Eduard Hobst; Matilda Hobstová
300. výročie narodenia Leonharda Eulera

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 52 (2007), No. 2, 89--99

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141346`

300. výročie narodenia Leonharda Eulera

Eduard Hobst a Matilda Hobstová, Nürnberg

Kultúrny svet si v tomto roku pripomína 300. výročie narodenia najväčšieho a najproduktívnejšieho matematika všetkých dôb. Leonhard Euler je zakladateľom niekoľkých významných disciplín matematiky a výrazne prispel k vybudovaniu základov mnohých aplikovaných vedných oborov, najmä klasickej, resp. technickej mechaniky.

1. Úvod

Týmto príspevkom o jednej z najväčších postáv svetovej histórie matematiky, geniálnom Leonhardovi Eulerovi, vzdávame hold géniovi ducha a vedeckej produktívnosti k jeho 300. výročiu narodenia. Euler v 18. storočí položil základy, na ktorých sa dodnes rozvíja väčšina vedných odvetví. Vedecké napredovanie a obzeranie sa na korene vedomostí sú dva základné aspekty cesty, ktorej cieľom je poznanie sveta.

2. Eulerov životopis v stručnom prehľade

Leonhard Euler sa narodil 15. apríla 1707 vo švajčiarskom Basileji v rodine kalvínskeho pastora [1]. Jeho matematické nadanie objavil profesor Johann Bernoulli, člen najslávnejšej rodiny matematikov, akú svet pozná. Jemu a jeho synom sa podarilo presvedčiť otca Eulera, aby povolil synovi študovať na basilejskej univerzite, ktorá vtedy bola Mekkou mladých matematikov z celej Európy. Bernoulli podporoval svojho žiaka osobnými lekciami matematiky, a Euler už vo veku 16 rokov graduoval. Svoj doktorský titul získal ako devätnásťročný a už vtedy bol uznávaný v matematických kruhoch pre svoje výkony v medzinárodných súťažiach vypisovaných Francúzskou akadémiou vied.

V roku 1725 bola v St. Petersburgu založená Ruská akadémia vied. Dvaja synovia Johanna Bernoulliho, Mikuláš a Daniel, prijali pozvanie na členstvo v tejto prestížnej inštitúcii. Keď sa v Rusku usadili, sprostredkovali priateľovi Eulerovi v roku 1727 miesto asistenta. Euler rýchlo napredoval: 1730 sa stal členom Akadémie vo fyzikálnom inštitúte a 1733, po návrate Daniela do Basileja, bol menovaný riaditeľom jej matematického inštitúta.

Ing. Eduard Hobst, Ph. D. (1947), a RNDr. Matilda Hobstová (1946), Ingenieurbüro Dr. Hobst für Statik + Dynamik & Software-Entwicklung, Development Partner & Product Engineer (Concrete) SCIA Group n. v., Heideloffstraße 14, D – 90478 Nürnberg, Nemecko, e-mail: `hobst@t-online.de`

Na pruský kráľovský trón zasadol v roku 1740 Fridrich II (Veľký). Nakoľko bol obdivovateľom filozofie a ostatných vied, našla v ňom Pruská akadémia vied významného mecenáša. Pre osvietených panovníkov Európy 18. storočia bolo vecou prestíže získať najlepších vedcov do svojich služieb; čoskoro sa ukázalo, že ich obdiv k matematike a fyzike nebol čisto platonický: už vtedy začínala byť veda „výrobnou silou". Pruský kráľ ponúkol Eulerovi, ktorý už bol etablovaný ako prvý matematik Európy, miesto člena Pruskej akadémie vied, a Euler, zneistený politickými nepokojmi, ktorými bolo Rusko po smrti cárovnej Anny Ivanovny zmietané, ponuku prijal a v lete 1741 sa presťahoval do Berlína, aby tam rozvinul svoje druhé tvorivé obdobie.

S Ruskou akadémiou vied však Euler styky neprerušil a publikoval naďalej v „Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitane". Tento časopis bol živnou pôdou Eulerovej vedeckej plodnosti, i vďaka „trpezlivosti" jeho redakcie, ktorá nielen že neskracovala Eulerove články, ktoré boli svojou dĺžkou preňho príznačné, ale zverejňovala ich ešte 43 rokov po jeho smrti, lebo nebolo v možnostiach vtedajšej tlačiarenskej techniky spracovať a uverejniť záplavu vedeckej informácie, ktorú Euler produkoval. Keď sa raz Eulera spýtali, ako dokáže tvoriť tak ľahko, odpovedal svojím žartovným štýlom: „Pero zrejme predbieha moju inteligenciu." Pre každého z nás, kto sa viacmenej úspešne snaží pochopiť aspoň svojho oboru sa týkajúce objavy Eulera a z času na čas napíše prijateľný článok, sa javí Eulerova výkonnosť démonicky desivou a možno v nás evokuje pocit menejcennosti. Euler však nebol typom „suchého patróna" či znudeného, mrzutého úradníka, a nič na ňom nebolo „démonické". Jeho rovesníci ho opisovali ako rozšafného, vtipného pána, ktorý sa tešil zo života, hlavne rodinného. Jeho domácnosť čítala až 13 členov, a on medzi nimi trávil, s vnukom na kolenách a mačkou na pleci, značnú časť svojho času, žartujúc a rozdávajúc dobrú náladu; divákov bábkových predstavení, ktoré Euler pravidelne navštevoval, rozjaroval svojimi výbuchmi smiechu... a pritom jeho fantastická myseľ neprestávala počítať [2].

V roku 1759 bol Euler vymenovaný za riaditeľa Pruskej akadémie vied a tak prinútený venovať časť svojej kapacity organizačnej činnosti, vrátane zháňania peňazí na udržanie chodu Akadémie. Dnes sa vo vedeckých inštitúciách bojuje o „granty", a vedeckí pracovníci sa sťažujú, že im na vlastnú činnosť neostane čas. Ako organizoval svoju prácu Euler? O tom sa nikde nepíše, ale možno si domyslieť, že nemal na starosti obhospodárovanie svojich kont v rôznych bankách, nešpekuloval na burze, neskupoval pozemky ani nehnuteľnosti, nechodil po žúroch, netrávil asi (predĺžené) víkendy na dači, neplavil sa s plachetnicou okolo sveta, ba ani nemal žiadnu (6-týždňovú) dovolenku. Pravda, bol finančne naprosto zabezpečený a teda odbremenený od každodenných existenčných starostí.

V roku 1760 bol Berlín počas tzv. „Sedemročnej vojny" okupovaný ruským vojskom, a Eulerov dom bol vyrabovaný. Keď sa o tom veliteľ okupačných jednotiek dozvedel, osobne sa Eulerovi ospravedlnil a zariadil jeho odškodnenie. Ruská cárovná Alžbeta, ku ktorej sa správa o tomto incidente dostala, sa postarala o ďalšiu Eulerovu kompenzáciu. Kto z nás zažil prenasledovania 20. storočia, alebo má o nich povedomosť, toho napadne, že „naši" by sa asi neboli zachovali tak veľkoryso k emigrantovi, na ktorého si „došliapli" v jeho exile... Dom, v ktorom Euler v Berlíne žil, sa zachoval: je dnes sídlom Bavorského zemského zastupiteľstva v nemeckom hlavnom meste, a nesie Eulerovu pamätnú dosku.

Eulerovo putovanie po Európe sa neskončilo v Berlíne. V roku 1762 sa stala ruskou cárovnou Katarína II (Veľká). Aj ona podporovala rozvoj vedy a umenia a dala si za cieľ podvihnúť úroveň Ruskej akadémie vied; chcela sa pýšiť najväčším európskym matematikom na svojom dvore, a tak sa čoskoro začali rokovania o jeho návrate do Petrohradu. Euler sa pri jednaní s ruským vyslancom prejavil ako človek stojaci pevne na zemi, keď predložil tieto podmienky: stane sa riaditeľom Ruskej akadémie s platom 3000 rubľov ročne; jeho manželka po ňom dostane doživotnú penziu 1000 rubľov; jeho traja synovia získajú dobré postavenie v Petrohrade, pričom najstarší sa stane tajomníkom Akadémie. Vyslanec mal jasný príkaz získať Eulera a dostal na to od svojej panovníčky „voľnú ruku", a tak jeho „bezuzdné" podmienky prijal, hoci pri ich vypočúvaní asi lapal po dychu [2]. I v tomto ohľade Euler nám prírodovedcom a technikom dal už pred dva a pol storočiami užitočnú príučku: nezanedbávať materiálny aspekt svojho povolania — aby sme mali pevný základ na riešenie problémov, ktoré za nás pre spoločnosť nik nevyrieši.

A tak sa vrátil Euler v roku 1766, po štvrťstoročí činnosti v Berlíne, do Petrohradu, aby tu zavŕšil svoju v histórii ľudstva ojedinelú, úžasnú životnú púť matematického kúzelníka. V tomto svojom poslednom životnom období spísal viac ako 400 prác, a nezabránil mu v tom ani ťažký fyzický handicap: Euler oslepol už 1735 na jedno oko, a po návrate do Petrohradu, v roku 1771, stratil zrak celkom. Jeho neuveriteľne výkonná pamäť a fotografická predstavivosť mu však umožnili nerušene tvoriť ďalej, a skupina asistentov, ktorých si v múdrej predvídavosti bol vyškolil, zaznamenávala priebežne jeho výtvory na publikovanie.

3. Eulerovo matematické dielo v stručnom prehľade

Z Eulerovej činnosti v Ruskej akadémii vied vyšlo v roku 1736 ako prvé jeho preslávené dvojzväzkové dielo „Mechanica sive motus scientia analytice exposita", ktorému J. L. Lagrange (1736–1813) vo svojej slávnej „Mécanique analytique" (1788) priznal prvenstvo v aplikovaní metód diferenciálneho počtu (tzv. analytických metód) na vyšetrovanie pohybu telies; pred Eulerom sa používal geometrický (resp. grafický) prístup vyvinutý Newtonom a jeho žiakmi. Euler odvodil pohybové rovnice hmotného bodu a ukázal, ako sa integráciou týchto diferenciálnych rovníc analyticky opíše pohyb telies.

Z korešpondencie Eulera s Danielom Bernoullim sa dozvedáme, že Euler v čase svojej prvej knižnej publikácie sa už natrvalo zameral na problémy mechaniky, ktoré mu boli nevyčerpateľnou studnicou matematických námetov. Vedomosti o deformáciách a napätiach zaťažených štíhlych prútov, ktoré patria k základnému vybaveniu každého strojného a stavebného inžiniera, sa začali vytvárať na prísne matematickej báze práve v dobe Eulera, a on bol jedným z protagonistov. Vtedy sa hovorilo o „elastických krivkách", a problém sa riešil na obecnejšej báze, než na akej dnes stojí tzv. „technická teória pružnosti". Matematické problémy, ktoré vznikli s riešením všeobecne formulovaných „elastických kriviek", priviedli Eulera k položeniu základov variačného počtu, dodnes najmocnejšieho prostriedku technickej mechaniky. Jeho v Berlíne 1744 uverejnená kniha „Methodus inveniendi lineas curvas…“ je *de facto* prvým uceleným dielom svetovej literatúry o variačnom počte.

Svoju berlínsku tvorbu korunoval Euler vydaním úvodného dvojzväzku infinitezimálneho počtu „Introductio in analysin infinitorum“ (1748), po ktorom nasledovalo dvojdielne pojednanie o diferenciálnom počte „Institutiones calculi differentialis“ (1755). Toto epochálne dielo uzavrel trojzväzkovou učebnicou integrálneho počtu „Institutionum calculi integralis“, začatou už v Berlíne, ale dokončenou až v Petrohrade (1763/8–1770). Tieto diela boli tak výrazným prínosom k matematickej kultúre, že prakticky všetci významní matematici konca 18. a začiatku 19. storočia z nich čerpali vedomosti. Matematik a filozof DE CONDORCET (prezident francúzskeho národného zhromaždenia 1792) prehlásil vo svojej eulógii: „Všetci slávni matematici dneška sú žiakmi Eulera: nie je medzi nimi jediný, kto by sa nebol formoval štúdiom jeho diela“ [1]. Veľký P. S. LAPLACE (1749–1827) nabádal svojich žiakov: „Čítajte Eulera, je majstrom nás všetkých“ [2]. Pripomeňme, že Euler okrem týchto základných diel publikoval stovky originálnych článkov, ktorých význam je v sume prinajmenšom rovnocenný jeho knižným publikáciám.

4. Výber z Eulerovho matematického diela

Eulerovo dielo je tak rozsiahle, že sa nepodarilo vydať ani desiatky rokov po jeho smrti všetky jeho práce predložené redakcii petrohradského časopisu „Commentarii Academiae Petropolitane“ (kap. 2). V rodnom Švajčiarsku, kde je Euler dodnes známou a uctievanou osobnosťou, bolo pri príležitosti osláv 200. výročia jeho narodenia rozhodnuté vydať Eulerovo súhrnné dielo. Renomovaný „Eneström Index“ z rokov 1910 a 1913 (uverejnený v internete) uvádza 866 Eulerových titulov, chronologicky zoradených a katalogizovaných pod číslami E1 až E866! Do roku 1964 vydali 64 zväzkov, a má ich byť 75, každý v rozsahu ca 600 strán. Aký je stav 300 rokov po narodení Eulera, sa nedá zistiť. Výber z Eulerovej tvorby na niekoľkých stránkach teda nezostane neovplyvnený osobnými preferenciami. Popularizačné články sú nutné, aby sa v čo najširšom spoločenskom povedomí zachovala vďačná spomienka na tohto velikána ľudského ducha.

Prírodovedci a inžinieri sa s Eulerovým menom stretávajú na každom kroku. Všetky oblasti matematiky a klasickej mechaniky prekypujú poukazmi na Eulerove metódy, funkcie, teorémy, koeficienty, konštanty a dôkazy; jeho meno je prívlastkom nespočetných formúl. Moderné učebnice zdôrazňujú Eulerov rozhodujúci prínos k analýze, diferenciálnym rovniciam, teórii čísiel, teórii rovníc, diferenciálnej a projektívnej geometrii, teórii pravdepodobnosti atď. Euler je spoluzakladateľom významných odvetví modernej matematiky: variačného počtu, funkcií komplexnej premennej a teórie grafov.

Začnime „výber z diela“ pripomenutím jedného z Eulerových najväčších objavov, ktorý okúzľujúcim spôsobom využíva pojem imaginárnej jednotky (i) ako most medzi exponenciálnymi a goniometrickými funkciami:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x. \tag{1}$$

Špeciálny tvar tejto epochálnej rovnice pre $x = \pi$ je považovaný za vrchol matematickej estetiky, ba dôkaz „božského pôvodu“ matematiky:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0. \tag{2}$$

Vzorec (2) spája najdôležitejšie matematické konštanty $\{0, 1, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \pi\}$ do vzťahu, ktorý omračuje svojou mystickou jednoduchosťou; symboly e, i, π zaviedol do používania natrvalo práve Euler. „Nesmrteľná“ definícia $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ sa nerozlučne viaže s Eulerovým menom, hoci Euler nebol jej objaviteľom. V svojom diele „Introductio in analysin infinitorum“ (pozri hore) však Euler podal navzájom nezávislé funkcionálne definície:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n \quad \& \quad \ln x = \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1). \tag{3}$$

Euler využil produktívnosť „svojho čísla“ pri budovaní teórie obyčajných diferenciálnych rovníc, o ktorú má možno najväčšie zásluhy.

Teória nekonečných radov je nesmierne dôležitou vetvou matematiky, a je aktuálna od staroveku. Pripomeňme paradox preteku Achillesa s korytnačkou, ktorý podľa starovekých znalostí „dokazoval“, že Achilles nikdy nedobehne živočícha príslovečne známeho svojou pomalosťou. Ani dnes asi väčšina spoluobčanov (napriek solídnej všeľudovej matematickej výuke) nevie túto „záhadu“ objasniť: vysvetlenie, práve tak prekvapujúce ako jednoduché, sa opiera o fakt, že nekonečné rady s kladnými členmi môžu byť konvergentné. Vedľa geometrických radov typu $\sum 1/a^j$ zamestnával matematikov Eulerovej doby nekonečný rad prevrátených hodnôt štvorcov $\sum 1/j^2 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots$. Jeho súčet nevedeli nájsť ani takí velikáni ako G. W. Leibniz (1646–1716), Newtonow súčasník a spoluobjaviteľ diferenciálneho a integrálneho počtu, alebo Jacques Bernoulli (1654–1705), brat Eulerovho učiteľa. Euler problém vyriešil v roku 1736 „veľkým skokom“: elegantnou substitúciou $x^2 = y$ do rovnice $\sin x = 0$, ktorú rozpísal do nekonečného radu $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \cdots$, a s využitím poznatku z teórie rovníc (jednej z oblastí vyššej algebry, ktorú Euler významne obohatil), že záporne vzatý koeficient lineárneho člena rovnice (s jednotkovým absolútnym členom) je súčtom reciprokých hodnôt jej koreňov (v tomto prípade ich nekonečného počtu), našiel riešenie:

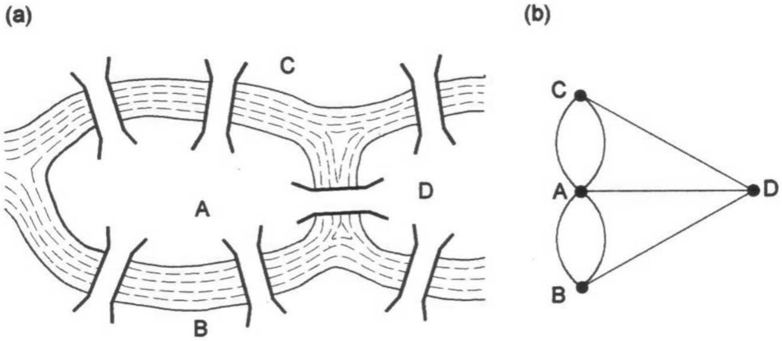
$$\sum 1/j^2 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots = \pi^2/6, \tag{4}$$

ktorým nielen ohúril matematický svet, ale dodal spolu praktickú formulu na výpočet čísla π! Nebol by to Euler, keby sa hneď zastavil, a tak ďalšími úpravami získal vzorce $\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \cdots$ a $\pi^2/12 = 1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + \cdots$ a nakoniec celkom všeobecné vzorce tejto triedy i ďalšie špeciálne prípady, ako napr. $1/1^{26} + 1/2^{26} + 1/3^{26} + 1/4^{26} + \cdots = 2^{24} \times 76977927/27! \times \pi^{26}$, viď [2].

Mnohé dôležité matematické objavy vznikli riešením hádaniek a problémov každodenného života. Euler bol naklonený tomuto druhu zábavy pri svojej veselej povahe a vďaka duševnej kapacite, ktorá mu dovolovala riešiť „pred večerou“ problémy, na ktorých si generácie riešiteľov lámali hlavy. Jedným z takých problémov, ktorého vyriešenie Eulera etablovalo ako spoluzakladateľa teórie grafov, bola vtedy populárna úloha vo východopruskom Königsbergu (Kráľovci), dnešnom Kaliningrade [3]: mesto ležiace na rieke Pregel malo 4 mestské časti spojené navzájom 7 mostami (obr. 1a). Hľadala sa taká trasa prechádzky mestom, na ktorej sa prejde každým mostom práve len raz. Euler ukázal, prečo taká trasa nejestvuje. Zjednodušil plán mesta na schému podľa obr. 1b a z neho odvodil obecné zásady, ktoré sú platné pre akékoľvek mesto na svete s ľubovoľným počtom mostov, mestských častí a riečnych ramien. Svoj objav zhrnul v *Eulerovej vete*, ktorá predstavuje obecne platnú zákonitosť medzi tromi charakteristikami, vlastnými každému grafu:

$$n_U - n_L + n_P = 1, \tag{5}$$

kde je n_U – počet uzlov grafu, n_L – počet línií grafu a n_P – počet uzavretých plôch grafu. Dodajme, že v dnešnej ustálenej terminológii teórie grafov sa pracuje s pojmom „stupeň uzla“, ktorý sa definuje ako počet línií, ktoré doňho vstupujú. Súčasné zdôvodnenie neriešiteľnosti tejto klasickej úlohy je teda totožné s odkazom na nepárne stupne všetkých uzlov „kráľoveckého“ grafu (obr. 1b).



Obr. 1. Topologický problém kráľoveckých mostov: (a) Schéma mesta s jeho 7 mostami, (b) Eulerovo grafické znázornenie problému.

Komplexný „záber“ Eulerovho bádania dokumentuje i jeho veta o konvexných mnohostenoch z roku 1750, ktorá vlastne vyplýva z (5):

$$n_V - n_E + n_F = 2, \tag{6}$$

kde je n_V – počet vrcholov, n_E – počet hrán a n_F – počet stien. V záujme historickej spravodlivosti poznamenajme, že R. Descartes vetu (6) poznal už v prvej polovici 17. storočia; ale nepodal jej dôkaz.

Do teórie čísiel významne zasiahol Euler rozpracovaním odkazu legendárneho amatérskeho matematika Pierre de Fermat (1601–1665), ktorý zanechal svetu záhadu nazvanú po ňom *Fermatova posledná veta*, resp. *Veľká Fermatova veta*, ktorou vyslovil hypotézu, že algebraická rovnica

$$a^n + b^n = c^n \tag{7}$$

je riešiteľná (v obore celých kladných čísiel) len pre exponenty $n = 1$ a $n = 2$. Fermat tvrdil, že pozná všeobecný dôkaz, ale pokiaľ ho ozaj našiel, vzal ho so sebou do hrobu; publikoval len dôkaz pre $n = 4$. Generácie matematikov si na probléme „vylámali zuby". Neprekvapuje, že i Euler sa Fermatovou poslednou vetou zaoberal a pritom posunul hranice matematického poznania, keď s úspechom aplikoval vtedy nový pojem imaginárneho čísla. Ale Euler, vychýrený ako „čarodej", ktorý vyrieši v okamihu najzložitejšie problémy, dokázal len špeciálny prípad pre $n = 3$:

$$a^3 + b^3 = c^3. \tag{8}$$

Riešenie našiel metódou „nekonečného zostupu", ktorú použil i Fermat pre svoje riešenie $n = 4$. Patrí sa dodať, že všeobecný dôkaz Veľkej Fermatovej vety sa po viac ako 3 storočiach podarilo vypracovať A. Wilesovi [3]. Svoj pôvodný dôkaz z roku 1993 však Wiles musel ďalšou dvojročnou prácou upresniť a doplniť, kým bol v roku 1995 definitívne uznaný.

Euler sa zaoberal i tzv. *Malou Fermatovou* vetou, ktorú zovšeobecnil tým, že z nej odstránil predpoklad prvočíselnosti zavedením špeciálnej funkcie, nazývanej — ako inak — Eulerovou funkciou. Táto *Eulerova-Fermatova* veta formuluje nutnú a postačujúcu podmienku nesúdeliteľnosti dvoch čísiel. Euler tiež našiel rozklad *Fermatovho čísla* $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ na dva prvočinitele 641×6700417, čím vyvrátil Fermatovu hypotézu, že predpis $F_n = 2^{2^n} + 1$ je generátorom prvočísiel (3, 5, 17, 257, 65537, ...).

5. Eulerov prínos klasickej a technickej mechanike

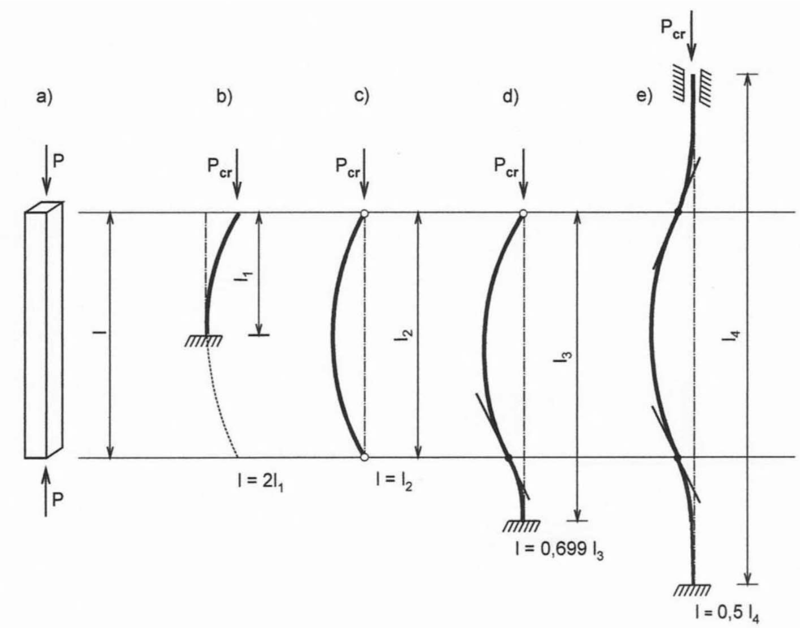
Euler svoje bádanie orientoval na praktické problémy (kap. 3). Panovníci, ktorí ho veľkoryso honorovali, síce stavali do popredia svoju lásku k vede, ale sledovali prirodzene i hospodárske a vojenské ciele. Pruský kráľ ho napr. nechal riešiť problém zásobovania nového sídla Sanssouci vodou, ruská admiralita ho „zapriahla" do riešenia problémov lodnej mechaniky. Odtiaľ zrejme čerpal Euler námety i skúsenosti pre spísanie svojej prvej veľkej publikácie o elastických krivkách (kap. 3). Riešil i taký kuriózny problém [1], či by bolo možné pestovať stále vyššie stromy pre stožiare čo najmohutnejších ruských vojnových korábov. Euler sa zahĺbil do tohto problému „technickej teórie pevnosti" a ukázal, aké mechanické zákonitosti stoja za „zázrakom", ktorý prezentuje príroda v mravcovi, ktorý unesie niekoľkonásobok svojej telesnej váhy, a prečo, na druhej strane, „stromy nerastú do neba". Z nebotyčných stožiarov cárskych plachetníc teda nebolo nič.

Aj keby Euler nezanechal mechanike a teórii pevnosti nič iné, ako geniálnu ídeu *separácie* a *koncentrácie* [4], najskôr aplikovanú na riešenie prútov, kde našla svoje vyjadrenie v pojmoch epochálneho významu — *prierez* a *vnútorná sila*, patril by mu právom titul „otec stavebnej mechaniky“. Inžinieri si nevedia predstaviť, ako by riešili svoje každodenné problémy, keby sa i v prípade jednoduchého nosníka museli prehrýzať aparátom matematickej pružnosti a diskutovať o „tenzorových poliach napätí a pretvorení“ namiesto o „momente a priečnej sile“.

Euler zanechal mechanike veľa cenných impulzov a poznatkov. Epochálneho významu a inžinierom azda najznámejšie sú ním objasnené 4 základné prípady stability centricky tlačeného prúta (obr. 2 — podľa [7]). Podľa vtedy dostupných riešení sa nedalo matematicky vysvetliť, prečo (ideálny) priamy prút zaťažený pozdĺžne centrickou silou P (obr. 2a) vybočí skôr, ako dôjde k strate pevnosti jeho materiálu — skúsenosť praktického života. Euler riešenie našiel a ukázal, že veľkosť tzv. „kritickej sily“ P_{cr}, ktorá stratu stability prúta spôsobí, sa riadi vzťahom

$$P_{\text{cr}} = \pi^2 EJ/l^2, \tag{9}$$

kde je EJ – tuhosť prúta vztiahnutá na jeho prierez a materiál a l – tzv. vzperná dĺžka prúta, všeobecne rôzna od konštrukčnej dĺžky prúta (obr. 2: l_1, l_2, l_3, resp. l_4), závisiaca len na okrajových podmienkach, t. j. na uložení koncov prúta (pozri vysvetlenie v legende obr. 2). Vzperná dĺžka l je vlastne vzdialenosť dvoch bodov s nulovou krivosťou (inflexných bodov), a tým sa, aspoň geometricky, vysvetlí, prečo rôzne dlhé prúty Eulerových prípadov 1 až 4 podľa obr. 2b až 2e stratia stabilitu pri tej istej veľkosti kritickej sily P_{cr}.

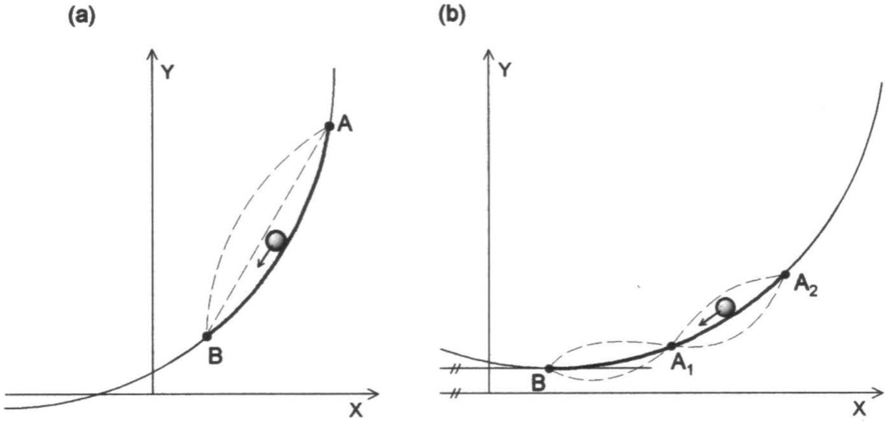


Obr. 2. Eulerove základné prípady stability prúta: (a) Schéma osovo zaťaženého prúta. (b) Prípad 1: prút jednostranne votknutý. (c) Prípad 2: prút obojstranne kĺbovo uložený. (d) Prípad 3: prút kĺbovo uložený, resp. votknutý. (e) Prípad 4: prút obojstranne votknutý.

Uvedené súvislosti vzperu prútov sú síce bežne známe inžinierom, ale „kolumbovská“ kvalita Eulerovho objavu, ktorým *de facto* založil významnú disciplínu „stabilita konštrukcií“, si zaslúži toto pripomenutie. S nie príliš vysokou nadsádzkou možno tvrdiť, že bez tohto objavu by sa nikde na svete nestavali výškové budovy, o mrakodrapoch ani nehovoriac.

Pre technické vedy má veľký význam Eulerov prínos k rozvinutiu a aplikáciam variačného počtu. Variačný počet sa vyvinul zo zaujímavých úloh, formulovaných od konca 17. storočia, ktoré nadväzovali na tzv. izoperimetrické úlohy, známe zo staroveku [5], [6]. Najznámejšou z nich bola úloha o *brachistochrone*, krivke najkratšieho pádu (obr. 3a), ktorú predložil Johann Bernoulli v roku 1696 v časopise „Acta Eruditorium“: „Nájsť takú krivku v zvislej rovine (gravitačného poľa), spájajúcu body A a B, aby sa bod, valiaci sa po nej bez trenia, dostal z A do B za najkratší možný čas“ (*brachistos* znamená po grécky najkratší). Podobná úloha o *izochrone*, krivke konštantného času, ktorá má takú vlastnosť, že hmotný bod spúšťaný z jej ľubovoľných bodov A_1, A_2, ... dospeje do jej najnižšieho bodu B za rovnaký čas, vedie k tomu istému riešeniu (obr. 3b). Jedná sa o *cykloidu* (x_0, y_0, k sú integračné konštanty):

$$x - x_0 = k(\theta - \sin\theta) \quad \& \quad y - y_0 = k(1 - \cos\theta). \tag{10}$$



Obr. 3. Riešenie úlohy o brachistochrone a izochrone: (a) Brachistochrona — krivka najrýchlejšieho pádu. (b) Izochrona — krivka konštantného času.

Až Euler vyvinul zo zbierky riešení zaujímavých úloh samostatnú disciplínu. Variačný počet sa zaoberá hľadaním maxím a miním zobecnených funkcií, tzv. *funkcionálov*, ktorých argumentami sú jedna alebo viaceré funkcie (typicky aj ich derivácie).

Je príznačné pre Eulera (a jeho generáciu zakladateľov a objaviteľov), že nevidel v matematike izolovanú disciplínu, ale považoval ju za súčasť filozofie, prostriedok spoznania sveta a vesmíru, a tak nachádzal cesty k riešeniam, ktoré by boli strohému utilitaristovi asi zostali „zarúbané“. K vybudovaniu variačného počtu ako striktnej matematickej disciplíny priviedla Eulera možno jeho nasledujúca filozoficko-mystická úvaha [8]:

„Pretože je stavba vesmíru dokonalým dielom najmúdrejšieho tvorcu, nestane sa nič bez toho, aby sa neprejavil vzťah medzi maximom a minimom. Nepochybujeme o tom, že akýkoľvek jav vo vesmíre môže byť vysvetlený práve tak rozborom jeho dôsledkov, teda s pomocou metódy maxím a miním, ako i vyšetrovaním jeho príčin... Nemali by sme ľutovať námahu sa presvedčiť, že na riešenie každého problému máme obidve cesty k dispozícii. Nielen, že jedno riešenie potvrdí druhé, ale zhoda obidvoch riešení nás privedie k najvyššiemu uspokojeniu ducha.“

Úlohou variačného počtu je nájsť pre funcionál $I\{\psi\}$ na danej definičnej triede funkcií také funkčné riešenie $u = \psi$, pre ktoré nadobúda $I\{u\}$ minimálnu, resp. maximálnu hodnotu (podľa povahy problému). Napríklad, pre najjednoduchšie jednorozmerné funkcionály

$$I\{\psi\} = \int F(x, \psi, \psi')\,\mathrm{d}x, \quad x_0 \leqq x \leqq x_1, \tag{11}$$

Euler objavil, že riešenie $u = \psi$ je súčasne riešením po ňom nazvanej *Eulerovej diferenciálnej rovnice* daného variačného problému:

$$-L[u] \equiv F_u - \mathrm{d}F_{u'}/\mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$

Euler touto cestou nachádzal svoje slávne riešenia. Napríklad, v úlohách o brachistochrone a izochrone sú na obr. 3a, b znázornené po troch z nekonečnej definičnej množiny funkcií $\{\psi\}$ (sú hladké, teda spojité, i v 1. derivácii, a ich krivky prechádzajú bodmi A, B), a funkčné riešenie u je, ako bolo uvedené, v obidvoch prípadoch cykloida, ktorá dodáva funkcionálu brachistochrony $I\{\psi\} = \int \sqrt{(1+\psi')/\psi}\,\mathrm{d}x$ minimálnu hodnotu (najkratší čas pádu).

Jedna z Eulerových prvých mechanických aplikácií variačného počtu sa týkala najznámejšej rovnice stavebnej mechaniky — tzv. *nosníkovej rovnice* technickej teórie prútov, ktorá opisuje závislosť priehybu w prizmatického prúta na spojitom zaťažení p a tuhosti prierezu EJ (rovnicu uvádzame v zjednodušenom tvare inžinierskych publikácií):

$$w^{\mathrm{IV}} = p/EJ. \tag{13}$$

Euler sa k nej dopracoval tzv. „priamou metódou“, teda vyšetrovaním „príčin“ [4], [9]. Pri vyšetrovaní „dôsledkov“ (zaťaženia) „nepriamou“, teda variačnou metódou vyšiel Euler z jedného z najvšeobecnejších princípov klasickej mechaniky — *princípu minima potenciálnej energie*. Od Daniela Bernoulliho prevzal Euler poznatok, že ohybový moment M v prúte je lineárne úmerný jeho krivosti κ a že v prúte nahromadená energia deformácie Π_i je lineárne úmerná integrálu zo štvorca krivosti κ^2:

$$M = c\kappa = cw''/(1+w'^2)^{3/2} \approx cw'' \quad \& \quad \Pi_i = \tfrac{1}{2}\int c\kappa^2\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

„Technická pružnosť“ nahrádza $c = EJ$ a (s dostatočnou presnosťou) $\kappa \approx \psi''$. Z celkového energetického funkcionálu (potenciálu)

$$I\{\psi\} = \Pi_e + \Pi_i = -\int p\psi\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int EJ\psi''^2\,\mathrm{d}x, \quad x_0 \leqq x \leqq x_1, \tag{15}$$

(Π_e – externá zložka potenciálu) odvodil Euler svojou metodikou (12) *Eulerovu rovnicu* tohto variačného problému — úlohy nájdenia takej (prípustnej) deformačnej funkcie $w = \psi$, minimalizujúcej $I\{\psi\}$, ktorá je totožná s (13). V [9] sa demonštruje použitie variačného prístupu na riešenie mechanických modelov *metódou konečných prvkov* (MKP), ktorá triedu prípustných funkcií zužuje na polynómy špeciálnych vlastností a hľadá tzv. „slabé riešenie“ na podoblastiach, tzv. konečných elementoch. Pripomeňme, že MKP sa stala univerzálnou metódou statickej a dynamickej analýzy modelov inžinierskych konštrukcií. Bez Eulera by dnes i stavebníctvo vyzeralo celkom inak!

6. Záver

Euler vytvoril dielo úžasné svojou hĺbkou a rozsahom, ktoré sa stalo trvalým zdrojom námetov a inšpirácie pre generácie jeho nasledovníkov. Len zoznam príspevkov, ktoré sa zaoberajú rozborom, objasnením a sprístupnením Eulerových uzavretých prác, by naplnil celé zväzky. Na tomto mieste sa však patrí pripomenúť aspoň zaujímavú prácu o Eulerovi [10] posledne zverejnenú na stránkach PMFA.

Leonhard Euler bol v histórii ľudstva asi jediný tvorca, ktorý dokázal vo svojom živote zúročiť celý svoj talent; bol však do istej miery odkázaný na obmedzenú výkonnosť svojich súčasníkov i nasledovníkov, a tí, ako bolo spomenuté, dodnes nestihli celé jeho dielo zverejniť. Velikán ľudského ducha Leonhard Euler si zaslúži náš obdiv a úctu.

Literatúra

[1] Timoshenko, S.: *History of Strength of Materials.* Dover Publications Inc., New York 1983, str. 28–36.

[2] Beckmann, P.: *Historie čísla* π (preklad anglického originálu). Academia, Praha 1998, str. 123–130.

[3] Singh, S.: *Fermats letzter Satz* (nemecký preklad anglického originálu). Carl Hanser Verlag, München – Wien 1998, str. 98–116.

[4] Hobst, E.: *Methode der finiten Elemente im Stahlbetonbau.* In: „Beton- und Stahlbetonbau“ *95* (2000), č. 10, Ernst und Sohn, Berlin 2000, str. 572–583.

[5] Courant, R.: *Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija, 2. diel* (preklad nemeckého a anglického vydania). Izdateľstvo „Nauka“, glavnaja redakcija fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva 1979, str. 514–543.

[6] Kowal, S.: *Matematika pro volné chvíle* (preklad poľského originálu). SNTL, Polytechnická knižnice, řada I, sv. 114, Praha 1985, str. 246–255.

[7] Kolář, V., Sobota, J.: *Stavební mechanika, díl IIB.* STNL/SVTL, Praha 1965, str. 287–293.

[8] Hobst, E.: *Okrajové podmínky a singularity — jak přesná je metoda konečných prvků?* In: Zborník seminára „Statika 2002“, SCIA CZ s. r. o., Praha/Brno 2002, str. 49–79.

[9] Hobst, E.: *Modelovanie okrajových podmienok a singularít v metóde konečných prvkov.* In: Zborník 2. seminára „Modelovanie stavebných konštrukcií 2002, SCIA SK s. r. o., Žilina 2002, str. 23–46.

[10] Moc, O.: *Počítání Leonharda Eulera s nekonečnými součiny.* PMFA *50* (2005), str. 27–43.