Michal Křížek

Abelovu cenu v roce 2005 získal Peter Lax

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 50 (2005), No. 4, 265--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141278

Abelovu cenu v roce 2005 získal Peter Lax

Michal Křížek, Praha

Obr. 1. PETER LAX

Norská akademie věd a umění se rozhodla udělit Abelovu cenu za rok 2005 význačnému matematikovi Peteru D. Laxovi za jeho fundamentální příspěvky k teorii a aplikacím parciálních diferenciálních rovnic a výpočtu jejich řešení. Tuto v pořadí již třetí Abelovu cenu[1]) získal P. Lax dne 18. května 2005 společně s peněžitou odměnou 980 000 USD. Týž den pak proslovil Abelovu přednášku na půdě univerzity v Oslu.

Peter David Lax se narodil 1. května 1926 v Budapešti. V roce 1941 se s rodiči přestěhoval do New Yorku. Zde v roce 1949 získal titul Ph. D. pod vedením Richarda Couranta. O rok později začal pracovat v Los Alamos jako konzultant. Od roku 1951 je P. Lax zaměstnám v Courantově ústavu matematických věd (University of New York), kde v letech 1972–1980 působil ve funkci ředitele. V období 1969–1971 byl viceprezidentem Americké matematické společnosti a později (1977–1980) se stal jejím prezidentem. Během života získal řadu významných ocenění. Např. v roce 1986 převzal v Bílém domě z rukou prezidenta Ronalda Reagana medaili za vědu (National Medal of Science). O rok později obdržel Wolfovu cenu a v roce 1992 Steelovu cenu Americké matematické společnosti. Celkem 9 univerzit mu udělilo čestný doktorát.

Podívejme se stručně na některé Laxovy důležité výsledky (viz [2]).

1. Laxovo-Milgramovo lemma

Celá řada úloh z technické praxe vede na okrajové úlohy pro parciální (popř. obyčejné) diferenciální rovnice eliptického typu. Typickými příklady jsou diferenciální rovnice

[1]) O první a druhé Abelově ceně jsme informovali čtenáře v PMFA *49* (2004), 11–14 a 265–267.

Prof. RNDr. MICHAL KŘÍŽEK, DrSc. (1952), Matematický ústav, Akademie věd ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `krizek@mbox.cesnet.cz`

popisující gravitační, elektrický či magnetický potenciál, rovnice proudění, rovnice lineární pružnosti, rovnice ustáleného vedení tepla apod. Klasické řešení těchto úloh většinou neexistuje, neboť případné materiálové konstanty mohou mít skoky, vyšetřovaná oblast nemusí být konvexní nebo nemá hladkou hranici. Potíže mohou nastat i v těch bodech hranice, kde jeden typ okrajové podmínky přechází v jiný typ a kdy se požaduje spojitost derivací až do hranice. To způsobuje, že nelze obecně zaručit globální hladkost řešení, tj. neexistují derivace vystupující v klasické formulaci.

Proto se většinou hledá tzv. slabé řešení těchto úloh, kdy výše uvedené obtíže nejsou na překážku, a pomocí Laxova-Milgramova lemmatu (viz [3]) lze dokázat existenci právě jednoho takového řešení.

Laxovo-Milgramovo lemma. *Nechť V je Hilbertův prostor nad reálnými čísly s normou $\|\cdot\|$, F je spojitý lineární funkcionál na V a nechť $a(\cdot\,,\cdot)$ je bilineární forma, která je spojitá, tj.*

$$\exists C > 0 \quad \forall v, w \in V\colon \quad |a(v,w)| \leqq C\|v\|\,\|w\|, \tag{1}$$

a V-eliptická, tj.

$$\exists c > 0 \quad \forall v \in V\colon \quad a(v,v) \geqq c\|v\|^2. \tag{2}$$

Pak problém: Najít $u \in V$ takové, že

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

má právě jedno řešení.

Ukažme si použití Laxova-Milgramova lemmatu na jednoduchém příkladě. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \{1,2,3,\ldots\}$) je omezená oblast, jejíž hranice $\partial\Omega$ je lipschitzovsky spojitá (viz [5]). Klasické řešení Poissonovy rovnice s Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega, \tag{4}$$
$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \tag{5}$$

kde Δ je Laplaceův operátor a f patří do Lebesgueova prostoru $L^2(\Omega)$, se obvykle hledá v prostoru $C^2(\Omega)$. Je-li funkce f např. po částech spojitá, což je z praktického hlediska dosti častý případ, klasické řešení nemusí existovat. Proto si nyní stručně naznačíme, jak se klasická úloha převede na slabou formulaci.

Zaveďme prostor testovacích funkcí

$$V = \left\{ v \in L^2(\Omega)\colon \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \ i = 1,\ldots,d, \ \ v = 0 \ \text{ na } \partial\Omega \right\}, \tag{6}$$

kde parciální derivace chápeme ve smyslu distribucí a rovnost $v = 0$ na hranici $\partial\Omega$ ve smyslu stop (viz [1] nebo [5]). Předpokládejme, že nějaké řešení $u \in V \cap C^2(\Omega)$

splňuje (4)–(5). Vynásobíme-li rovnici (4) testovací funkcí $v \in V$, pak integrací přes Ω dostaneme

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) v \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f v \, \mathrm{d}x.$$

Greenova věta (integrace per partes) aplikovaná na levou stranu rovnice dává

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f v \, \mathrm{d}x \quad \forall v \in V; \tag{7}$$

příslušný povrchový integrál přes $\partial\Omega$ je roven nule, neboť testovací funkce v je nulová na $\partial\Omega$. Úloha najít $u \in V$ splňující rovnost (7) se nazývá *slabá formulace* klasické úlohy a její řešení $u \in V$ se nazývá *slabé řešení*. Navíc vidíme, že pokud klasické řešení úlohy (4)–(5) existuje v prostoru $V \cap C^2(\Omega)$, pak je také slabým řešením.

Označíme-li $a(u, v)$ levou stranu rovnice (7) a $F(v)$ její pravou stranu, pak (7) je tvaru (3). Snadno se lze přesvědčit, že prostor (6) s vhodným skalárním součinem je Hilbertův, že F je lineární spojitý funkcionál na V a že $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ je bilineární spojitá forma. Její V-eliptičnost (2) plyne z Friedrichsovy nerovnosti (viz [5]). Z Laxova-Milgramova lemmatu plyne existence právě jednoho $u \in V$, které splňuje (7) pro $f \in L^2(\Omega)$ (např. pro f po částech spojitou).

Přibližné řešení u_h úlohy (7) se většinou hledá v nějakém konečněrozměrném neprázdném podprostoru $V_h \subset V$, kde h charakterizuje míru diskretizace. Existence a jednoznačnost takového $u_h \in V_h$ je pak opět zaručena Laxovým-Milgramovým lemmatem.

Laxovo-Milgramovo lemma zobecňuje známou Rieszovu větu o reprezentaci lineárních spojitých funkcionálů pomocí skalárního součinu. Forma $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ ale není skalárním součinem, pokud není symetrická. S takovými formami je nutno pracovat v úlohách proudění, při výpočtu elektromagnetického pole aj.

2. Konvergence numerických schémat

Nechť A je lineární diferenciální operátor eliptického typu v prostorových proměnných $x = (x_1, \ldots, x_d)$, který každé dostatečně hladké skalární funkci $u = u(t, x)$ přiřazuje skalární funkci Au. Uvažujme parabolickou úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \quad \text{pro} \;\; t \in [0, T], \tag{8}$$

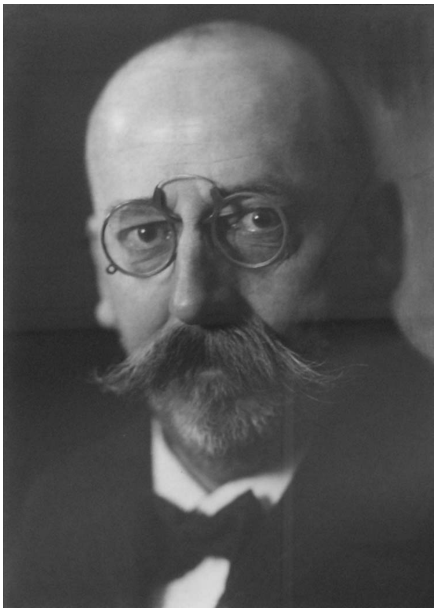
$$u(0, \,\cdot\,) = u_0, \tag{9}$$

kde $T > 0$ a u_0 představuje počáteční podmínku pro u v čase 0.

Peter Lax se zabýval numerickou metodou konečných diferencí pro řešení této počáteční úlohy. K jeho hlavním výsledkům patří věta, podle níž je metoda konvergentní právě tehdy, když je stabilní a konzistentní (pro příslušné definice viz např. přehledový článek [4]). Tato nutná a postačující podmínka je známá jako Laxův princip ekvivalence. Později ji Lax společně s Wendroffem zobecnil na jistou třídu nelineárních hyperbolických rovnic. Laxova-Wendroffova věta zhruba říká, že pokud diskrétní řešení jsou stejnoměrně omezená a konvergují, pak jejich limita je řešením původního hyperbolického problému (viz [1]).

P. Lax také studoval rázové vlny, které vznikají např. při nadzvukových rychlostech letadel nebo při explozích. Vyvinul nové matematické postupy, které nám umožňují pochopit a též simulovat na počítači tento důležitý jev, kdy dochází skokem ke změně hustoty a tlaku. V roce 1957 přišel s entropickou podmínkou, jež dovoluje z mnoha nespojitých a singulárních řešení vybrat to, které má dobrý fyzikální smysl. Poznamenejme ještě, že entropickou podmínkou se u nás zabýval též prof. Jindřich Nečas.

3. Laxův přínos k teorii solitonů

Obr. 2. D. J. Korteweg a G. de Vries

V roce 1834 si skotský inženýr John Scott Russell povšiml, že když se na vodním kanálu zastaví loď tažená koňmi, vznikne izolovaná vlna, která se šíří dále po kanálu až do vzdálenosti 1 km. Později nizozemský matematik D. J. Korteweg a jeho student G. de Vries (viz obr. 2) odvodili evoluční parciální diferenciální rovnici, která tento jev popisuje:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \tag{10}$$

kde $u = u(t, x)$ označuje výšku vlny v čase t a bodě x. Tak vznikla matematická teorie solitonů. P. Laxovi se podařilo pomocí Lieovy teorie grup rozložit nelineární diferenciální operátor třetího řádu na pravé straně rovnice (10) na operátory nižšího řádu. To pak umožnilo snadněji řešit Kortewegovu-de Vriesovu rovnici analyticky i numericky. Dnes má teorie solitonů řadu aplikací v kvantové teorii pole, při přenosu informace ve světlovodičích, ale i při modelování biologických systémů.

Závěr

Peter Lax sám sebe považuje za čistého i aplikovaného matematika. Významně se zasloužil o řešení problémů matematické fyziky popsaných nelineárními diferenciálními rovnicemi. Bohužel neexistuje obecná numerická metoda, která by umožňovala řešit jakýkoliv nelineární problém. A tak se každá třída nelineárních problémů musí vyšetřovat zvlášť. P. Lax se kromě již uvedených problémů zabýval řešením Eulerových rovnic proudění plynů. Studoval také matematické modely porézních materiálů, které umožňují simulovat pohyb uhlovodíků v přírodních nalezištích. Je spoluautorem známé teorie rozptylu (angl. Lax-Phillips scattering theory). Další jeho objevy jsou obsaženy ve vybraných spisech [2].

P. Lax je velký příznivec využití počítačů v matematice. Tvrdí, že úloha počítačů v matematice je srovnatelná s významem dalekohledů v astronomii či mikroskopů v biologii. Mladým studentům doporučuje, aby si trénovali matematické dovednosti na řešení nějakého konkrétního problému aplikované matematiky.

Poděkování. Práce na tomto článku byla podpořena výzkumným záměrem AV0Z 101 90503 a projektem MŠMT č. 1P05ME749.

L i t e r a t u r a

[1] FEISTAUER, M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics.* Longman, Harlow 1993.
[2] LAX, P. D.: *Selected Papers. Volume I and II.* Eds. A. J. MAJDA and P. SARNAK, Springer, New York 2005.
[3] LAX, P. D., MILGRAM, A.: *Parabolic equations.* Ann. Math. Stud. *33*, Princeton 1954, 167–190.
[4] LAX, P. D., RICHTMYER, R. D.: *Survey of the stability of linear finite difference equations.* Comm. Pure Appl. Math. *9* (1956), 267–293.
[5] NEČAS, J., HLAVÁČEK, I.: *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-plastic Bodies: An Introduction.* Elsevier, Amsterdam 1981.
[6] http://www.abelprisen.no/en/