpokládá se, že v oblastech nehomogenit reliktního záření vznikaly zárodky galaktických kup. Pomocí statistických metod se pak analyzují hustotní anomálie způsobené akustickými vlnami při rekombinaci.

Výsledky získané kombinací tří metod BAO, CMB a SNe se interpretují tak, že parametr současné hustoty temné a baryonové hmoty je téměř 32 % a parametr hustoty temné energie kolem 68 % (viz obr. 6), protože

$$\Omega_M \approx 0.3175, \quad \Omega_\Lambda \approx 0.6825, \quad \Omega_K \approx 0. \quad (7)$$

Graf podobný obr. 6 lze najít např. v [34]. Argumentuje se především tím, že všechny tři zmíněné metody jsou vzájemně nezávislé a že přípustné množiny kosmologických

<sup>14</sup>Přesněji velice tenký trojrozměrný řez světelného kužele v projekci na nebeskou sféru.

parametrů se protínají v malé oblasti, jejíž střed je blízký hodnotám (7). Navíc množiny přípustných hodnot SNe a CMB jsou k sobě prakticky „kolmé“, tudíž odpovídající metody by měly být téměř nezávislé. Nesmíme ale zapomínat, že všechny tři metody vycházejí ze stejné normalizované Friedmannovy rovnice, která byla odvozena nekorektními extrapolacemi, a tak metody zcela nezávislé nejsou. Jinými slovy, řešení diskutabilní rovnice (5) se hledá různými metodami s přesností na 4 platná místa, viz (7).

Z posledního ze vztahů (7) se pak dedukuje, že vesmír je s vysokou pravděpodobností plochý, tj. eukleidovský. I kdyby ale byl součet

$$\Omega_M(t_0) + \Omega_\Lambda(t_0) = 1.00000000000000000001,$$

stále se bude jednat o ohraničený vesmír, který lze popsat sférou (1) s nepředstavitelně velkým poloměrem. Takový prostor je sice lokálně téměř eukleidovský, ale stále jen konečný. Mezi konečným ohraničeným prostorem a nekonečným neohraničeným prostorem je však obrovský rozdíl. Nekonečný prostor má nekonečněkrát větší objem než jakýkoliv konečný prostor. Navíc sféra  $\mathbb{S}_r^3$  má úplně jinou topologii než proklamovaný plochý<sup>15</sup> prostor  $\mathbb{E}^3$ .

**Expanzní funkce.** Protože součin  $\rho(t)a^3(t)$  je konstantní v době, kdy látka dominuje nad zářením, nabývá rovnice (2) tvaru

$$\dot{a}^2 = Aa^2 + B + \frac{C}{a} \quad (8)$$

s časově nezávislými konstantními koeficienty  $A = \Lambda c^2/3$ ,  $B = -kc^2$  a  $C > 0$ , které nejsou zcela přesně známy. Z takto jednoduché obyčejné diferenciální rovnice se pak dělají hluboké závěry o expanzi skutečného vesmíru v daleké minulosti i budoucnosti.<sup>16</sup> Z naměřené hodnoty  $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  lze dosazením vztahu  $\dot{a}(t_0) = H_0 a(t_0)$  (viz (4)) do levé části rovnice (8) najít pro  $k \neq 0$  koncovou podmínku  $a(t_0)$  odpovídající současnosti v závislosti na  $\Lambda$  a  $\rho(t_0)$ . Friedmannovu rovnici (8) lze tedy řešit v čase dopředu i dozadu, čehož využívají mnohé kosmologické kalkulátory. Čas  $t_1$  odpovídající naměřenému červenému posuvu  $z$  lze pak odvodit ze vztahu  $a(t_0) = (z + 1)a(t_1)$ , viz [30, s. 730]. Přitom pro dobu, kdy záření dominuje nad látkou, se na pravou stranu rovnice (8) přidává ještě člen  $D/a^2$  a odtud se např. odhaduje stáří vesmíru 13.82 Gyr na čtyři platná místa. Skutečné stáří však může být odlišné.

Dále definujeme bezrozměrný *decelerační parametr* (parametr zpomalení)

$$q := -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a}H^{-2} = -\dot{H}H^{-2} - 1, \quad (9)$$

kde poslední dvě rovnosti plynou z (4). Výpočet druhých derivací expanzní funkce je ale pro značně zašuměná data ze supernov typu Ia špatně podmíněná úloha. V [36] a [38]

<sup>15</sup>Podle OTR hmota zakřivuje prostor. Nicméně v případě  $\mathbb{E}^3$  nemá snižující se hustota vesmíru  $\rho = \rho(t)$  paradoxně žádný vliv na jeho křivost.

<sup>16</sup>Derivováním (8) zjistíme, že  $\ddot{a} = Aa - Ca^{-2}/2$  pro  $\dot{a} \neq 0$ , a odtud lze vypočítat, kde je funkce  $a$  ryze konvexní.

byla stanovena extrapolovaná hodnota parametru  $q$  do současnosti  $q_0 = q(t_0) \approx -0.6$ , jež vystupuje v jednom koeficientu v Taylorově rozvoji

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \\ &= a(t_0)\left(1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots\right). \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že  $a$  je ryze konvexní v okolí  $t_0$ . První tři členy Taylorova rozvoje v bodě  $t_0$  však obecně nemohou dobře popisovat chování expanzní funkce v daleké minulosti, protože nelze spolehlivě odhadnout velikost zbytku Taylorovy řady [37, s. 623]. Proto např. tzv. *Hubbleův čas*  $H_0^{-1} = 13.6$  Gyr opírající se jen o lineární část Taylorova rozvoje nemusí dobře aproximovat skutečné stáří vesmíru.

## 5. Několik poznámek k Einsteinovým rovnicím

Podívejme se nyní podrobněji na samotné Einsteinovy rovnice OTR. Obvykle se uvádějí ve tvaru (viz [8], [30])

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (10)$$

kde  $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $G$  je gravitační konstanta,  $\Lambda$  je kosmologická konstanta,  $c$  je rychlost světla ve vakuu,

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$$

je symetrický *Ricciho tenzor* jedné časové proměnné  $x_0$  a tří prostorových proměnných  $x_1, x_2, x_3$ , tj.  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Závislost funkcí  $z$  (10) na těchto čtyřech proměnných se pro jednoduchost vynechává, aby se zápis příliš nekomplikoval. Zde je ale nutno zdůraznit, že v případě zakřiveného prostoročasu obecně nelze definovat globální souřadnice  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Argumentuje se však tím, že tvar (10) je nezávislý na volbě souřadnicového systému. V rovnici (10) jsou neznámé gravitační potenciály  $g_{\mu\nu}$ , což jsou složky *metrického tenzoru* typu  $4 \times 4$ . V důsledku symetrie  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  tak máme  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$  nezávislých složek a jsou to obecně bezrozměrné veličiny. Dále

$$R = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

je *Ricciho skalár*,  $T_{\mu\nu}$  je rovněž symetrický *tenzor hustoty energie a hybnosti*,

$$R_{\mu\rho\nu}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \sum_{\lambda=0}^3 \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha} - \sum_{\lambda=0}^3 \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} \quad (11)$$

je *Riemannův tenzor křivosti*, který má díky symetriím 20 nezávislých komponent,<sup>17</sup>

$$\Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\nu}} \right)$$

<sup>17</sup>V libovolné dimenzi  $N$  má Riemannův tenzor  $N^2(N^2 - 1)/12$  nezávislých složek v důsledku následujících podmínek:  $R_{\mu\rho\nu}^{\alpha} + R_{\rho\nu\mu}^{\alpha} + R_{\nu\mu\rho}^{\alpha} = 0$  (*první Bianchiho identita*) a  $R_{\lambda\mu\rho\nu} = -R_{\mu\lambda\rho\nu} = -R_{\lambda\rho\nu\mu}$ , kde  $R_{\lambda\mu\rho\nu} = \sum_{\alpha} g_{\lambda\alpha} R_{\alpha\rho\nu}^{\mu}$ . Odtud mj. plyne, že  $R_{\lambda\mu\rho\nu} = R_{\rho\nu\lambda\mu}$ . Pro  $N = 2$  lze Riemannův tenzor vyjádřit jen pomocí skalární Gaussovy křivosti.

jsou *Christoffelovy symboly 2. druhu*. Odtud a ze vztahu  $g_{\alpha\rho} = g_{\rho\alpha}$  vidíme, že pro  $\mu = 0, 1, 2, 3$  platí symetrie  $\Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} = \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu}$ . Celkem tedy máme  $40 = 4 \times 10$  nezávislých složek, jejichž fyzikální rozměr je  $m^{-1}$ . Konečně  $g^{\mu\nu}$  je matice typu  $4 \times 4$  inverzní ke  $g_{\mu\nu}$ , tj.

$$g^{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}^*}{\det(g_{\mu\nu})},$$

kde složky  $g_{\mu\nu}^*$  tvoří matici algebraických doplňků (viz [37, s. 50]).

Uvedme nyní několik poznámek, abychom se blíže se obeznámili s problematikou Einsteinových rovnic.

**a) Složitost Einsteinových rovnic.** Pokud provedeme všechna výše uvedená dosazení, vidíme, že elegantní zápis Einsteinových rovnic (10) vlastně představuje neobyčejně složitou soustavu 10 parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu pro neznámé složky metrického tenzoru  $g_{\mu\nu}$  čtyř proměnných. Celkem tak levá strana soustavy (10) obsahuje tisíce sčítanců, jejichž explicitní vyjádření zabere mnoho stránek.<sup>18</sup> Pro srovnání uvedme, že Laplaceův operátor na levé straně (3) je součtem pouhých tří druhých parciálních derivací a známé stacionární Navierovy–Stokesovy rovnice obsahují celkem 24 sčítanců na levé straně. Z tvaru sum ve vztahu (11) je patrné, že soustava (10) je nelineární v prvních derivacích metriky, i když v (10) to není explicitně vyznačeno.

**b) Chyba modelu na kosmologických vzdálenostech.** Einstein ve svých úvahách pracoval s lokálními systémy a v roce 1915 ani nemohl mít dobrou představu o skutečných rozměrech vesmíru. Z principu ekvivalence odvodil rovnice gravitačního pole (10), kde na levé straně nevystupují vyšší než druhé derivace metriky a navíc levá strana je v druhých derivacích metriky lineární. Obstojí ale takové vyjádření na obrovských prostoročasových škálách? Pokud zakřivení skutečného prostoročasu lze věrněji popsat též vyššími derivacemi metriky nebo vhodnou nelinearitou ve druhých derivacích<sup>19</sup>, pak nutně dostaneme neshodu rovnic (10) s realitou na škálách kosmologických, tj. příliš hrubou aproximací reality vedoucí na velkou chybu modelu neodpovídající pravé části obr. 3.

**c) Rychlost gravitační interakce.** V OTR se předpokládá, že rychlost šíření gravitační interakce je rovna rychlosti šíření světla ve vakuu. Tento předpoklad však zatím nebyl ověřen experimentálně. Jak známo, elektromagnetické vlny mají v nevakuovém prostředí pro různé vlnové délky různou rychlost. Pokud bychom tedy podle (10) počítali, jak soustava Slunce–Jupiter zakřivuje prostoročas, tak není jasné, zda rychlost šíření gravitační interakce uvnitř Slunce je či není rovna právě rychlosti světla  $c$  ve vakuu.

**d) Nejednoznačnost řešení.** Soustava (10) obecně nemá jediné řešení [30]. Např. pro nulovou pravou stranu je známo mnoho různých netriviálních přesných řešení. Je to podobné Laplaceově rovnici  $\Delta u = 0$ . Pokud nezadáme okrajové podmínky, dostaneme nekonečně mnoho řešení, např.  $u(x, y, z) = x + 3y + 8z$  nebo  $u(x, y, z) = y^2 - z^2$ .

**e) Co se vlastně testuje?** Analytické řešení klasického problému tří těles není obecně známo. Analytické řešení Einsteinových rovnic není známo ani pro dvě stejně

<sup>18</sup>V [30, s. 42] se píše: *No equation of physics can be written more simply.*

<sup>19</sup>Podobně nelineární úloha vedení tepla dává obecně menší chybu modelu než (3) pro  $\epsilon \approx 1$  m. Jde o nepotenciální úlohu, kterou nelze převést na minimalizaci funkcionálu energie [24, s. 166].

hmotná obíhající se tělesa ve vakuu. Při testování OTR se tedy neporovnává přesné řešení Einsteinových rovnic s měřením, jak bychom se mohli domnívat. Platnost (10) se »prověřuje« jen na malých prostoročasových škálách (stáčení perihelia dráhy Merkuru [7], gravitační červený posuv spektra hvězd [30], ohyb světla hvězd v blízkosti Slunce [6], zpomalování elektromagnetických vln v gravitačním poli Slunce [40], strhávání prostoročasu rotující Zemí, tzv. Lenseův–Thirringův precesní efekt [28] apod.). Slovo »prověřuje« píšeme záměrně ve francouzských uvozovkách, protože se neprověřují Einsteinovy rovnice s tisíci členy, ale jen jejich určitá post-newtonovská aproximace (angl. PPN formalism = Parametrized Post-Newtonian formalism), v níž uvažované rychlosti splňují podmínku  $v \ll c$ . Přitom se testují jen jednoduché algebraické vztahy (viz např. (12) či (13) níže) získané celou řadou nejružnějších aproximací. Stejně vztahy lze ale odvodit i z některých konkurenčních teorií gravitace [30, s. 1066].

**f) O kolik se posunulo perihelium Merkuru od formulace OTR?** Keplerovy parametry dráhy Merkuru nejsou pevná čísla mj. proto, že se perihelium Merkuru pozvolna stáčí ve směru oběhu. Pozorovaná hodnota tohoto stáčení činí přibližně 5600 obloukových vteřin za století, z čehož 5027'' připadá na posun jarního bodu po ekliptice odhlédneme-li od nutace zemské osy. Urbain Le Verrier vypočítal, že dalších cca 530'' vzhledem ke hvězdám je způsobeno vlivem ostatních planet.<sup>20</sup> Podle [42, s. 36] se mu nedostávalo 38'' za století, aby jeho výpočty souhlasily s měřením. V roce 1915 Einstein publikoval teoretický vztah pro relativistické stáčení perihelia dráhy Merkuru za jeden oběh kolem Slunce (viz [7, s. 839], [43])

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} = 5.012 \cdot 10^{-7}, \quad (12)$$

kde  $T = 7.6 \cdot 10^6$  s je oběžná doba,  $a = 57.909 \cdot 10^9$  m je délka hlavní poloosy a  $e = 0.2056$  excentricita dráhy Merkuru. Odtud vyplývá hodnota stáčení  $43'' = \varepsilon \cdot \tau \cdot 3600'' \cdot 180/(\pi T)$  za 3 155 814 954 s, tj. za století.

Podle OTR lze stáčení perihelia popsát Einsteinovým vztahem (12), který ale nebyl odvozen jako důsledek Einsteinových rovnic<sup>21</sup> (ve smyslu implikace (10)  $\Rightarrow$  (12)). Důvodem je skutečnost, že Einstein získal vztah (12) z (10) pomocí celé řady zjednodušení<sup>22</sup>, např. metrický tenzor prezentuje v jistém speciálním tvaru a zanedbává mnoho členů vyššího řádu [7, s. 834]. Merkur nahrazuje hmotným bodem, o němž předpokládá, že prostoročas nezakřivuje. Aproximuje jistý eliptický integrál, pro který neznáme analytické vyjádření<sup>23</sup> apod. Místo nesmírně komplikované soustavy diferenciálních rovnic (10) se zabývá jednoduchým algebraickým vztahem (12) bez zaručených odhadů chyby.

<sup>20</sup>Protože oběžné doby planet nejsou v poměru malých celých čísel, posouvá se perihelium Merkuru dosti nepravidelně. Pro jiné století tak můžeme dostat jinou hodnotu. Přitom je třeba vzít v úvahu i chybu modelu Newtonovy nebeské mechaniky, slapové síly, vliv magnetického pole rotujícího Slunce, diskretizační chybu při Le Verrirově aproximaci nekonečných řad konečnými součty, chyby v určení souřadnic a fyzikálních konstant, zaokrouhlovací chyby, nestabilitu problému  $N$  těles atd.

<sup>21</sup>Naproti tomu Friedmannova rovnice byla odvozena z Einsteinových rovnic na maximálně symetrických varietách pomocí rigorózního matematického postupu, tj. (10) + symetrie  $\Rightarrow$  (2).

<sup>22</sup>Kosmologická konstanta  $\Lambda$  se předpokládá nulová, neuvažuje se gravitační aberace, strhávání prostoročasu rotujícím Sluncem, zploštění a záření Slunce atd.

<sup>23</sup>Podle Anatolije A. Vaňkova [43] se jedná o špatně podmíněnou úlohu. Jiné aproximace eliptického integrálu dávají obecně hodnoty lišící se od 43'' za století.

Další jednoduché algebraické vztahy se testují i mimo Sluneční soustavu. U vzdálených binárních pulzarů se měří zkracování oběžné doby či stáčení přímky apsid (tj. spojnice periastra a apoastra), aby se »prověřila« platnost (10) v silných gravitačních polích. Nesmíme ale zapomínat, že vzdálenosti obou složek jsou obvykle řádově jen 0.01 au, tj. opět jsme jen na škálách Sluneční soustavy.<sup>24</sup> Nezanedbatelný vliv mají i magnetická pole pulzarů dosahující až  $10^{11}$  T (Slunce má  $10^{-4}$  T).

**g) Gravitační čočky.** Zakřivení dráhy fotonu letícího tečně k povrchu Slunce je dáno relativistickým vztahem [16, s. 34]

$$\phi = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}}, \quad (13)$$

kde  $M_{\odot} = 1.988\,547 \cdot 10^{30}$  kg je hmotnost Slunce a  $R_{\odot} = 695\,508$  km jeho poloměr. Dosazením dostaneme  $\phi = 1.75''$ , což je v naprostém v souladu s měřením.

Na galaktických škálách také pozorujeme ohyb světla galaktickými gravitačními čočkami (např. Einsteinův prsteneček). Opět ale nelze přesně testovat platnost (10) pomocí jednoduchých algebraických vztahů, jako je (13), když ani neznáme přesné rozložení hmoty uvnitř galaxií.

**h) Pozorovaná repulzivní síla.** V OTR se předpokládá, že  $\Lambda$  je univerzální fyzikální konstanta. Pak je kovariantní divergence levé i pravé strany Einsteinových rovnic (10) nulová a podle teoremu Emmy Noetherové platí zákon zachování energie a hybnosti. Odkud se ale bere energie na zrychlené rozpínání vesmíru? V [27] předkládáme deset argumentů ukazujících, že se samotná Sluneční soustava v průměru nepatrně rozpíná, tj. zákon zachování energie se zdá být mírně narušen, přičemž energie se pozvolna generuje.<sup>25</sup> Přitom planety Sluneční soustavy jsou dostatečně izolovány od vlivu dalších hvězd. Např. na Zemi působí nejbližší hvězda Proxima Centauri<sup>26</sup> vzdálená 4.243 světelných let cca milionkrát menší gravitační silou než Venuše, přičemž jeden světelný rok je  $9.46 \cdot 10^{15}$  m.

## 6. Závěr

V [23] a [25] předkládáme argumenty, které si každý může přepočítat na základě nově naměřených dat, že temné hmoty není 5–6krát více než hmoty baryonové, jak se uvádí na obr. 5. Pavel Kroupa v [21] a [22] uvádí dokonce desítky důvodů, proč by temná hmota neměla existovat. V současnosti dramaticky roste počet článků zpochybňujících existenci temné hmoty, viz např. [2], [11], [12], [15], [19], [31], [33], [41], či zrychlené rozpínání vesmíru, viz např. [1], [10], [29], [32], [39].

Často se píše, že OTR je prověřena s přesností vyšší než 99%. Taková tvrzení je ale třeba přijímat obezřetně, zejména když se zanedbávají tisíce členů v soustavě (10) a netestuje se její platnost na kosmologických vzdálenostech. Pokud by Friedmannova

<sup>24</sup>Podobně červený gravitační posuv hvězd vzniká zejména v jejich bezprostřední blízkosti a ve vzdálenosti několika au od hvězdy se už prakticky nemění.

<sup>25</sup>P. Kroupa v [22] připouští, že také veškerá hmota nemusela vzniknout během Velkého třesku. Naproti tomu ve Friedmannově modelu zůstává celková hmotnost všech částic v čase konstantní.

<sup>26</sup>Pro představu uvedme, že pokud bychom zmenšili Slunce o průměru  $1.391016 \cdot 10^9$  m na velikost pingpongového míčku o průměru 3.7 cm, pak by Proxima Centauri byla vzdálena více než 1000 km. Tak řídká je naše Galaxie.



rovnice dobře popisovala rozpínání vesmíru, jen těžko by soudobý  $\Lambda$ CDM kosmologický model mohl mít tolik závažných problémů: problém existence jakési záhadné neviditelné temné hmoty a ještě záhadnější temné energie, problém horizontu, problém homogenity a izotropie vesmíru, problém plochosti vesmíru, problém přesného nastavení počátečních podmínek, problém hierarchických struktur, problém existence černých veleděr v raném vesmíru či problém samotného Velkého třesku. Další paradoxy a nesrovnalosti lze nalézt např. v [22] a [27]. Měli bychom se tedy zamyslet nad tím, zda má i nadále smysl prosazovat současný kosmologický model vykazující spoustu nedostatků či hledat jiné alternativy.

Pokud vás však zaujal alespoň jeden odstavec, tak článek splnil svůj účel.

**Poděkování.** Autor děkuje Ing. A. Dvořákovi, RNDr. J. Maršákovi, CSc., RNDr. M. Prágerovi, CSc., Ing. V. Novotnému, prof. L. Somerovi, PhD., a RNDr. E. Vitáskovi, CSc., za podnětné diskuze a odbornou literaturu. Práce byla podpořena RVO 67985840.

## L i t e r a t u r a

- [1] BALÁZS, L. G., et al.: *A possible interrelation between the estimated luminosity distances and the internal extinctions of type Ia supernovae*. *Astronom. Nachr.* 327 (2006), 917–924.
- [2] BANHATTI, D. G.: *Newtonian mechanics & gravity fully model disk galaxy rotation curves without dark matter*. Dostupné z arXiv: 0806.1131 (2008), 1–6.
- [3] BRANDER, D.: *Isometric embeddings between space forms*. Master Thesis. Univ. of Pennsylvania, 2003, 1–48.
- [4] CARROLL, S. M., PRESS, W. H., TURNER, E. L.: *The cosmological constant*. *Ann. Rev. Astronom. Astrophys.* 30 (1992), 499–542.
- [5] DAVIS, T. M., LINEWEAVER, C. H.: *Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe*. *Publ. Astronom. Soc. Australia* 21 (2004), 97–109.
- [6] EINSTEIN, A.: *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*. *Ann. Phys.* 35 (1911), 898–908.
- [7] EINSTEIN, A.: *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*. *Königlich-Preuß. Akad. Wiss. Berlin* (1915), 831–839. (English translation *Explanation of the perihelion motion of Mercury from general relativity theory* by R. A. Rydin with comments by A. A. Vankov, 1–34.)
- [8] EINSTEIN, A.: *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*. *Königlich-Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1917), 142–152.
- [9] EISENSTEIN, D. J., BENNETT, C. L.: *Cosmic sound waves rule*. *Phys. Today* 61 (2008), 44–50.
- [10] FARLEY, F. J. M.: *Does gravity operate between galaxies? Observational evidence re-examined*. *Proc. Roy. Soc. A* 466 (2010), 3089–3096.
- [11] FENG, J. Q., GALLO, C. F.: *Mass distribution in rotating thin-disk galaxies according to Newtonian dynamics*. *Galaxies* 2 (2014), 199–222.
- [12] FENG, J. Q., GALLO, C. F.: *Deficient reasoning for dark matter in galaxies*. *Phys. Internat.* 6 (2015), 1–12.

- [13] FRIEDMAN, A.: *Über die Krümmung des Raumes*. Z. Phys. 10 (1922), 377–386. (English translation: *On the curvature of space*. Gen. Relativity Gravitation 31 (1999), 1991–2000.)
- [14] FRIEDMANN, A.: *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*. Z. Phys. 21 (1924), 326–332. (English translation: *On the possibility of a world with constant negative curvature of space*. Gen. Relativity Gravitation 31 (1999), 2001–2008.)
- [15] GALLO, C. F., FENG, J. Q.: *Galactic rotation described by a thin-disk gravitational model without dark matter*. J. Cosmol. 6 (2010), 1373–1380.
- [16] HORSKÝ, J., NOVOTNÝ, J., ŠTEFANÍK, M.: *Úvod do fyzikální kosmologie*. Academia, Praha, 2004.
- [17] HUBBLE, E.: *Cepheids in spiral nebulae*. The Observatory 48 (1925), 139–142.
- [18] HUBBLE, E.: *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 15 (1929), 168–173.
- [19] JALOCHA, J., BRATEK, L., KUTSCHERA, M.: *Is dark matter present in NGC 4736? An iterative spectral method for finding mass distribution in spiral galaxies*. Astrophys. J. 679 (2008), 373–378.
- [20] KOWALSKI, O., KRÍŽEK, M., PRAVDA, V.: *Nejsymetričtější variety*. PMFA 59 (2014), 135–145.
- [21] KROUPA, P.: *Local-group tests of dark-matter concordance cosmology*. Dostupné z arXiv: 1006.16473v3 (2010), 1–26.
- [22] KROUPA, P.: *The dark matter crisis: Falsification of the current standard model of cosmology*. Publ. Astronom. Soc. Australia 29 (2012), 395–433.
- [23] KRÍŽEK, F., KRÍŽEK, M.: *Vera Rubinová a rotační křivky spirálních galaxií*. PMFA 59 (2014), 223–236.
- [24] KRÍŽEK, M., NEITTAANMÄKI, P.: *Mathematical and numerical modelling in electrical engineering: Theory and applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [25] KRÍŽEK, M., KRÍŽEK, F., SOMER, L.: *Which effects of galactic clusters can reduce the amount of dark matter*. Bulg. Astronom. J. 21 (2014), 1–23.
- [26] KRÍŽEK, M., SOMER, L.: *A critique of the standard cosmological model*. Neural Netw. World 24 (2014), 435–461.
- [27] KRÍŽEK, M., SOMER, L.: *Manifestations of dark energy in the Solar System*. Gravit. Cosmol. 21 (2015), 58–71.
- [28] LENSE, J., THIRRING, H.: *Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie*. Phys. Z. 19 (1918), 156–163.
- [29] MÉSZÁROS, A.: *On the reality of the accelerating universe*. Astrophys. J. 580 (2002), 12–15.
- [30] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A.: *Gravitation*. 20th edition, W. H. Freeman, New York, 1997.
- [31] MONI BIDIN, C., CARRARO, G., MÉNDEZ, R. A., SMITH, R.: *Kinematical and chemical vertical structure of the Galactic thick disk, II. A lack of dark matter in the solar neighborhood*. Astrophys. J. 751 (2012), 30, 14 pp.
- [32] NIELSEN, J. T., GUFFANTI, A., SARKAR, S.: *Marginal evidence for cosmic acceleration from type Ia supernovae*. Dostupné z arXiv: 1506.01354v2 (2015), 1–5.

- [33] NICHOLSON, K. F.: *Galactic mass distribution without dark matter or modified Newtonian mechanics*. Dostupné z arXiv: astro-ph/0309762v2 (2007), 1–16.
- [34] PERLMUTTER, S.: *Supernovae, dark energy, and the accelerating universe*. Phys. Today 56 (2003), April, 53–60.
- [35] PILIPENKO, S. V.: *Paper-and-pencil cosmological calculator*. Dostupné z arXiv: 1303.5961v1 (2013), 1–4.
- [36] Planck Collaboration: *Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results; XVI. Cosmological parameters; XX. Cosmology from Sunyaev–Zeldovich cluster counts*. Dostupné z arXiv: 1303.5062, arXiv: 1303.5076v1, arXiv: 1303.5080v2.
- [37] REKTORYS, K.: *Přehled užité matematiky I*. Šesté vydání, Prometheus, Praha, 1995.
- [38] RIESS, A. G., et al.: *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. Astronom. J. 116 (1998), 1009–1038.
- [39] ROWAN-ROBINSON, M.: *Do type Ia supernovae prove  $\Lambda > 0$ ?* Mon. Not. R. Astron. Soc. 332 (2002), 352–360.
- [40] SHAPIRO, I. I.: *Fourth test of general relativity*. Phys. Rev. Lett. 13 (1964), 789–791.
- [41] SIKORA, S., BRATEK, L., JALOCHA, J., KUTSCHERA, M.: *Gravitational microlensing as a test of a finite-width disk model of the Galaxy*. Astronom. Astrophys. 546 (2012), A126, 9 pp.
- [42] TISSERAND, M. F.: *Les travaux de Le Verrier*. Ann. Observ. Paris XV (1880), 23–43.
- [43] VANKOV, A. A.: *General relativity problem of Mercury’s perihelion advance revisited*. Dostupné z arXiv: 1008.1811v1 (2010), 1–46.
- [44] VINBERG, E. B. (ed.): *Geometry I, II*. I. Geometry of spaces of constant curvature, II. Discrete groups of motions of spaces of constant curvature. Springer, Berlin, 1991.
- [45] WEINBERG, S.: *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, New York, London, 1972.
- [46] WEINBERG, S.: *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [47] WOLF, J. A.: *Spaces of constant curvature*. Sixth edition, Amer. Math. Soc., 1984.