

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Tomáš Vejchodský

Aposteriorní odhady chyby v metodě konečných prvků

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 53 (2008), No. 2, 104–112

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141847>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

- [25] KOSTECKÝ, P.: *Nad Zemou sa blýska 200-krát za sekundu*, Quark 10 (2004), No. 11, 16–18.
- [26] *The Earth's Electrical Environment (Studies in Geophysics)*, The National Academies Press, Washington, D. C., 1986, 263 s.  
Chap.2.: KRIDER, E. P., *The Physics of Lightnings*,  
Chap.15.: ROBLE, R. G., IZUR, I.: *The Global Atmospheric-Electrical Circuit*.
- [27] ADLERMAN, E. J., WILLIAMS, E. R.: *Seasonal Variation of the Global Electric Circuit*, J. Geophys. Res. 101 (1996), No. D23, 29 679–29 688.
- [28] BESPALOV, P. A., CHUGUNOV, YU. V., DAVYDENKO, S. S.: *Planetary Electric Generator Under Fair-Weather Conditions with Altitude-Dependent Atmospheric Conductivity*, J. Atm. Terr. Phys. 58 (1996), No. 5, 605–611.
- [29] RYCROFT, M., ISRAELSSON, S., PRICE, C.: *The Global Atmospheric Electric Circuit, Solar Activity and Climate Change*, J. Atm. Sol.-Terr. Phys. 62 (2000), 1563–1576.
- [30] SEKIGUCHI, M., HAYAKAWA, M., NICKOLAENKO, A. P., HOBARA, Y.: *Evidence of a Link Between the Intensity of Schumann Resonance and Global Surface Temperature*, Ann. Geophys. 24 (2006), 1809–1817.

# Aposteriorní odhady chyby v metodě konečných prvků

Tomáš Vejchodský, Praha

## Úvod

Základním úkolem numerické matematiky je vyvíjet metody pro přibližné řešení matematických úloh, které zpravidla nelze vyřešit přesně (nebo je to příliš obtížné či pracné). Při konkrétních výpočtech se ovšem brzy zjistí, že znalost přibližného řešení je bezcenná, pokud nemáme alespoň nějakou představu o tom, jak velké chyby jsme se dopustili.

Už v antice Archimédes počítal přibližně obvod kruhu tak, že mu vepisoval a opisoval pravidelné mnohoúhelníky. Tím získal zaručený horní a dolní odhad pro obvod kruhu,

---

RNDr. TOMÁŠ VEJCHODSKÝ, Ph.D., Matematický ústav Akademie věd ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 69 Praha 1, e-mail: vejchod@math.cas.cz.

Autor děkuje AV ČR, GA AV ČR a GA ČR, které podporují jeho výzkum v rámci výzkumného záměru AV0Z10190503 a projektů IAA100760702 a 102/07/0496.

a tím i pro číslo  $\pi$ . Známa metoda *regula falsi* pro hledání kořene spojité reálné funkce nám vlastně také dává jeho oboustranné odhady. Podobně další numerická metoda opírající se o vlastnosti zlatého řezu stanovuje interval, ve kterém zaručeně leží minimum reálné funkce. Dále je známo, že komplexní kořeny polynomu  $n$ -tého stupně obecně nelze přesně vypočítat pro  $n > 4$ . Ovšem Lehmerova-Schurova metoda, viz např. [7], nám umožňuje vypočítat libovolně malý kruh, v němž takový kořen leží.

Při numerickém řešení parciálních diferenciálních rovnic se podobné techniky, které kvantifikují chybu či stanovují rozsah, kde chyba zaručeně leží, nazývají *aposteriorní odhady chyby*. V tomto článku se pokusíme čtenáři přiblížit problematiku aposteriorních odhadů chyby při řešení parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu pomocí metody konečných prvků.

## Modelová úloha

Pro jednoduchost se omezíme na *Poissonovu rovnici* pro dvojrozměrnou oblast, což je zřejmě nejjednodušší a současně nejdůležitější eliptická parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Poissonova rovnice popisuje řadu důležitých fyzikálních situací, jako je ustálené rozložení teploty, průhyb tenké membrány, rozložení elektrostatického potenciálu, rozložení gravitačního potenciálu v Newtonově teorii atd. Tzv. *klasická formulace* Poissonovy rovnice se zapisuje tímto způsobem

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y). \quad (1)$$

Zde  $f(x, y)$  je zadaná funkce (tzv. *pravá strana*),  $u(x, y)$  je hledané řešení a  $\Delta$  značí *Laplaceův operátor*, který je definovaný jako součet druhých parciálních derivací:  $\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2$ . Dále budeme často psát pouze  $u$  místo  $u(x, y)$ . Poissonovu rovnici (1) můžeme řešit v celé rovině, tj.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , ale častěji nás zajímá řešení v nějaké otevřené omezené podoblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  s Lipschitzovskou (např. polygonální) hranicí, viz např. [5], [8]. Aby řešení  $u$  rovnice (1) bylo jednoznačné,<sup>1)</sup> předepisujeme tzv. *okrajové podmínky*. Pro jednoduchost výkladu budeme požadovat, aby

$$u(x, y) = 0 \quad \text{pro každé } (x, y) \in \partial\Omega, \quad (2)$$

kde  $\partial\Omega$  značí hranici oblasti  $\Omega$ . Úloha tedy zní: najděte funkci  $u = u(x, y)$  definovanou v oblasti  $\Omega$ , která splňuje rovnici (1) pro každé  $(x, y) \in \Omega$  a okrajovou podmínku (2). Poznamenejme, že tato úloha má za jistých (spíše technických) předpokladů právě jedno řešení. Pokud bychom chtěli například modelovat vedení tepla, pak oblast  $\Omega$  představuje uvažované těleso,  $u(x, y)$  je teplota v bodě  $(x, y)$ ,  $f$  je hustota tepelných zdrojů a okrajová podmínka  $u = 0$  na  $\partial\Omega$  říká, že na hranici tělesa je nulová teplota.

<sup>1)</sup> Pokud  $u$  je řešení (1), pak např.  $u(x, y) + ax + by + c$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , je také řešení.

## Slabá formulace

Přesné analytické řešení výše uvedené úlohy lze obecně nalézt jen pro jednoduché oblasti (kruh, čtverec) nebo pro speciální pravé strany. Proto se používají přibližné metody, z nichž velmi efektivní je metoda konečných prvků. Tato metoda je založena na tzv. *slabé formulaci*, kterou z klasické formulace (1)–(2) odvodíme snadno tak, že rovnici (1) vynásobíme libovolnou (hladkou) funkcí  $v = v(x, y)$ , která splňuje okrajovou podmínku  $v = 0$  na  $\partial\Omega$ . Výslednou rovnost přeintegrujeme přes oblast  $\Omega$ , použijeme *Greenovu větu*,<sup>2)</sup> a dostáváme

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n v \, ds. \quad (3)$$

Zde používáme symbol  $\nabla$  pro gradient funkce, což je vektor o dvou složkách  $\nabla u = (\partial u / \partial x, \partial u / \partial y)$ , tečka představuje skalární součin a  $n$  je vektor jednotkové vnější normály k hranici  $\partial\Omega$ . Vidíme, že hraniční integrál v rovnosti (3) je nulový, protože  $v = 0$  na  $\partial\Omega$ . Popsaným postupem získáme z rovnice (1) identitu

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (4)$$

Slabé řešení úlohy (1)–(2) je tedy definované jako funkce  $u \in V$ , která splňuje identitu (4) pro všechny funkce  $v \in V$ . Symbolem  $V$  označujeme *Sobolevův prostor* funkcí definovaný jako

$$V = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ na } \partial\Omega \right\},$$

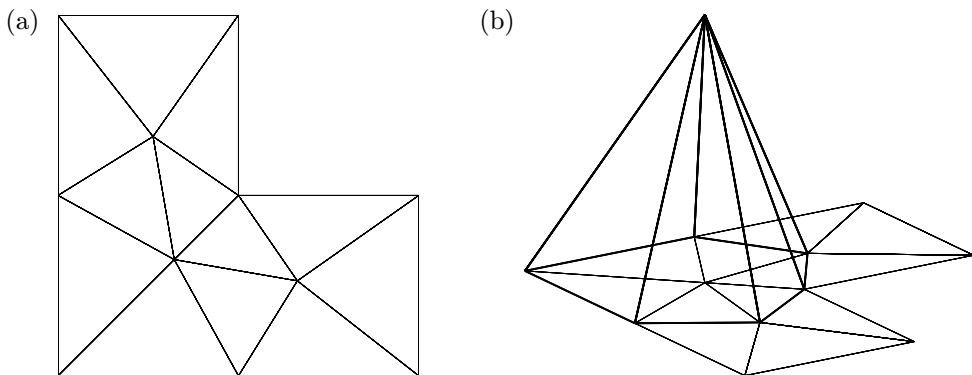
kde  $L^2(\Omega)$  je prostor funkcí lebesgueovskými integrovatelných s kvadrátem na  $\Omega$ , přičemž naznačené derivace jsou ve smyslu distribucí a okrajová podmínka ve smyslu stop, viz např. [5], [9]. Pro naše účely ovšem postačí chápat  $V$  jako množinu všech vhodných (násadových a testovacích) funkcí, které splňují okrajovou podmínku (2).

## Metoda konečných prvků

O metodě konečných prvků již v tomto časopise vyšly články [4], [11]. My ji zde jen stručně připomeneme. Abychom se vyhnuli problémům s křivočarou hranicí, zjednodušíme si situaci předpokladem, že oblast  $\Omega$  je mnohoúhelník. Klíčovým krokem metody konečných prvků je rozdělení oblasti  $\Omega$  na menší podoblasti, tzv. *prvky*. My

---

<sup>2)</sup> Greenova věta není nic jiného než vícerozměrná analogie integrování per partes.



Obrázek 1. (a) Triangulace oblasti ve tvaru L. (b) Jedna z bázových funkcí.

budeme uvažovat trojúhelníkové prvky a triangulace  $\mathcal{T}_h$  pro nás bude množina těchto trojúhelníků, viz obrázek 1(a).

Pomocí triangulace  $\mathcal{T}_h$  definujeme (konečně rozměrný) prostor  $V_h$  spojitých a po částech lineárních funkcí  $v_h$ , které splňují okrajovou podmínku  $v_h = 0$  na  $\partial\Omega$ . Grafem takové funkce na libovolném trojúhelníku je rovina, která je jednoznačně určena třemi hodnotami předepsanými (například) ve vrcholech příslušného trojúhelníku. Formulace metody konečných prvků se získá ze slabé formulace (4) jednoduchým nahrazením nekonečně rozměrného prostoru  $V$  jeho konečně rozměrným podprostorem  $V_h$ . Hledáme tedy přibližné řešení  $u_h \in V_h$ , které je jednoznačně určeno požadavkem

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \text{pro všechny } v_h \in V_h. \quad (5)$$

Pro výklad aposteriorních odhadů chyby bychom vystačili s touto definicí přibližného řešení. Nicméně abychom čtenáři přiblížili podstatu metody konečných prvků, předvedeme, že úloha (5) je ekvivalentní soustavě lineárních algebraických rovnic.

Každá funkce  $u_h \in V_h$  může být vyjádřena pomocí bázových funkcí  $\varphi_j = \varphi_j(x, y)$ , viz obrázek 1(b), a koeficientů  $z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  následujícím způsobem

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^N z_j \varphi_j(x, y). \quad (6)$$

Aby byla rovnost (5) splněna pro každé  $v_h \in V_h$ , stačí, aby platila pro všechny bázové funkce  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Když využijeme tento fakt a když dosadíme vyjádření (6) do vztahu (5), zjistíme, že požadavek (5) je ekvivalentní rovnosti

$$\sum_{j=1}^N z_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N.$$

Toto ovšem není nic jiného než soustava lineárních algebraických rovnic  $\mathbf{Az} = \mathbf{F}$  pro vektor hledaných koeficientů  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ , kde matice soustavy  $\mathbf{A}$  (tzv. *matice tuhosti*) a vektor pravé strany  $\mathbf{F}$  (tzv. *vektor zatížení*) mají prvky

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx \quad \text{a} \quad F_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Díky speciální volbě bázových funkcí je matice  $\mathbf{A}$  řídká (má velmi málo nenulových prvků), a proto můžeme soustavu  $\mathbf{Az} = \mathbf{F}$  řešit velmi efektivně metodami numerické lineární algebry.

## Apriorní odhady chyby

Než se dostaneme k vlastním odhadům chyby, je třeba *chybu* přesně definovat a ukázat, jak ji budeme měřit. Chyba je funkce  $e = e(x, y) = u(x, y) - u_h(x, y)$ , kde přesné (slabé) řešení  $u$  je dáno vztahem (4) a přibližné řešení  $u_h$  vztahem (5). Přesněji řečeno  $e$  je tzv. *diskretizační chyba*. Přibližné řešení získané pomocí počítače je totiž ještě zatíženo dalšími chybami (chyba numerické kvadratury v (7), zaokrouhlovací chyby, chyba řešiče soustav lineárních algebraických rovnic). Tyto chyby bývají zpravidla řádově menší než diskretizační chyba  $e$ , a proto se zanedbávají.

Nejdříve si uvědomme, že najít diskretizační chybu  $e = u - u_h$  jako funkci je stejně obtížné jako nalézt přesné řešení  $u$ , a tedy prakticky nemožné. Nicméně a možná překvapivě je možné efektivně odhadovat vhodnou (*energetickou*) normu  $\|e\|$  diskretizační chyby  $e$ . Energetická norma  $\|e\|$  je pro Poissonovu rovnici číslo definované integrálem  $\|e\|^2 = \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla e \, dx$ .

Předtím než popíšeme aposteriorní odhady chyby, je třeba zmínit *odhady apriorní*, jejichž odvození je prvním přirozeným krokem v teoretické analýze metody konečných prvků. Za předpokladu, že přesné řešení  $u$  je dostatečně hladké, platí v našem případě následující apriorní odhad

$$\|e\| \leq C(u)h. \quad (8)$$

Zde tzv. *diskretizační parametr*  $h$  značí délku nejdelší hrany v triangulaci  $\mathcal{T}_h$  a hodnota  $C(u)$  závisí mimo jiné na přesném řešení  $u$ , ale nezávisí na  $h$ . Apriorní odhady mají zásadní význam v tom, že zaručují konvergenci posloupnosti přibližných řešení  $u_h$  k přesnému řešení  $u$ , pokud jde diskretizační parametr  $h$  k nule. Jinými slovy, pokud budeme konstruovat posloupnost stále jemnějších triangulací, pak délka  $h$  nejdelší hrany půjde k nule a nerovnost (8) zaručí konvergenci chyby  $e$  k nule,<sup>3)</sup> a tudíž konvergenci  $u_h$  k  $u$ .

Při praktickém počítání tedy vyřešíme zadanou úlohu na sérii zjemňujících se triangulací a sledujeme konvergenci získaných přibližných řešení. Pokud je tato numerická konvergence v dobrém souladu s teoreticky předpovězenou konvergencí (8), usoudíme,

---

<sup>3)</sup> Přesněji odhad (8) zaručí nulovost energetické normy  $\|e\|$ . To ovšem společně s faktem, že  $e = 0$  na hranici  $\partial\Omega$ , implikuje nulovost chyby  $e$  v celé oblasti  $\Omega$ .

že výpočet je zřejmě správný a že získaná aproximace už nebude daleko od přesného řešení. To je velmi cenná informace, nicméně přesnou hodnotu, jak je chyba velká, nám apriorní odhad (8) nikdy nemůže dát, protože hodnota  $C(u)$  závisí na neznámém řešení  $u$ . Proto byly vyvinuty aposteriorní odhady, které dokáží velikost chyby jistým způsobem kvantifikovat.

## Aposterioerní odhady chyby

*Aposterioerní odhad* chyby je veličina  $\eta$ , která aproximuje ( $\|e\| \approx \eta$ ) nebo omezuje ( $\|e\| \leq \eta$  či  $\|e\| \geq \eta$ ) vhodnou normu chyby  $\|e\|$  a kterou je možné vyčíslit ze znalosti přibližného řešení  $u_h$  a z ostatních známých dat. Moderní výzkum aposteriorních odhadů odstartovala pionýrská práce [2], jejímž spoluautorem je jeden z nejvýznamnějších českých numerických matematiků prof. Ivo Babuška. V současné době existuje celá řada různých aposteriorních odhadů s různými vlastnostmi [1], [3], [6], [10]. Než představíme hlavní druhy aposteriorních odhadů, zavedeme některé důležité pojmy.

Pro aposteriorní odhadování chyby je klíčový pojem *rezidua*. Obecně reziduuum získáme tak, že dosadíme získané přibližné řešení do původní rovnice a podíváme se, co chybí k tomu, aby byla splněna. V našem případě je reziduuum dáno jako

$$\mathcal{R}(v) = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx \quad \text{pro } v \in V.$$

Poznamenejme, že  $\mathcal{R}$  je spojitý lineární funkcionál na prostoru  $V$ . Pro naše potřeby ovšem postačí, pokud si uvědomíme, že pro každou testovací funkci  $v$  je hodnota  $\mathcal{R}(v)$  nějaké reálné číslo.

Druhým důležitým pozorováním je skutečnost, že diskretizační chybu  $e \in V$  můžeme chápat jako přesné řešení tzv. *reziduální rovnice*

$$\int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla v \, dx = \mathcal{R}(v) \quad \text{pro všechny } v \in V, \quad (9)$$

což je rovnice formálně stejná jako slabá formulace (4). Reziduální rovnici (9) získáme snadno tak, že na obou stranách rovnosti (4) odečteme výraz  $\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx$ .

## Různé druhy aposteriorních odhadů chyby

První tři skupiny aposteriorních odhadů chyby, které popisujeme níže, patří mezi tzv. *reziduální odhady*. Jsou založeny na reziduální rovnici (9) a jejich hlavní myšlenku vyjadřuje následující identita

$$\|e\| = \sup_{v \in V} \frac{\left| \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla v \, dx \right|}{\|v\|} = \sup_{v \in V} \frac{|\mathcal{R}(v)|}{\|v\|} = \|\mathcal{R}\|_*,$$

kde  $\|\mathcal{R}\|_*$  značí normu spojitého lineárního funkcionálu  $\mathcal{R}$ . Tato rovnost je velmi zajímavá, výjimečná a výborně vystihuje myšlenku aposteriorních odhadů. Na levé

straně máme normu obecně neznámé a v principu nedosažitelné funkce  $e$ , zatímco na pravé straně rovnosti je norma rezidua  $\mathcal{R}$ , které je známé a jehož hodnotu můžeme vyčíslit pro libovolnou funkci  $v \in V$ . Vyčíslit normu  $\|\mathcal{R}\|_*$  je však obtížné, a proto ji je přibližně odhadujeme. To lze ovšem udělat několika způsoby.

**1. Explicitní reziduální odhady** mají tvar  $\|e\| \leq C\eta$ , kde  $C$  je jistá konstanta a veličina  $\eta$  je dána součtem příspěvků od jednotlivých prvků a od jednotlivých hran v triangulaci. Analýza rezidua nám poskytne explicitní vzorce pro výpočet těchto příspěvků a veličinu  $\eta$  tak můžeme přímo vypočítat ze znalosti přibližného řešení  $u_h$ . Tento odhad je relativně snadný a rychlý. Dává dokonce zaručenou horní mez na chybu za předpokladu, že dokážeme správně vyčíslit hodnotu konstanty  $C$ . To je však velmi obtížné a často prakticky nemožné.

**2. Implicitní reziduální odhady** získáme tak, že reziduální rovnici (9) zúžíme z celé oblasti  $\Omega$  na jednotlivé prvky triangulace. Zúženou reziduální rovnici pak přibližně řešíme, což vede na malou soustavu lineárních algebraických rovnic. Různé okrajové podmínky předepisované pro zúženou reziduální rovnici odpovídají různým druhům implicitních reziduálních odhadů. Poznamenejme, že okrajové podmínky Dirichletova typu vedou na zaručený dolní odhad energetické normy chyby, zatímco okrajové podmínky Neumannova typu dávají zaručenou horní mez pro  $\|e\|$ . Odhady tohoto druhu jsou rychlé a dávají dobré výsledky. Jejich praktická implementace je však náročnější.

**3. Hierarchické odhady** se také řadí mezi reziduální odhady. V tomto případě rovněž řešíme reziduální rovnici (9) – ovšem jiným způsobem. Nezužujeme ji na jednotlivé prvky, ale řešíme ji jako velkou (globální) úlohu. To je v principu náročný a pomalý výpočet, proto se urychluje použitím různých hierarchických přístupů. Tyto odhady jsou přirozené a poměrně oblíbené. Jejich teoretická analýza je založená na zesílené Cauchyově-Schwarzově nerovnosti a na tzv. saturačním předpokladu [1, kap. 5]. Hierarchické odhady dávají zaručený dolní odhad a lze pro ně za jistých předpokladů dokázat, že existuje taková vhodná konstanta, že po vynásobení odhadu touto konstantou dají i zaručený horní odhad. Za jistých okolností lze dokonce tuto konstantu vypočítat.

**4. Majoranty chyby** [6] (též *odhady založené na komplementární energii*) vystihuje následující vzorec

$$\|e\|^2 \leq \|\nabla u_h - y^*\|_0^2 + C_\Omega^2 \|f + \operatorname{div} y^*\|_0^2 \quad \text{pro všechny } y^* \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega). \quad (10)$$

Zde  $\|\cdot\|_0$  značí  $L^2(\Omega)$  normu,  $C_\Omega$  je konstanta z Friedrichsovy nerovnosti a  $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$  je prostor vektorových funkcí z  $[L^2(\Omega)]^2$ , jejichž zobecněná divergence je také v  $L^2(\Omega)$ . V zásadě jde o to, že každá (vektorová) funkce  $y^*$  dosazená do (10) dává číslo, které je zaručeně větší nebo rovno energetické normě chyby. Odhad tohoto typu je cenný především proto, že jde o zaručenou horní mez bez žádných neznámých konstant. Konstantu  $C_\Omega$  je totiž možno buď (snadno, ale hrubě) omezit ze shora známou hodnotou, nebo můžeme používat jen taková  $y^*$ , že  $f + \operatorname{div} y^* = 0$ . Ovšem najít vhodnou funkci  $y^*$ , která by dala kvalitní (ne příliš nadsazený) odhad, je výpočetně náročné, a tedy pomalé.



**5. Odhady založené na zhlazování (postprocessingu)** jsou velmi oblíbené díky snadnému použití a překvapivě dobrým výsledkům. Myšlenka je velmi jednoduchá. Vypočtené přibližné řešení se následně ještě zpracuje, nejčastěji různými průměrovacími technikami (nejlépe s využitím superkonvergence), aby bylo „hladší“. Rozdíl tohoto zhlazeného a původního řešení pak poslouží jako odhad chyby.

**6. Odhady cílového funkcionálu** na rozdíl od všech předchozích technik neodhadují energetickou normu, ale libovolný (spojitý lineární) funkcionál chyby. Jde o to, že energetická norma nemusí být vždy ten správný způsob, jak řešení a chybu měřit. V praxi nás může například nejvíce zajímat hodnota řešení v nějaké malé podoblasti (nebo bodě), a nikoli energetická norma, která jistým způsobem průměruje hodnoty přes celou oblast. Definujeme si tedy funkcionál, kterým budeme řešení a chybu měřit. Tento funkcionál použijeme na pravé straně tzv. adjungované úlohy [1, kap. 8], jejíž řešení nám pak poskytne žádanou informaci o chybě měřené předepsaným funkcionálem.

## Použití aposteriorních odhadů chyby

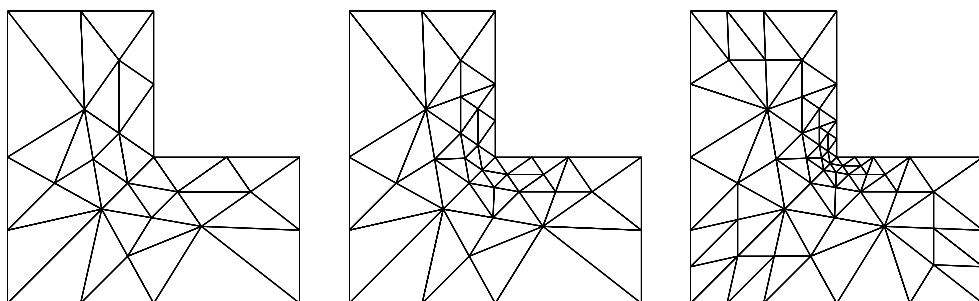
Nejvýznamnějším požadavkem na aposteriorní odhady je, aby dávaly zaručenou horní mez chyby. Pak se totiž můžeme spolehnout, že chyba je menší než číslo spočítané zaručeným odhadem. Tato jistota je pak velmi cenná v praxi při návrhu konstrukce nejrozdílnějších zařízení či staveb.

Z hlediska numerické matematiky hrají aposteriorní odhady chyby nenahraditelnou roli při *adaptivních výpočtech*. To jsou techniky, kdy se triangulace oblasti během vlastního výpočtu automaticky přizpůsobuje (adaptuje) tak, aby co nejlépe vystihla hledané řešení. Jak to funguje? Začne se s nějakou hrubou počáteční triangulací a na každém jejím prvku spočítáme aposteriorní odhad chyby – mluvíme o lokálním indikátoru chyby. V místech, kde je indikovaná velká chyba, triangulaci zjemníme, a tam, kde indikátor ukazuje malou chybu, trojúhelníky necháme beze změny nebo je i zvětšíme. Tím získáme novou triangulaci, na které opět vypočítáme indikátory chyby, a celý proces opakujeme. Obrázek 2 ukazuje automatické adaptivní zjemňování hrubé triangulace z obrázku 1(a).

Adaptivní proces zastavíme, pokud aposteriorní odhad ukazuje, že chyba klesla pod požadovanou toleranci. Pro lokální indikátor chyby i pro zastavovací kritérium můžeme použít stejný aposteriorní odhad. Často ale bývá výhodnější použít nějaký „levný“ a ne tak přesný odhad pro lokální indikátor a pro zastavovací kritérium vzít vhodný zaručený odhad, který však bývá „drahý“.

## Závěr

Aposteriorní odhady chyby tvoří významné a živě se rozvíjející odvětví numerické matematiky. Problematika je to ovšem náročná. O tom svědčí i fakt, že odhad, který



Obrázek 2. Ukázka adaptivního zjemňování sítě pomocí implicitního reziduálního odhadu. Metoda se snaží vystihnout singularitu v nekonvexním rohu.

by uspokojil všechny naše požadavky, nebyl za více než 30 let aktivního výzkumu nalezen. Každá známá technika má své výhody a nevýhody. Cílem současného výzkumu je zjištění nevýhody odstraňovat a navrhnout odhad, který by byl lepší (rychlejší, přesnější, spolehlivější) než dosud popsané odhady.

## L i t e r a t u r a

- [1] AINSWORTH, M., ODEN, J. T.: *A posteriori error estimation in finite element analysis*. John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [2] BABUŠKA, I., RHEINBOLDT, W. C.: *A-posteriori error estimates for the finite element method*. Int. J. Numer. Methods Eng. 12 (1978), 1597–1615.
- [3] BABUŠKA, I., STROUBOULIS, T.: *The finite element method and its reliability*. Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2001.
- [4] KŘÍŽEK, M.: *Padesát let metody konečných prvků*. PMFA 37 (1992), 129–140.
- [5] NEČAS, J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Academia, Prague, 1967.
- [6] NEITTAANMÄKI, P., REPIN, S.: *Reliable methods for computer simulation. Error control and a posteriori estimates*. Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [7] RALSTON, A.: *Základy numerické matematiky*. Academia, Praha, 1978.
- [8] REKTORYS, K.: *Variční metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. Academia, Praha, 1999.
- [9] REKTORYS, K. a spol.: *Přehled užití matematiky I a II*. Prometheus, Praha, 1995.
- [10] VERFÜRTH, R.: *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley, Chichester, 1996.
- [11] ŽENÍŠEK, A.: *Třicet let matematické teorie metody konečných prvků*. PMFA 44 (1999), 37–41.