Ladislav Kvasz

Jazyk matematiky, jeho zmeny a didaktika matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 58 (2013), No. 4, 315--325

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/143725`

Jazyk matematiky, jeho zmeny a didaktika matematiky

Ladislav Kvasz, Praha

Jazyk matematiky prešiel v priebehu tisícročí trvajúceho vývinu tejto disciplíny mnohými zásadnými zmenami. Cieľom predkladanej state je opísať charakteristické črty jedného typu týchto zmien a poukázať na ich dôsledky pre vyučovanie matematiky. Sme presvedčení, že mnohé konflikty a nedorozumenia pri vyučovaní matematiky súvisia práve so zmenami jazyka. Preto porozumenie zákonitostí zmien jazyka matematiky a uvedomenie si dôsledkov týchto zmien by mohlo pomôcť lepšie porozumieť mysleniu našich študentov a snáď aj lepšie učiť.

Roku 2012 vyšla vo vydavateľstve Filosofia knižka *Jazyk a zmena – ako sme menili jazyk matematiky a ako jazyk matematiky zmenil nás* [12]. Jej cieľom bolo opísať mechanizmus vývinu jazyka matematiky a nepriamo predstaviť prístup k dejinám matematiky prostredníctvom analýzy zmien jej jazyka. Tento prístup sa zakladá na pozorovaní, že mnohé z významných objavov v matematike sú spojené s určitou lingvistickou inováciou. Matematici ako Descartes, Newton, Frege či Gödel sú okrem prelomových matematických objavov aj autormi významných zmien v jazyku matematiky.

V predkladanej stati si kladieme za cieľ stručne predstaviť hlavné myšlienky uvedenej knihy a poukázať na ich dôsledky pre didaktiku matematiky. Najprv uvedieme šesť aspektov, ktoré charakterizujú vývin jazyka matematiky z kognitívneho hľadiska. Keď tvrdíme, že zmyslom vyučovania matematiky je rozvíjať myslenie žiakov, tomuto tvrdeniu možno dať presnejší obsah práve prostredníctvom **kognitívnych aspektov**, ako sú: *logická sila, expresívna sila, metodická sila, integratívna sila, explanatorická sila a konštitutívna sila*[1]. V druhej časti state na príklade jazyka algebry ukážeme, ako sú tieto kognitívne aspekty v jazyku utvárané prostredníctvom určitých **lingvistických inovácií**. V tretej časti state sa pokúsime zo znalosti kognitívnych aspektov a s nimi zviazaných lingvistických inovácií vyvodiť určité dôsledky pre **didaktiku matematiky**. Tieto dôsledky súvisia s rozdielnym spôsobom chápania matematiky

[1] Konštitutívnu silu jazyka matematiky by bolo možné nazvať aj *metaforickou silou*, lebo umožňuje zaviesť nové objekty, ako napríklad komplexné čísla. Z pohľadu predchádzajúceho jazyka takéto objekty je možné považovať za objekty nanajvýš v *metaforickom zmysle*. Postupne si však matematici na tieto nové objekty zvykli a po čase ich zrovnoprávnili s pôvodnými objektmi. Ich metaforický charakter sa vytratil a ony sa stali objektmi *konštituovanými* jazykom. Preto uprednostňujeme túto potencialitu nazývať *konštitutívnou silou*.

Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr., Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha a Filosofický ústav Akademie věd České republiky, Jilská 1, 110 00 Praha, e-mail: kvasz@pedf.cuni.cz

učiteľom, u ktorého sú príslušné lingvistické inovácie završené a zodpovedajúce kognitívne aspekty plne rozvinuté, a žiakom, ktorý inováciami prechádza a aspekty sú uňho v procese konštitúcie. Naša stať rozvíja niektoré motívy načrtnuté v práci [4] tým, že ich zasadzuje do kontextu vývinu jazyka.

1. Potenciality jazyka matematiky

Matematika je považovaná za jazyk vedy, za nástroj, pomocou ktorého disciplíny ako fyzika či ekonómia dosahujú exaktnosť. Preto si často neuvedomujeme, že aj samotná matematika má jazykový rozmer: ten istý matematický obsah môže byť vyjadrený mnohými spôsobmi.[2] V textoch pochádzajúcich z rôznych úsekov minulosti je rovnaký matematický obsah často vyjadrený značne odlišnými spôsobmi. Jazyk, v ktorom sú príslušné texty sformulované, sa zmenil. Skúmaním rôznych zmien jazyka sme postupne dospeli k zoznamu šiestich **kognitívnych aspektov** jazyka matematiky, pomocou ktorých je možné opísať vývin matematiky. Kvôli prehľadnosti ich stručne opíšeme:

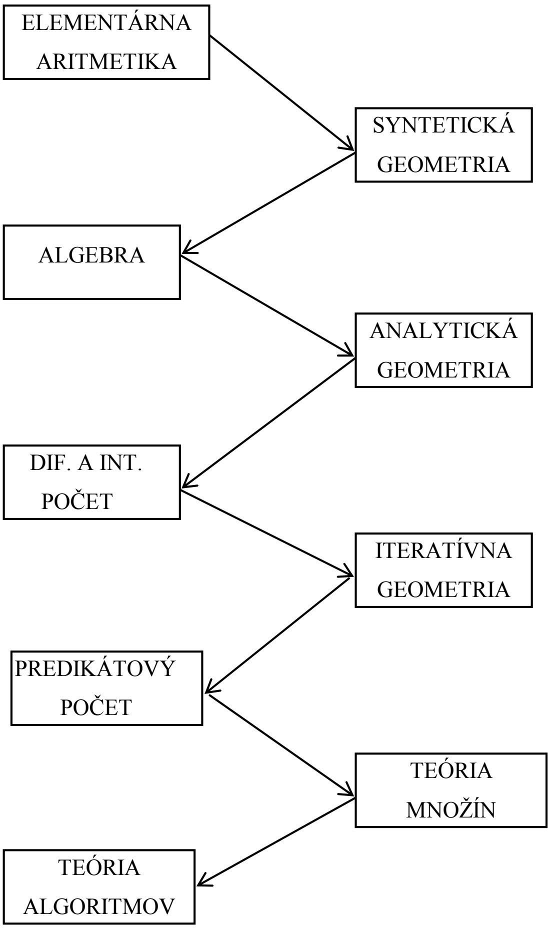
1. *logická sila jazyka* ukazuje, aké zložité formuly je možné v jazyku dokázať;
2. *expresívna sila jazyka* ukazuje, čo nového, čo sa v predošlých štádiách vymykalo vyjadreniu, teraz jazyk umožňuje vyjadriť;
3. *metodická sila jazyka* ukazuje, aké nové metódy je možné v jazyku zaviesť tam, kde na predošlých štádiách existovala iba spleť nesúvisiacich trikov;
4. *integratívna sila jazyka* ukazuje, ako jazyk umožňuje vidieť jednotu a poriadok tam, kde na báze predošlého jazyka sa ukazovali len navzájom nesúvisiace prípady;
5. *explanatorická sila jazyka* ukazuje, ako nový jazyk umožňuje vysvetliť zlyhania jazyka, ktoré boli na predošlom štádiu nepochopiteľné;
6. *konštitutívna sila jazyka* ukazuje, ako nový jazyk umožňuje prekročiť medze skutočnosti danej v rámci predošlého jazyka a konštituovať radikálne nový druh objektov.

Tieto kognitívne aspekty nazývame **potenciality jazyka** a ich podrobnejší výklad je obsiahnutý v prvej časti knihy *Patterns of Change* [7, s. 14–17]. Je dôležité si uvedomiť, že tieto aspekty predstavujú objektívne črty jazyka. Odpoveď na otázky, „aké tvrdenia je v jazyku možné dokázať“, „aké vzťahy je v ňom možné vyjadriť“, „aké problémy umožňuje vyriešiť“ či „aké súvislosti umožňuje odhaliť“, je objektívne daná vlastnosťami jazyka určitého historického obdobia. Jazyk matematiky má v každej dobe svoje syntaktické a sémantické pravidlá, ktoré jednoznačne určujú, aká je jeho logická, expresívna, metodická, integratívna, explanatorická a konštitutívna sila.

V histórii matematiky sa zatiaľ podarilo rozlíšiť deväť rôznych jazykov, ktoré môžeme zhrnúť do tabuľky uvedenej nižšie. Tak v starovekom Egypte či Babylone sa

[2] Vzťah matematiky a jazyka je zložitý problém, ktorého analýza by si vyžiadala samostatný článok. Matematiku nie je možné redukovať na jej jazykové vyjadrenie – práca tvorivého matematika sa opiera o celý rad mimojazykových schopností, ako sú priestorová predstavivosť, intuícia či schopnosť abstrakcie. Na druhej strane nemožno popierať že rôzne jazykové prostriedky (vo forme symbolických alebo ikonických jazykov) hrajú v rozvoji matematiky významnú úlohu. Aby sme zdôraznili význam jazyka, ale aby sme nenavodzovali predstavu redukcie matematiky na jazyk, hovoríme o jazykovom rozmere (a nie o jazykovom charaktere) matematiky. O týchto filozofických otázkach píšeme v statiach [9, 11].

jazyk matematiky v podstate redukoval na jazyk *elementárnej aritmetiky*, v antickom Grécku bol vytvorený jazyk *syntetickej geometrie*, a Arabi v deviatom storočí položili základy jazyka *algebry*. Po renesancii západnej civilizácie sa postupne zrodil jazyk *analytickej geometrie*, jazyk *diferenciálneho a integrálneho počtu*, jazyk *iteratívnej geometrie*, jazyk *predikátového počtu*, jazyk *teórie množín* a jazyk *teórie algoritmov*. Keď v tomto článku hovoríme o jazyku matematiky, myslíme tým jeden zo súborov pravidiel na manipuláciu so symbolmi alebo na generovanie obrazcov uvedený v nasledujúcej tabuľke [7, s. 86].[3]



Dá sa povedať, že každý z deviatich jazykov uvedených v tabuľke obohatil matematiku o možnosť opisu nového druhu objektov. Jazyk algebry umožnil zaviesť polynómy, jazyk analytickej geometrie priniesol celý rad nových kriviek, jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu umožnil zaviesť funkcie. Tieto rozšírenia univerza matematiky

[3] Keby sme chceli byť úplne presní, museli by sme do každého obdĺžnika tabuľky dopísať slovo „jazyk“ (teda namiesto „Elementárna aritmetika“ napísať „Jazyk elementárnej aritmetiky“, namiesto „Syntetická geometria“ napísať „Jazyk syntetickej geometrie“ atď.). To by však tabuľku zbytočne roztiahlo. Veríme, že čitateľ si deväť výskytov slovka „jazyk“ v duchu doplní.

šli ruka v ruke so zavedením nových druhov pravidiel, ako sú pravidlá substitúcie či pravidlá derivovania súčinu funkcií, ktoré obohatili jazyk matematiky o nové výrazové možnosti.[4]

Vývin jazyka matematiky spočíva v raste jeho *logickej a expresívnej sily.* Neskoršie štádiá rozvoja jazyka matematiky umožňujú dokázať stále silnejšie vety a opísať stále širší okruh javov. *Metodická a integratívna sila* tiež postupne narastá. Neskoršie štádiá rozvoja jazyka umožňujú vyriešiť širšie triedy problémov prostredníctvom štandardných metód a v príslušnej disciplíne odkrývajú stále vyšší stupeň jednoty. *Explanatorická a konštitutívna sila* jazyka tiež narastá. Neskoršie štádiá rozvoja jazyka ponúkajú stále hlbšie porozumenie svojich metód (predovšetkým čo sa týka ich hraníc) a prinášajú stále bohatšie univerzá objektov. Uvedených šesť aspektov nazývame *potencialitami jazyka matematiky*, lebo predstavujú rôzne smery, v ktorých jazyk rozširuje naše kognitívne schopnosti. Domnievame sa, že je to práve rozvíjanie uvedených potencialít jazyka, ktoré dáva vyučovaniu matematiky jeho význam. Tým, že si žiak osvojí jazyk elementárnej aritmetiky, syntetickej geometrie či algebry, jeho mysleniu sa otvoria nové horizonty. Potenciality jazyka charakterizujú rôzne smery či aspekty tohto kognitívneho rastu.

2. Spôsob konštitúcie potencialít jazyka

Po objasnení toho, ako jazyk matematiky otvára nášmu mysleniu nové možnosti, ukážeme na príklade algebry, ako sú tieto kognitívne aspekty jazyka matematiky vytvárané. Na tomto konkrétnom príklade budeme ilustrovať mechanizmus, ktorý sa v dejinách matematiky znova a znova opakoval a viedol ku vzniku celého radu symbolických jazykov od počtov a algebry až po symbolickú logiku. Naša téza je, že v každom symbolickom jazyku je možné rozlíšiť jeho šesť zložiek či aspektov, ktoré konštituujú príslušné potenciality jazyka.

2.1. Logická sila jazyka a spôsob vyjadrenia všeobecnosti

Logická sila jazyka algebry je v [7] charakterizovaná jeho schopnosťou dokázať tvrdenia, ako je neskonštruovateľnosť pravidelného sedemuholníka pomocou kružidla a pravítka alebo neriešiteľnosť rovnice piateho stupňa v radikáloch. Algebra je schopná dokázať tvrdenia tohto typu, lebo jej jazyk dokáže explicitne vyjadriť postup riešenia. Napríklad *skonštruovateľnosť* pomocou kružidla a pravítka dokáže vyjadriť ako postupnosť kvadratických rozšírení. Súbor všetkých geometrických konštrukcií sa tak stáva algebraickým objektom (poľom) a neskonštruovateľnosť sa stáva vlastnosťou vyjadriteľnou v jazyku (neprináležanie určitej veličiny tomuto poľu).

---

[4]Tabuľka deviatich typov jazyka, ktoré sa zrodili v priebehu dejín matematiky, vykazuje pozoruhodnú polaritu. Jazyky uvedené v ľavom stĺpci sú symbolické (súvisia s manipuláciou so symbolmi), jazyky uvedené v pravom stĺpci sú ikonické (súvisia so spôsobom tvorby obrazových reprezentácií). V knihe [7] sa podrobnejšie venujeme prechodom medzi týmito typmi jazykov, ktoré sú v tabuľke znázornené šípkami. Šípky smerujúce zľava doprava predstavujú proces vizualizácie, akým bol napríklad Descartov vynález možnosti vizualizovať polynómy (ktoré boli do r. 1637 symbolickými objektmi, bez akejkoľvek vizuálnej reprezentácie) vo forme algebraických kriviek. Šípky smerujúce zprava doľava predstavujú proces symbolizácie, akým bol napríklad Leibnizov vynález symbolicky zachytiť krivky analytickej geometrie vo forme funkcií. Funkcie je možné sčítať, násobiť či derivovať, čo pre krivky nie je vôbec jednoduché.

Jazyk algebry môžeme charakterizovať ako jazyk prinášajúci objektové premenné. Sú to tieto premenné, ktoré zakladajú schopnosť jazyka dokázať tvrdenia, ako je veta o neskonštruovateľnosti určitých geometrických útvarov pomocou kružidla a pravítka. *Logickú silu jazyka* možno tak dať do súvisu so zavedením nového druhu symbolov. V algebre sú to symboly pre objektové premenné $x, y, z, \dots$, v matematickej analýze symboly pre funkcionálne premenné $f, g, \dots$

2.2. Expresívna sila jazyka a spôsob generovania komplexnosti

Keď al-Chwárizmí zaviedol pre neznámu termín *šaj* (s významom *vec*), pre jej druhú mocninu termín *mál* (s významom majetok, chápaný ako pozemok) a pre tretiu mocninu *káb* (s významom *kocka*), je zrejmé, že vychádzal z geometrického chápania mocniny. Pri dôkazoch *šaj* reprezentoval úsečkou, *mál* štvorcom a *káb* kockou. Geometer by sa tu zastavil. Al-Chwárizmí však išiel ďalej a vytvoril *mál-mál*, *káb-mál*, *káb-káb* … Síce nevedel, čo tieto symboly označujú (pre vyššie mocniny neznámej nedisponoval geometrickou interpretáciou), rodiaci sa jazyk algebry mu však umožnil prelomiť medze trojrozmerného priestoru, do ktorého bola zovretá antická geometria.

Výsledok, ktorým európska matematika po prvý raz prekročila úroveň antickej matematiky a ktorý možno považovať za ilustráciu expresívnej sily jazyka algebry, je vyriešenie rovníc tretieho a štvrtého stupňa. Tieto riešenia boli publikované roku 1545 Girolamom Cardanom v *Ars Magna Sive de Regulis Algebraicis.* Cesta, ktorá k nim viedla, bola otvorená *zavedením vyšších mocnín neznámej.* Riešiť rovnice tretieho a štvrtého stupňa prostriedkami euklidovskej geometrie je nemožné.

Expresívna sila jazyka súvisí so zavedením operácie, ktorú je možné neobmedzene iterovať. V algebre je to operácia umocňovania $x, x^2, x^3, x^4, \dots$, v matematickej analýze je to operácia derivovania $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x, \mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2, \mathrm{d}^3f/\mathrm{d}x^3, \mathrm{d}^4f/\mathrm{d}x^4, \dots$ Pre niekoľko prvých iterácií tejto operácie máme sémantické ukotvenie (x je dĺžka, x^2 obsah, x^3 objem; prvá derivácia je rýchlosť, druhá derivácia zrýchlenie). Ďalšie iterácie však opúšťajú túto interpretáciu a pokračujú čisto formálne.

2.3. Metodická sila jazyka a zavedenie parametrov

Pojem *metodickej sily jazyka* sa v *Patterns of Change* nevyskytuje, zaviedli sme ho v [10]. Príkladom ilustrujúcim metodickú silu jazyka je analytická metóda, ktorú vytvoril Viète v *In Artem Analyticam Isagoge* [17]. Je to metóda určená na riešenie ľubovoľného problému a zakladá sa na tom, že v probléme, ktorý chceme riešiť, označíme *neznáme i známe veličiny* písmenami, zapíšeme vzťahy medzi nimi pomocou rovníc a potom úpravou rovníc hľadáme vyjadrenie neznámych pomocou známych. Pôvodne sa v algebre písmená používali iba na zápis neznámych, kým koeficienty rovníc sa zadávali pomocou konkrétnych čísel. Viètovou ideou bolo použiť *všeobecnosť*, ktorú prinieslo zavedenie symbolov pre premenné, aj pri opise toho, čo poznáme. Viète tak konkrétne hodnoty, vystupujúce v zadaní určitej úlohy, nahradil písmenami, čím vytvoril nový druh syntaktických objektov – parametre.

Viètova metóda súvisí so schopnosťou jazyka vyjadriť *rozdiel medzi tým, čo poznáme, a tým, čo hľadáme.* Parametre označujú veličiny, ktoré poznáme, neznáma označuje veličinu, ktorú hľadáme. Metodická sila jazyka súvisí so zavedením konvencie, ktorá zodpovedá tomuto *epistemologickému rozlíšeniu.* V algebre je to rozdiel medzi neznámymi a parametrami $(x, y, z/a, b, c)$, v analýze rozdiel medzi hodnotou premennej a odchýlkou od tejto hodnoty (x/h). Aspektom, ktorý zakladá metodickú silu jazyka, je tak *zavedenie symbolov rôznej epistemologickej kvality.*

2.4. Integratívna sila jazyka a viazanie termov do foriem

Zavedenie nového druhu *symbolov* zakladá *logickú silu* jazyka. Z týchto symbolov sa pomocou operácií vytvorili *zložené výrazy*, ktoré zakladajú *expresívnu silu* jazyka. V treťom kroku sa zložené výrazy skombinovali s parametrami, čím vznikli *termy*, ktoré zakladajú metodickú silu jazyka. Jazyk získal bohatstvo výrazových možností, ale platí za to roztrieštenosťou, neprehľadnosťou a zložitosťou. Štvrtou potencialitou jazyka je *integratívna sila*, ktorá predstavuje schopnosť jazyka nachádzať jednotu tam, kde predošlé štádiá ukazovali iba nesúvisiace prípady. Integratívnu silu jazyka zakladá *spájanie termov do foriem.* Toto spájanie vedie ku vzniku nového druhu objektov, ako sú polynómy alebo matice. Zavedenie polynómov, na rozdiel od zavedenia zložených výrazov, neprebieha v „dialógu“ s realitou, na opis ktorej jazyk slúži. Nejde o *predĺženie* už existujúcej postupnosti za hranice, ktoré zväzovali jazyk na predošlých štádiách. Integratívna sila jazyka prináša úplne nový druh objektov, aký *v realite vôbec nenachádzame.*[5]

Ako ilustráciu integratívnej sily jazyka algebry uvedieme myšlienku Michaela Stifela, vedúcu k zavedeniu polynomických foriem. Pred Stifelom matematici rozlišovali tri typy kubických rovníc: $x^3 + ax = b$; $x^3 + b = ax$ a $x^3 = ax + b$, a každý typ riešili samostatne, pomocou postupu určeného špeciálne pre daný typ.[6] Príčinou oddeleného riešenia týchto typov rovníc bol fakt, že algebraici 16. storočia pripúšťali ako koeficienty iba kladné čísla. Stifel v knihe *Arithmetica integra* roku 1544 prišiel s myšlienkou zlúčiť tieto tri typy rovníc do jednotného tvaru $x^3 + ax + b = 0$ tým, že pripustil, aby koeficienty v rovniciach nadobúdali aj záporné hodnoty. Na základe toho sa postupne presadilo písanie rovníc s nulou na pravej strane.[7] Takto došlo ku „zrasteniu“ či integrácii jednotlivých termov do objektu nového druhu – polynomickej formy. Polynóm je objekt nového druhu a na prácu s ním sú potrebné nové operácie: sčítanie, odčítanie a násobenie polynómov.

Keď chceme nájsť aspekt jazyka, ktorý integráciu termov do polynomickej formy umožňuje, nie je ťažké si uvedomiť, že ním je schopnosť jazyka upraviť súbor termov na štandardný tvar (začínajúc najvyššou mocninou, za koeficienty zvoliť parametre, ...)

[5] V knihe *Patterns of Change* sme ako ilustráciu integratívnej sily jazyka algebry uviedli analytickú metódu. Bolo to spôsobené tým, že v čase písania knihy sme si neuvedomovali existenciu metodickej sily jazyka, a preto to, čo je v skutočnosti ilustráciou metodickej sily, sme použili ako ilustráciu integratívnej sily. Analytická metóda prináša do matematiky vysokú mieru jednoty (stačí porovnať algebru s Euklidovou geometriou, aby sme si uvedomili nesystematický charakter Euklidových postupov). Avšak jednota, ktorú prináša analytická metóda, je „vedľajším produktom“ metodickej sily jazyka. Preto po zavedení metodickej sily jazyka musíme nájsť inú ilustráciu integratívnej sily jazyka algebry.

[6] Člen s x^2 možno odstrániť pomocou lineárnej substitúcie, takže skutočne ostávajú iba tieto tri typy.

[7] Tento posun mal zásadný význam pre vznik analytickej geometrie, lebo umožnil na miesto 0 dať y, a tak *polynomickú formu* (kanonickú podobu určitého výrazu) pochopiť ako *polynomickú funkciu.* Pritom je obzvlášť uspokojivé ilustrovať integratívnu silu jazyka práve myšlienkou zo Stifelovej knihy *Arithmetica integra.* Názov naznačuje, že si Stifel integratívnu silu jazyka algebry mohol skutočne uvedomovať.

a tieto štandardizované výrazy uchopiť ako objekty nového druhu. Stifel pri tvorbe polynómu *spojil formálne podobné, ale sémanticky nesúvisiace výrazy.* Preto je polynóm formálny objekt. Jednota prípadov, ktoré spája, nie je obsahová, ale formálna. Na polynómoch založená integratívna sila jazyka spočíva v schopnosti vnášať do sveta jednotu, ktorá má jazykový pôvod – jednotu, ktorú nemožno vyčítať zo sveta. Analogickým spôsobom vznikajú v matematickej analýze potenčné alebo Fourierove rady.

2.5. Explanatorická sila jazyka a tvorba formálnych predikátov

Nové *formy*, ktoré zakladajú integratívnu silu jazyka, možno použiť na zavedenie nových *predikátov.* Často je pomocou týchto nových predikátov možné *vyjadriť medze predošlého jazyka.* Možnosť v jazyku J_2 (napríklad v jazyku algebry) explicitne vyjadriť medze predošlého jazyka J_1 (jazyka syntetickej geometrie, ktoré boli v jazyku J_1 nevyjadriteľné) umožňuje vysvetliť príčiny zlyhania jazyka J_1. Schopnosť vysvetliť zlyhanie jazyka J_1 zakladá *explanatorickú silu* jazyka J_2. Explanatorická sila jazyka algebry je v *Patterns of Change* charakterizovaná ako schopnosť vysvetliť nemožnosť trisekcie uhla, duplicity kocky a konštrukcie pravidelného sedemuholníka pomocou kružidla a pravítka. Toto vysvetlenie spočíva v nahliadnutí, že euklidovské konštrukcie neumožňujú zostrojiť úsečky, ktorých dĺžka je riešením transcendentnej, lebo ireducibilnej rovnice tretieho stupňa; avšak trisekcia, duplicita aj konštrukcia pravidelného sedemuholníka vyžadujú konštrukciu práve takejto úsečky.

Neriešiteľnosť trisekcie uhla sa v geometrii ukazovala na systematickom zlyhávaní pokusov o jej riešenie prostriedkami Euklidovho kánonu. Geometria však nevedela toto systematické zlyhávanie vysvetliť. Je to preto, lebo v jazyku geometrie nemožno definovať predikát „*koreň ireducibilnej rovnice tretieho stupňa*“, ktorý umožňuje vytýčiť medze jazyka geometrie. Algebra zlyhanie geometrie vysvetliť vie, a toto vysvetlenie je prejavom explanatorickej sily jej jazyka. Predikáty ako „*byť koreňom ireducibilného polynómu tretieho stupňa*“ poskytli jazyku algebry výrazové prostriedky umožňujúce vytýčiť v univerze úsečiek hranicu medzi skonštruovateľnými a neskonštruovateľnými úsečkami.

2.6. Konštitutívna sila jazyka a určité deskripcie

Konštitutívna sila, podobne ako sila metodická, nie je v knihe *Patterns of Change* uvedená. K nutnosti jej zavedenia sme dospeli v stati [10]. Príklady, ktorými sme v uvedenej stati konštitutívnu silu jazyka charakterizovali, však už dnes nepovažujeme za vhodné. Vo väčšine jazykov je možné naraziť na *definovanie nových objektov pomocou určitých deskripcií.* V algebre je príkladom určitej deskripcie definícia čísla ako koreňa určitého polynómu, t.j. operátora *iota*, ktorý z predikátu $p(x) = 0$ vytvorí číslo $\iota x; p(x) = 0$, čo je „to jediné x, pre ktoré platí $p(x) = 0$“.[8] V matematickej analýze je príkladom určitej deskripcie definícia novej funkcie pomocou diferenciálnej rovnice. Každý jazyk prináša osobitý spôsob *definovania nových objektov*, keď z predikátu vytvorí určitú deskripciu.

Pôvodne sme si mysleli, že operáciou, vytvárajúcou konštitutívnu silu jazyka, je inverzná operácia k operácii, ktorá zakladá jeho expresívnu silu. Vo väčšine jazykov

[8]Otázku jednoznačnosti takto definovaného čísla treba samozrejme osobitne ošetriť, keďže daný polynóm má spravidla viac než jeden koreň.

existujú operácie v navzájom inverzných dvojiciach. V aritmetike máme ku sčítaniu odčítanie, v algebre k umocňovaniu odmocňovanie, v matematickej analýze zas k derivovaniu integrovanie. Pritom sú to spravidla práve inverzné operácie, teda odčítanie, odmocňovanie a integrovanie, ktoré si vynucujú rozšírenie oboru indivíduí. Tak operácia odčítania si vynucuje zavedenie záporných čísel, operácia odmocňovania prináša komplexné čísla a operácia integrovania nás núti opustiť obor racionálnych lomených funkcií a zaviesť logaritmus a ďalšie transcendentné funkcie.

Táto prvotná myšlienka je v zásade správna, avšak invertovanie operácie je iba špeciálnym príkladom definovania nových objektov pomocou určitej deskripcie. Napríklad v algebre môžeme $\sqrt{2}$ definovať buď pomocou operácie odmocňovania, čo je operácia inverzná k umocňovaniu, alebo ako $\iota x; x^2 - 2 = 0$ (to jediné kladné reálne číslo x, pre ktoré platí $x^2 - 2 = 0$), to jest pomocou určitej deskripcie obsahujúcej predikát $x^2 - 2 = 0$. Musíme si však uvedomiť, že existuje celý rad polynómov (vlastne je ich drvivá väčšina), ktorých riešenia nie je možné vyjadriť pomocou odmocnín. Takže operácia odmocňovania (a invertovaná operácia vo všeobecnosti) je príliš slabá na to, aby umožnila vytvoriť univerzum jazyka algebry v jeho plnej sile. Pre polynómy však môžeme vytvoriť predikát (t.j. predikát „byť koreňom polynómu $p(x)$“), z neho zodpovedajúcu určitú deskripciu a s jej pomocou zaviesť nové indivíduá. To znamená, že určité deskripcie umožňujú definovať nové objekty aj vtedy, keď tieto objekty nie je možné vyjadriť pomocou odmocnín.

V počiatočných štádiách rozvoja určitej disciplíny sa ako hlavný nástroj konštitutívnej sily jazyka používa invertovanie operácie zakladajúcej expresívnu silu. To umožní *uzavrieť symboliku jazyka* ešte predtým, ako sa jazyk plne rozvinie, teda predtým, ako vzniknú *formy a predikáty.* Plné rozvinutie konštitutívnej sily jazyka však nastane až potom, keď si matematici uvedomia obmedzené možnosti riešenia rovníc pomocou radikálov, riešenia diferenciálnych rovníc pomocou kvadratúr a vo všeobecnosti obmedzenosť postupov založených na invertovaní operácií. Uvedené príklady ukazujú, že definovanie objektov pomocou určitých deskripcií je všeobecnou črtou rozvoja jazyka matematiky.

Konštitutívna sila jazyka spočíva v tom, že sa pomocou *predikátu nového jazyka* zavádzajú objekty nového druhu. Pritom z hľadiska predošlého jazyka príslušnému predikátu žiadny objekt nezodpovedá. Jazyk tu používame na rozšírenie univerza bez toho, aby sme toto rozšírenie mohli legitimizovať prostriedkami predošlého jazyka. Tento krok preto spravidla vyvoláva búrlivé diskusie. Pôvodne boli totiž prostriedky nového jazyka zavedené kvôli efektívnejšiemu opisu objektov, ktoré boli ontologicky ukotvené v univerze predošlého jazyka. Tak algebraická symbolika bola dlho používaná na riešenie rovníc, ktoré vznikajú v praktických úlohách, a riešením rovníc boli racionálne čísla, teda objekty *jazyka aritmetiky.* Preto výsledky algebraických postupov, ktoré nebolo možné aritmeticky interpretovať (záporné či komplexné korene), boli odmietané. Ešte aj Descartes vo svojej *Geometrii* [3] nazýval záporné riešenia rovníc *falošnými riešeniami.* Nakoniec sa však nový jazyk „odpútal“ od predošlého jazyka a na jeho výrazy sa začalo pozerať ako na deskripcie, ktoré konštituujú objekty nezávisle od toho, či v predošlom jazyku máme pre ne oporu alebo nie.

Vo všeobecnosti možno povedať, že konštitutívna sila jazyka súvisí s rozšírením reality o nové objekty, ktoré sú definované pomocou formálnych predikátov. V algebre sú to *komplexné čísla*, v analýze *nikde nediferencovateľné funkcie.* Tieto objekty porušujú obvyklé vlastnosti predmetov príslušného odboru. Preto z hľadiska predošlého jazyka nový objekt nie je naozaj vytvorený a môžeme o ňom hovoriť nanajvýš v metaforickom zmysle.

2.7. Záver

Pre každú zo šiestich potencialít jazyka sa nám podarilo nájsť určitý prvok, ktorý príslušnú potencialitu vytvára. Každý jazyk prináša nový druh *symbolov*, pre ktoré zavádza určitú *formálnu operáciu*. Túto operáciu je možné iterovať, čím vzniká neobmedzená postupnosť *zložených výrazov*. Pre symboly zavedie určité *epistemologické rozlíšenie*, pomocou ktorého v kombinácii s formálnou operáciou vytvorí *termy*. Rôzne výrazy, ktoré je možné vytvoriť kombináciou termov, zjednotí do *foriem*. Pomocou foriem vytvorí *formálne predikáty* a tie premietne na univerzum jazyka. Nakoniec toto univerzum doplní o objekty zodpovedajúce *určitým deskripciám* tak, aby bol svet v súlade s pravidlami jazyka.

Vidíme, že jazyk matematiky nie je nahromadením mien, pomenúvajúcim objekty skúsenosti. Vývoj jazyka nie je nesený potrebou pomenúvať objekty skúsenosti, ale potrebami syntaxe. Nový jazyk je vytvorený pomocou súboru nových *pravidiel substitúcie* (za nový druh neznámej), *pravidiel konkatinácie* (umožňujúcich neobmedzenú iterovateľnosť príslušnej operácie), *pravidiel konvenčného rozlišovania* (medzi parametrom a neznámou, medzi funkčnou hodnotou a jej prírastkom), *pravidiel rozpoznávania formy, pravidiel predikovania, pravidiel pre používanie určitých deskripcií.* Tieto pravidlá nie sú diktované skúsenosťou, ale práve naopak, túžbou túto skúsenosť pochopiť, zjednotiť, opísať – jedným slovom, dať jej zmysel. A práve preto, že príslušné pravidlá nie sú dostatočne ukotvené v bežnej skúsenosti, ich výuka naráža na viaceré problémy.

3. Didaktické dôsledky mechanizmu rozvoja jazyka matematiky

Každý zo šiestich krokov, pomocou ktorých vzniká určitý jazyk, prináša určité problémy pre didaktiku matematiky. Žiak musí zvládnuť nové pravidlá substitúcie, konkatinácie, konvenčného rozlišovania, rozpoznávania formy, tvorby predikátov a používania určitých deskripcií. Pritom každý z týchto šiestich krokov ho stavia pred určitú kognitívnu prekážku.

3.1. Zavedenie symbolov nového druhu

Zavedenie nového druhu symbolov vyžaduje od študenta určitý druh spredmetnenia, ktoré je opísané v teórii Anny Sfard [14]. Pre učiteľa príslušné symboly zastupujú určité objekty s úplnou samozrejmosťou, kým pozornosť žiaka je dlho viazaná na pravidlá manipulácie s príslušnými symbolmi, takže realitu, ktorú symboly zastupujú, často ani nevníma. Učiteľ rozpráva o predmetnej skutočnosti, zatiaľ čo žiak vníma len rovinu znakov. Preto je z didaktického hľadiska veľmi dôležité neunáhľovať zavádzanie symboliky, ale počkať, kým sa v myslení žiaka vytvorí určitá predmetná skutočnosť, ktorú má symbol zastupovať. V prípade algebry to znamená počkať, až sa v myslení žiaka *spredmetní* neznáma – teda napriek tomu, že konkrétnu hodnotu neznámej žiak nepozná, bude pre neho rovnako skutočná ako ľubovoľná iná veličina, ktorej hodnotu pozná. Až potom, keď dôjde k tomuto spredmetneniu neznámej, možno na jej označenie zaviesť symbol x.

3.2. Zavedenie novej, neobmedzene iterovateľnej operácie

V tomto prípade stoja proti sebe potreba kontextového ukotvenia príslušnej operácie, aby bolo možné poznať a osvojiť si jej vlastnosti, s jej neobmedzenou iterovateľnosťou, ktorá je čisto formálna a každé kontextové ukotvenie vylučuje. Žiak sa musí naučiť spojiť *kontextovú ukotvenosť* operácie, ktorá mu umožňuje s istotou sa orientovať v rôznych situáciách, s úplnou *dekontextualizáciou* tejto operácie, nutnej pre jej neobmedzenú iterovateľnosť. Tak v prípade algebry sa žiak musí naučiť na jednej strane na príklade druhej a tretej mocniny zdôvodniť pravidlo pre mocninu súčtu, ale súčasne musí byť schopný toto pravidlo preniesť na prípad štvrtej či piatej mocniny, kde už žiadnu názornú predstavu použiť nemôže. Spojenie kontextového ukotvenia s dekontextualizáciou je pre matematické myslenie typické, a jeho nezvládnutie je možno jednou z hlavných príčin ťažkostí, ktoré žiakom matematika spôsobuje.

3.3. Zavedenie epistemologického rozlíšenia

Zavedenie konvencie, akou je napríklad odlíšenie neznámej od parametra v algebre, ktorá zodpovedá určitému epistemologickému rozdielu, je spojené s problémom, že toto rozlíšenie je „*neskutočné*“, tejto konvencii v realite nič nezodpovedá. Preto toto rozlíšenie nie je možné skúsenostne priblížiť. Žiak sa musí napriek tomu naučiť rozlíšeniam tohto druhu porozumieť a zvládnuť ich používanie. Veľké množstvo písmen s rôznymi funkciami môže vyvolávať spočiatku zmätok. Niektorí učitelia preto volia „ustrnutie“ konvencie, keď určité aspekty problému vyjadrujú vždy rovnako, používajúc ten istý symbol. To síce uľahčuje pohybovanie sa vo vnútri tejto zjednodušenej situácie, ale môže spôsobiť ťažkosti neskôr, keď sa toto „ustrnutie“ stáva brzdou ďalšieho rozvoja.

3.4. Zjednotenie výrazov do foriem

Zvládnuť zjednotenie výrazov, ktoré spolu vecne nesúvisia, do jednotnej formy, nie je kognitívne vôbec jednoduché. Žiak sa musí naučiť ukotvenie výrazov jazyka v realite a nahradiť ho následne ukotvením vo formálnych vzťahoch. Často sa tento proces zjednocovania, teda prechod od rovníc k polynómom, vynecháva a polynómy sa zavádzajú nezávisle od rovníc ako nový druh výrazov. Polynómy sú potom žiakmi vnímané ako čisto matematické výrazy, ktoré nemajú žiaden vzťah ku skutočnosti, a nie je jasné, aký zmysel má sa nimi zaoberať. Matematika sa tak odcudzuje od sveta. Zvládnutie polynómov tak predstavuje *druhú úroveň spredmetnenia* jazyka algebry.

3.5. Vytvorenie formálnych predikátov

Ak si žiaci neosvoja polynómy, ak ich neprijmú ako objekty, formálne predikáty (ako *ireducibilita*) budú pre nich ťažko pochopiteľné. V zmyslovej skúsenosti takýmto predikátom nič nezodpovedá. Na to, aby formálne predikáty získali pre žiakov zmysel, žiaci sa musia naučiť zmyslovú skutočnosť rozšíriť o formálnu realitu. Nové predikáty totiž vnášajú rozlíšenia až do tejto rozšírenej skutočnosti – bez nej sú to iba prázdne zvuky.

3.6. Rozšírenie skutočnosti pomocou určitých deskripcií

Rozšírenie reality o nové objekty, ktoré sú zavedené pomocou určitých deskripcií, ako sú napríklad komplexné čísla, je spojené s ďalším súborom kognitívnych problémov, lebo tieto objekty spravidla porušujú bežné vlastnosti objektov danej disciplíny. Žiak sa musí naučiť oddeliť pojem objektu od týchto vlastností a zvyknúť si na nový, oveľa slabší pojem reality. Musí sa naučiť *bežné vlastnosti objektov potlačiť* a napriek tomu zachovať ich nárok na reálnosť. Napríklad k prijatiu komplexných čísel musí pojem čísla oddeliť od usporiadania, od možnosti porovnať dve čísla podľa veľkosti. To však nie je ľahké, pretože pojem čísla bol zavedený práve kvôli tomuto porovnávaniu. Ak chceme, aby komplexné čísla stratili nádych neskutočnosti, je potrebné postupné prebudovanie celej kognitívnej štruktúry.

Poďakovanie. Príspevok je súčasťou grantovej úlohy GAČR P407/11/1740.

L i t e r a t ú r a

[1] Al-Chwárizmí, M.: *Matematičeskije traktaty.* FAN, Tashkent, 1983. Český preklad Aritmetický a algebraický traktát. OPS Nymburk, 2008.

[2] Cardano, G.: *Ars magna, or the rules of algebra.* MIT Press, 1968.

[3] Descartes, R.: *Geometria.* Oikoymenh, Praha, 2010.

[4] Kvasz, L.: *Why don't they understand us?* Science and Education *6* (1997), 263–272.

[5] Kvasz, L.: *Changes of language in the development of mathematics.* Philosophia Mathematica *8* (2000), 47–83.

[6] Kvasz, L.: *History of algebra and the development of the form of its language.* Philosophia Mathematica *14* (2006), 287–317.

[7] Kvasz, L.: *Patterns of change, linguistic innovations in the development of classical mathematics.* Birkhäuser, Basel, 2008.

[8] Kvasz, L.: *Sprache und Zeichen in der Geschichte der Algebra – ein Beitrag zur Theorie der Vergegenständlichung.* Journal für Mathematik-Didaktik *29* (2008), 108–123.

[9] Kvasz, L.: *Matematika a skúsenosť.* Organon F 16 *2* (2009), 146–182.

[10] Kvasz, L.: *Náčrt teórie potencialít jazyka matematiky.* Umelá inteligencia a kognitívna veda II, Kvasnička, V., Pospíchal, J., Návrat, P., Lacko, P. a Trebatický, P. (eds.), STU v Bratislave, 2010, 263–290.

[11] Kvasz, L.: *Matematika a skutočnosť.* Organon F 18 *3* (2011), 302–330.

[12] Kvasz, L.: *Jazyk a zmena, ako sme menili jazyk matematiky a ako jazyk matematiky zmenil nás.* Filosofia, Praha, 2012.

[13] Sfard, A.: *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* Educational Studies in Mathematics *22* (1991), 1–36.

[14] Sfard, A., Linchevski, L.: *The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra.* Educational Studies in Mathematics *26* (1994), 191–228.

[15] Stifel, M.: *Vollständiger Lehrgang der Arithmetik.* Konigshausen & Neumann, Wurzburg, 2007.

[16] Van der Waerden, B. L.: *A history of algebra, from al-Khwarizmí to Emmy Noether.* Springer, Berlin, 1985.

[17] Viète, F.: *Introduction to the analytical art.* The Kent State University Press, Kent, OH, 1983.