Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica

Gurij I. Marčuk; J. A. Kuzněcov

Итерационные методы решения систем линейных уравнений с особенными матрицами

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 15 (1974), No. 1-2, 87--95

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142333

1974 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE - MATHEMATICA ET PHYSICA NO. 1-2 PAG. 87-89

Итерационные методы решения систем линейных уравнений с особенными матрицами

Г. И. МАРЧУК, Ю. А. КУЗНЕЦОВ
Сибирское отделение АН СССР, Новосибирск

G. I. Marčuk, J. A. Kuzněcov: On the Iterative Methods for the Solution of the Systems of Linear Equations with Singular Matrices. — This paper contains convergence questions and construction of the estimation of the rate of convergence of iteration methods to the solution of linear algebraic equations with singular matrices. These results are derived for the case of real spaces, however they are valid for complex case. No proofs of theorems are given; these can be found in [1], [2].

1. Сходимость и оценки скорости сходимости

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = f \tag{1.1}$$

с квадратной матрицей A порядка n и итерационный метод

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= T_0 u^k , \\ u^k &\in U^0 , \\ k &= 0, 1, \dots , \end{aligned} \tag{1.2}$$

который предлагается для ее решения. В этом и последующих двух параграфах мы везде будем предполагать, что система (1.1) совместна, то есть $f \perp ker\ A^T$. Относительно итерационного процесса (1.2) предположим следующее:

1. U^0 — замкнутое множество пространства n -мерных вещественных векторов E_n;
2. T_0 — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор, определенный и непрерывный на множестве U^0;
3. множество U^0 инвариантно относительно оператора T_0.

Определение. Итерационный процесс (1.2) называется сходящимся на множестве U^0, если последовательность его векторов $\{u^k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к некоторому решению $u^* = u^*(u^0)$ системы (1.1) для любого начального приближения $u^0 \in U^0$.

Обозначим через A^+ обобщенную обратную матрицу для матрицы A (см. [3]) и через P ортогональный проектор A^+A.

Определение. Итерационный процесс (1.2) называется фактор-сходящимся на множестве U^0, если последовательность векторов $\{Pu^k\}_{k=0}^{\infty}$ этого метода сходится к нормальному решению $u^{**} = A^+f$ системы (1.1) для любого начального приближения $u^0 \in U^0$.

Очевидно, что любой сходящийся итерационный метод является фактор-сходящимся, тогда как обратное не всегда справедливо.

Перейдем к исследованию достаточных условий сходимости итерационного метода (1.2). Для этого введем квадратичный функционал

$$\mathcal{J}_D(u) = (D(Au - f),\ Au - f)\,, \tag{1.3}$$

порождаемый самосопряженной и положительно определенной матрицей D в пространстве $\mathscr{L}(U_A)$ (Здесь $U_A = \{\xi : \xi = Au - f, u \in U^0\}$ и $\mathscr{L}(U_A)$ — линейная оболочка U_A), и относительно метода (1.2) дополнительно предположим, что

$$\begin{array}{lll} 1. & PU^0 & \subseteq U^0\,, \\ 2. & PT_0U^0 & = PT_0PU^0\,, \\ 3. & PT_0u^{**} & = u^{**}\,. \end{array} \tag{1.4}$$

При сделанных предположениях в [2] доказана следующая

Теорема 1.1. Если существует функционал $\mathcal{J}_D$ вида (1.3) такой, что

$$\mathcal{J}_D(T_0u) < \mathcal{J}_D(u) \tag{1.5}$$

для любото $u \in U^0 (Pu \neq u^{**})$, то итерационный метод (1.2) фактор-сходится в U^0.

В дальнейшем (см.) [2] мы увидим как с помощью теоремы 1.1 может быть легко установлена фактор-сходимость многих известных итерационных методов. Однако в подавляющем большинстве случаев целью исследования итерационного метода является доказательство его сходимости, а не фактор-сходимости. Помощь в достижении этой цели часто оказывает

Теорема 1.2. Если итерационный метод (1.2) фактор-сходится в U^0 и для любых $u \in U^0$ и $k \geqslant 0$ выполняется неравенство*)

$$\|T_0^{k+1}u - T_0^k u\| \leq Cq^k\,, \tag{1.6}$$

где $C < \infty$ и $q < 1$ — положительные константы, зависящие только от u, то этот метод сходится в U^0.

Следующей задачей после исследования сходимости итерационного процесса является задача построения оценок скорости сходимости. Мы в качестве характеристики скорости сходимости сходящегося в U^0 итерационного процесса (1.2) используем величину $R_\infty^U(T_0)$, которую называют асимптотической

---

*) Здесь через $\|\,.\,\|$ обозначена обычная евклидова норма векторов пространства E_n, т.е. $\|u\| = [\sum_{i=1}^{n} u_i^2]^{1/2}$ для $u \in E_n$.

скоростью сходимости процесса (1.2). Определяется она для нашего случая следующим образом. Если предположить, что множество векторов $U = \{\psi : \psi = u - u^{\star}(u),\ u \in U^0\}$ является подпространством E_n с нормой $\|\,.\,\|_U$ то

$$R^U_{\infty}(T_0) = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{k}\ln\sup_{u\in U^0}\frac{\|T_0^k u - u^{\star}(u)\|_U}{\|u - u^{\star}(u)\|_U}\right] \tag{1.7}$$

Лемма 1.3. Если для метода (1.2) множество U является подпространством E_n с нормой $\|\,.\,\|_U$ и выполняются условия теорем 1.1 и 1.2, причем в неравенстве (1.6)

$$C(u^0) \leqslant C_0\,.\,\|u^0 - u^{\star}(u^0)\| \tag{1.8}$$

и

$$q(u^0) \leq q_0 < 1\,,$$

где C_0 и q_0 — тождественные константы, то

$$R^U_{\infty}(T_0) \leqslant -\ln q_0\,. \tag{1.9}$$

Все высказанные ранее предположения и сделанные выводы становятся реальными, если от вида (1.2) мы перейдем к более распространенной форме записи итерационного процесса:

$$\begin{gathered} u^{k+1} = u^k - H_k(Au^k - f) = T_0u^k\,,\\ u^k \in U^0\,,\\ k = 0, 1, \dots\,, \end{gathered} \tag{1.10}$$

где $\{H_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность квадратных матриц, возникающая в результате действия некоторого нелинейного оператора на векторы $\xi^k = Au^k - f$, то есть $H_k\xi^k = H(\xi^k)$ для всех $\xi^k \in U_A$. Справедлива

Теорема 1.4. Если относительно итерационного процесса (1.10) выполнены предположения теоремы 1.1, множество U_A является подпространством E_n и оператор H однороден и непрерывен в пространстве U_A, то этот процесс сходится в U^0 и

$$R^U_{\infty}(T_0) \leqslant -\ln q$$

где

$$q^2 = \sup_{u\in U^0}\frac{(D(AT_0u - f),\ AT_0u - f)}{(D(Au - f),\ Au - f)}$$

— положительная константа меньше единицы.

2. Основные итерационные методы

Стационарные итерационные методы. Следуя классификации, используемой в [4], метод

$$\begin{gathered} u^{k+1} = u^k - H(Au^k - f)\,,\\ u^k \in E_n\,,\\ k = 0, 1, \dots\,. \end{gathered} \tag{2.1}$$

с постоянной матрицей H называется стационарным итерационным методом.

Если обозначить через $\sigma(T)$ — множество собственных значений матрицы T и ввести величину

$$r(T) = \max_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ \lambda \neq 1}} |\lambda| , \tag{2.2}$$

то теорема сходимости стационарного итерационного метода (2.1) выглядит следующим образом (см. [2]).

Теорема 2.1. Выполнение требований

$$\begin{aligned} &1. \quad r(I - HA) < 1 : \\ &2. \quad rg\, HA = rg(HA)^2 : \\ &3. \quad ker\, HA = ker\, A \end{aligned} \tag{2.3}$$

является необходимым и достаточным условием сходимости стационарного итерационного метода (2.1) в пространстве E_n. Кроме того, если метод (2.1) сходится в E_n, то

$$R_{\infty}^{E_n}(T_0) = -\ln r(I - HA) . \tag{2.4}$$

Сформулированная теорема, доказательство которой осуществляется путем изучения последовательности матриц $(I - HA)^k$ при $k \to \infty$, позволяет оценить скорость сходимости стационарного итерационного метода (2.1), используя оценку максимального по модулю отличного от единицы собственного числа матрицы $I - HA$.

С другой стороны, если матрица перехода $T = I - HA$ метода (2.1) зависит от какого-нибудь парамтетра γ (т.е. $T = T_\gamma$) и для всех γ, принадлежащих некоторому множеству Q, этот метод сходится, то проблема оптимизации метода (2.1) будет заключаться в нахождении параметра γ_{opt}, которое удовлетворяет соотношению

$$r(T_{\gamma_{\text{opt}}}) = \min_{\gamma \in Q} r(T_\gamma) . \tag{2.5}$$

На практике часто оказывается (в дальнейшем это будет проиллюстрировано конкретными примерами), что применение теорем предыдущего параграфа позволяет достаточно легко установить область расположения параметров, для которых исследуемый стационарный метод сходится, а использование теоремы (2.1) эффективно оптимизировать этот метод.

Метод последовательной верхней релаксации. Пусть матрица A системы (1.1) симметрична и для нее имеет место разложение

$$A = \Lambda - F - F^T , \tag{2.6}$$

где Λ — симметричная и положительно определенная в E_n матрица и F — некоторая произвольная матрица. Тогда итерационный процесс

$$\begin{aligned} B_\omega(u^{k+1} - u^k) &= -(Au^k - f) , \\ u^k &\in E_n , \\ k &= 1, 0, \dots , \end{aligned} \tag{2.7}$$

с матрицей $B_\omega = \left(\frac{1}{\omega} \Lambda - F\right)$ называется методом последовательной верхней релаксации, соответствующим разложению (2.6). Здесь ω — вещественный параметр, при котором матрица B_ω неособенная. Справедлива (см. [2])

Теорема 2.2. Метод последовательной верхней релаксации (2.7) сходится в E_n тогда и только тогда, когда либо A положительно полуопределена и $\omega \in (0, 2)$, либо A отрицательно полуопределена и $\omega \neq [0,2]$.

Для доказательства достаточно рассмотреть поведение значений функционала $\mathcal{J}_D$ с матрицей $D = \alpha A^{+}(\alpha = \pm 1)$ и воспользоваться теоремой 1.4.

Оптимизация метода последовательной верхней релаксации, поскольку он является стационарным итерационным методом, осуществляется в соответствии с соотношением (2.5). Так, например, для случая, когда матрица A является 2-циклической симметричной и положительно полуопределенной вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где A_{11} и A_{22} — неособенные квадратные матрицы, сумма порядков которых равна n, если для (2.8) выбрать

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ и } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

то параметр ω, минимизирующий $r(T_\omega)$ среди всех $\omega \in (0,2)$, определяется по известной формуле Янга-Франкеля. А именно,

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - r^2(S)}}, \tag{2.10}$$

где $S = \Lambda^{-1}(F + F^T)$ — матрица перехода итерационного метода Якоби

$$\begin{gathered} \Lambda(u^{k+1} - u^k) = -(Au^k - f), \\ u^k \in E_n, \\ k = 0, 1, \dots . \end{gathered} \tag{2.11}$$

Справедливость формулы (2.10) можно доказать и для других частных случаев метода последовательной верхней релаксации.

Метод расщепления. Представим матрицу A системы (1.1) в виде суммы

$$A = A_1 + A_2, \tag{2.12}$$

где A_1 и A_2 — некоторые положительно полуопределенные матрицы. Тогда итерационный процесс

$$\begin{gathered} (I + \tau A_1)(I + \tau A_2)(u^{k+1} - u^k) = -2\tau(Au^k - f), \\ u^k \in E_n, \\ k = 0, 1, \dots \end{gathered} \tag{2.13}$$

является простейшим однопараметрическим вариантом метода расщепления (см. [6], [7]).

Если относительно матриц A_1 и A_2 предположить, что они симметричны и перестановочны, то сходимость метода (2.13) в E_n для любого $\tau > 0$ легко доказывается с помощью простейшего спектрального анализа. Более того, как и в случае положительно определенных A_1 и A_2, здесь, следуя теореме 2.1 и соотношению (2.5), легко выводится формула для эффективного итерационного параметра τ.

В общем случае, если положить

$$D = (I + \tau A_1)^{-1} [(I + \tau A_1)^{-1}]^T , \tag{2.14}$$

то для последовательности значений функционала $\mathcal{J}_D$ из (1.3) на векторах $\{u^k\}_{k=0}^{\infty}$ итерационного метода (2.13) для всех $k \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\mathcal{J}_D(u^{k+1}) \leq \mathcal{J}_D(u^k) . \tag{2.15}$$

Однако, как показывает пример с положительно полуопределенными матрицами $A_1 = -A_1^T$ и $A_2 = -A_2^T$, когда для всех $k \geqslant 0$ и любого $u^k \in E_n$

$$\mathcal{J}_D(u^{k+1}) = \mathcal{J}_D(u^k) , \tag{2.16}$$

выполнение (2.15) еще не гарантирует сходимости итерационного процесса (2.13). С другой стороны, имеются два важных практических случая, для которых в (2.15) всегда (за исключением $Pu^k = A^+f$) выполняется строгое неравенство.

Во-первых, это случай симметричных матриц A_1 и A_2. Здесь непосредственной проверкой доказывается, что равенство в (2.15) возможно только при $Au^k = f$.

Вторым важным случаем является симметричная схема расщепления, когда $A_1 = A_2^T$. Так как матрица перехода

$$T = (I + \tau A_2)^{-1} (I + \tau A_2^T)^{-1} (I - \tau A_2^T) (I - \tau A_2)$$

этого варианта метода расщепления подобна симметричной матрице $S^{1/2} T S^{-1/2}$, где $S = (I + \tau A_2^T) (I + \tau A_2)$, то она обладает полной системой собственных векторов и, согласно неравенству (2.15) и теореме 2.1, все ее собственные числа принадлежат отрезку $[-1, 1]$. Далее, поскольку для любого собственного числа λ матрицы T и соответствующего ему вещественного собственного вектора ψ справедливо равенство

$$\lambda = \frac{\|\psi\|^2 - \tau(A\psi, \psi) + \tau^2 \|A_2\psi\|^2}{\|\psi\|^2 + \tau(A\psi, \psi) + \tau^2 \|A_2\psi\|^2}$$

то $\lambda = -1$ не может быть собственным числом T. Отсюда сразу вытекает, что для симметричной схемы метода расщепления

$$r(T) < 1$$

и, следовательно, процесс сходится.

Метод минимальных невязок. Рассмотрим итерационный процесс

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k H(Au^k - f),$$
$$u^k \in U^0, \tag{2.17}$$
$$k = 0, 1, \dots,$$

где H — некоторая постоянная матрица, а параметр τ_k для каждого $k \geqslant 0$ выбирается из условия наибольшей минимизации от шага к шагу квадратичного функционала (1.3) по формуле

$$\tau_k = \frac{(DAH\, \xi^k, \xi^k)}{(DAH\, \xi^k, AH\, \xi^k)}, \tag{2.18}$$
$$\xi^k = Au^k - f.$$

Последовательность значений функционала (1.3) для метода (2.17) удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{J}_D(u^{k+1}) = \left[1 - \frac{(DAH\, \xi^k, \xi^k)^2}{(D\, \xi^k, \xi^k)\,(DAH\, \xi^k, AH\, \xi^k)}\right] \mathcal{J}_D(u^k). \tag{2.19}$$

Справедлива

Теорема 2.3. Если множество $U_A = AU^0 - f$ является подпространством E_n, то определенность (отрицательная или положительная) матрицы DAH в пространстве U_A является необходимым и достаточным условием сходимости метода (2.17) на множестве U^0.

Перечислим некоторые простейшие случаи метода (2.17), когда $U^0 = E_n$ и выполняются условия теоремы 2.3:

а) A — положительно полуопределенная матрица;
H — положительно определенная матрица;
$D = A^+$ (метод наискорейшего спуска [8]) или
$D = H$ (метод минимальных невязок [9]);

в) A — произвольная матрица;
$H = B_1 A^T B_2$, где B_1 и B_2 симметричные и положительно определенные матрицы;
$D = (AB_1A^T)^+$.

Последний случай, соответствующий методу минимальных ошибок [10], несмотря на громоздкий вид после несложных преобразований приводит в реализации к простой формуле

$$\tau_k = \frac{(B_2\, \xi^k, \xi^k)}{(B_2\, \xi^k, AB_1A^TB_2\, \xi^k)}. \tag{2.20}$$

Отметим также, что другие варианты метода (1.17), а также обобщения на многопараметрический случай, были рассмотрены авторами в работах [2], [11].

Метод фиктивных компонент. Название излагаемого ниже подхода к решению систем линейных алгебраических уравнений произошло от так называемого метода фиктивных областей (см. [12]). Мы не будем останавливаться на исследованиях других авторов, а только опишем, как этот метод был применен в соответствии с предложенной выше теорией итерационных методов решения систем с особенными матрицами (см. [13], [14]).

Из предыдущего видно (особенно из раздела «Метод минимальных невязок»), что в построении эффективных итерационных методов решения линейных систем большую роль играют положительно определенные матрицы. Одним из наиболее известных способов построения легко обратимых положительно определенных матриц является представление их в виде произведения нескольких матриц простого вида на основе метода расщепления. Осуществляется это следующим образом.

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_p (p > 1)$ произвольные симметричные и положительно полуопределенные матрицы порядков $n_1, n_2, \ldots, n_p$ соответственно. Тогда матрицы

$$A_i = I_{n_1} \otimes \ldots \otimes I_{n_{i-1}} \otimes S_i \otimes I_{n_i+1} \otimes \ldots \otimes I_{n_p} \tag{2.21}$$

где через I_e обозначена единичная матрица порядка e, а через $\otimes$ — знак тензорного произведения матриц, симметричны, положительно полуопределены и перестановочны между собой. Используя эти факты, легко видеть, что матрица

$$B_\tau = \prod_{i=1}^{p} (I + \tau_i A_i) \tag{2.22}$$

положительно определена для любого неотрицательного вектора $\tau = (\tau_1, \ldots \tau_p)$. Таким образом, для любой матрицы A порядка n мы можем строить удобные итерационные процессы с участием матриц B_τ, если только $n = \prod_{i=1}^{p} n_i$. В случае, когда n не является произведением величин $\{n_i\}_{i=1}^{p}$, удобных для построения нужной матрицы B_τ, оказывается целеообразным (см. [14]) провести предварительное преобразование исходной системы, в чем и состоит основная идея метода фиктивных компонент.

Предположим, что нам нужно решать совместную систему уравнений

$$A_0 u_0 = f_0 \tag{2.23}$$

с квадратной матрицей A_0 порядка n_0. Мы заменяем эту систему новой системой

$$Au = f \tag{2.24}$$

с матрицей A порядка n так, чтобы матрица, составленная из элементов стоящих на пересечении строк и столбцов A с номерами $\{k_i\}_{i=0}^{n_0}$ $(0 < k_1 < \ldots < k_{n_0} \leqslant n)$ совпадала с матрицей A_0 и, соответственно, вектор, составленный из компонент f с номерами $\{k_i\}_{i=1}^{n_0}$, совпадал с вектором f_0. Остальные элементы матрицы A и компоненты вектора f должны быть равны нулю.

Нетрудно видеть, что для любого решения u^* системы (2.24) вектор u_0^*, составленный из компонент с номерами $\{k_i\}_{i=1}^{n_0}$ будет решением исходной системы (2.23). Следовательно, для нахождения решения системы (2.23) достаточно решить систему (2.24), для чего можно использовать любые сходящиеся итерационные процессы и, в частности, с удобными для нас матрицами B_τ.

Литература

[1] Марчук, Г. И., Кузнецов, Ю. А.: К решению систем линейных уравнений итерационными методами, В сб. «Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов», Вып. I, Изд. ИК АН УССР. Киев (1969).

[2] Марчук, Г. И., Кузнецов, Ю. А.: Итерационные методы и квадратичные функционалы, Изд. «Наука», Сибирское отделение. Новосибирск (1972).

[3] Фаддеев, Д. К., Кублановская, В. Н., Фаддеева, В. Н.: Линейные алгебраические системы с прямоугольными матрицами, В сб. «Современные численные методы», Изд. «Наука», Москва (1970).

[4] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н.: Вычислительные методы линейной алгебры, «Физматгиз», М.—Л. (1963).

[5] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. New Jersey (1962).

[6] Дьяконов, Е. Г.: Разностные методы решения краевых задач, Выпуск I (стационарные задачи), Изд. МГУ, Москва (1971).

[7] Марчук, Г. И.: Методы вычислительной математики, Изд. «Наука», Сибирское отделение, Новосибирск (1973).

[8] Канторович, Л. В.: Функциональный анализ и прикладная математика, «Успехи матем. наук», 3, 89 (1948).

[9] Красносельский, М. А., Крейн, С. Г.: Итеративный процес с минимальными невязками, «Матем. сб.», 31 (73), 315 (1952(.

[10] Фридман, В. М.: Новые методы решения линейного операторного уравнения. ДАН СССР, 128, 482 (1959).

[11] Кузнецов, Ю. А.: Некоторые вопросы теории и приложений итерационных методов. Дисс. канд. физ.-матем. наук, Новосибирск (1969).

[12] Саульев, В. К.: О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных областей. «Сиб. матем. ж.», 4, 912 (1963).

[13] Марчук, Г. И., Кузнецов, Ю. А.: Некоторые вопросы итерационных методов, В сб. «Вычислительные методы линейной алгебры», Изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск (1972).

[14] Кузнецов, Ю. А., Мацокин, А. М.: Решение уравнения Гельмгольца методом фиктивных областей, В сб. «Вычислительные методы линейной алгебры», Изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск (1972).