Jiří Horák

K problému odezvy atmosféry na malé vnější perturbace

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 1, 46--52

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141208`

K problému odezvy atmosféry na malé vnější perturbace

Jiří Horák, Praha

1. Úvod

Zamýšlíme-li se nad možnými aktuálními změnami klimatu výrazně ovlivňujícími lidskou činnost, z pohledu teoreticky zaměřeného pracovníka se středem zájmů v dynamické meteorologii půjde o otázky vyžadující řešení problému odezvy atmosféry na malé vnější perturbace libovolné formy a také její predikce. Ve fyzice atmosféry pro realizaci tohoto záměru obracíme pozornost na prognostické modely atmosféry používané při numerické předpovědi počasí. Náleží mezi ně rovněž rovnice vorticity (vířivosti) odvozená z pohybové rovnice, jež je vyjádřením druhého Newtonova pohybového zákona, a také její konečněrozměrné aproximace. Silně redukovat dimenzi zkoumaného prostoru (v hydrodynamice je to Banachův prostor se spočetnou bází, vystupující jako fázový prostor spojitých prostředí) a převést otázky o atraktorech evolučních parciálních diferenciálních rovnic, tedy i rovnici vorticity, na konečněrozměrný systém je umožněno výsledky o existenci a hladkosti útvarů, zvaných inerciální variety (inertial manifolds). Pro dynamickou meteorologii je podnětné, že existence inerciální variety byla prokázána i pro případ barotropní tekutiny na rotující ploše kulové [1, 2]. Bude to právě konečněrozměrný model dynamiky atmosféry, vycházející z rovnice vorticity, pomocí něhož budeme studovat odezvy atmosféry na malé vnější perturbace. Ve shodě s tímto záměrem je rovněž predikce maximální možné odezvy atmosférických systémů na vnější vzruchy. Jsou to výsledky zejména ruské matematické školy [3–7], založené na kvalitativní teorii parciálních diferenciálních rovnic, kde byla matematická teorie klimatu chápána jako konstrukce podstatné invariantní míry na atraktoru klimatického systému, včetně analýzy možných pohybů na atraktoru a hledání jeho struktury. Její studie, započaté koncem devadesátých let, vyústily v samu matematiku klimatického modelování (mathematics of climate modeling), která se tak stala prostředkem k prosazování moderních přístupů k problémům soudobé fyziky atmosféry. V tomto duchu je pojat i náš příspěvek, kterým na stránkách Pokroků završíme naše dosavadní pojednání o klimatu jako objektu matematického zkoumání.

RNDr. Jiří Horák, CSc. (1929), Ústav fyziky atmosféry AV ČR, Boční II/1403, 141 31 Praha 4.

2. Model cirkulace barotropní atmosféry a jeho citlivost na konstantní vnější perturbace

Uvažme rovnici barotropní vorticity na severní hemisféře zapsanou pro bezrozměrnou proudovou funkci $\psi(\theta, \lambda)$, kde $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$ a $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ jsou geografická šířka a délka [6]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta^{-1} J(\psi,\, \Delta\psi + l + h) = f - \alpha\psi + \mu\Delta\psi, \\ \psi\big|_{t=0} = \psi_0, \quad \psi\big|_{\theta=0} = 0, \quad \psi\big|_{\lambda=0} = \psi\big|_{\lambda=2\pi}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

V (2.1) jsou Δ Laplaceův operátor na ploše kulové, $J(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ jakobián, $l = 2\Omega \sin\lambda$ Coriolisův parametr (Ω je úhlová rychlost rotace Země), $h(\theta, \lambda)$ orografie (reliéf zemského povrchu), f vnější perturbace (forcing) a α, μ koeficienty parametrizující tření [6].

Aplikací Galerkinovy metody popsané např. v [8], s prvky báze tvořenými vlastními funkcemi Laplaceova operátoru na ploše kulové se zonálním číslem nejvýše rovným 7 (fázový prostor bude mít 36 dimenzí), dospějeme z (2.1) k systému obyčejných diferenciálních (galerkinovských) rovnic

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}t} + \big(\Delta^{-1} J(\psi_N,\, \Delta\psi_N + l,\, h_N),\, Y_i\big) = (f_N)_i - \alpha\psi_i + \mu\lambda_i\psi_i, \\ \psi_i\big|_{t=0} = \psi_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, N = 36.\end{gathered} \tag{2.2}$$

V systému (2.2) jsou ψ_N, f_N a h_N projekce proudové funkce, vnějšího vzruchu a orografie na vybraný galerkinovský podprostor, λ_i je vlastní (záporné) číslo Laplaceova operátoru na ploše kulové. Pro koeficienty α a μ dostáváme $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-2}$ a $\mu = 2 \times 10^{-4}$, viz [6]. Funkce f_N je tvaru

$$f_N = \big(\Delta^{-1} J(\psi_s, \Delta\psi_s + l + h)\big)\big|_{\top} + \alpha\psi_s - \mu\Delta\psi_s.$$

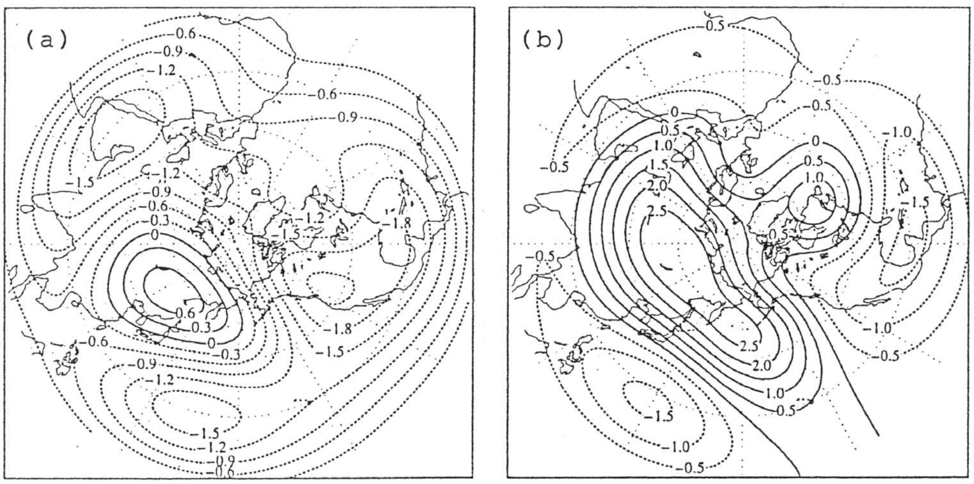
V tomto vztahu je ψ_s projekce střední lednové klimatické funkce na hladině 200 hPa na podprostor zadaný sférickými harmonikami s vlastními čísly s moduly menšími či rovnými 56, viz [6]. Symbolem $\big|_{\top}$ míníme operátor projekce na galerkinovský podprostor připadající v úvahu. Projekcí reálné orografie na tentýž podprostor byla také získána funkce h_N. S průběhy funkcí h_N a f_N je možno se seznámit v [6], kde je též uvedeno schéma, použité pro integraci rovnice typu $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = A(u)$, $u(0) = u_0$, kde $u(t) \in \mathbb{R}^N$ a operátor A působí v $\mathbb{R}^N$. Také si řekněme, že systém (2.2) při uvedených hodnotách parametrů má 12 kladných Ljapunovových exponentů a fraktální dimenze příslušného chaotického (podivného) atraktoru činí v průměru 26, viz [6].

V dalším výkladu se budeme odvolávat na důležité charakteristiky náhodného procesu, kterým jsou jisté přirozené ortogonální funkce. Ty vstupují do našich úvah po zadání určitého souboru počátečních podmínek zadaných ve fázovém prostoru systému (2.2). Odtud „vypuštěné“ fázové trajektorie tohoto systému generují náhodný proces, neboť trajektorie na atraktoru systému se chovají chaoticky. Nechť je $\big(\psi_i(t)\big)$, $i = 1, 2, \dots, N$, stacionární náhodný proces v N-rozměrném Euklidově prostoru a nechť je $\overline{\psi} = \langle \psi(t) \rangle$ střední stav tohoto procesu po vystředování v souboru jeho realizací. Výsledná veličina nezávisí na t, neboť proces $\big(\psi_i(t)\big)$ je stacionární. Přirozenými ortogonálními funkcemi (POF) nyní rozumíme vlastní vektory autokovariantní matice C s prvky $(C)_{ij} = \langle (\psi_i(t) - \overline{\psi}_i) \cdot (\psi_j(t) - \overline{\psi}_j) \rangle$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, N$. Nízkofrekvenčními POF jsou vlastní vektory matice N^τ: $(N^\tau)_{ij} = \langle \psi_i'(t,\tau)\psi_j'(t,\tau) \rangle$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, N$ a dostatečně velké τ.

Platí

$$\psi'(t, \psi) = \tau^{-1} \int_t^{t+\tau} \big(\psi(t') - \overline{\psi(t)}\big)\, \mathrm{d}t',$$

viz [6]. Průběh dvou nízkofrekvenčních POF je pro $\tau = 300 \times 24\,$hod. vynesen na obr. 1, který je převzat z [6], kde jsou popsány i příslušné matematické postupy k jejich získání.



Obr. 1. První (a) a druhá (b) nízkofrekvenční POF systému v bezrozměrných jednotkách (podle [6]).

Nyní náš zájem přeneseme na otázky citlivosti modelu k vnějším konstantním perturbacím. Půjde nám o to, k jakým změnám středního stavu systému (2.2) může přitom docházet. K dosažení tohoto cíle nám bude nápomocná rovnice (2.2) přepsaná do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + B(\psi) + A\psi = f.$$

Zde je ψ sloupcový vektor se složkami ψ_i, B nelineární část a A lineární část evolučního operátoru. Pro perturbační rovnici poté máme

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{-1}}{\mathrm{d}t} + B(\psi^{(1)}) + A\psi^{(1)} = f + \delta f.$$

Dříve než zaměříme pozornost na rozdíl mezi středním stavem výchozího a perturbovaného systému, označený veličinou φ, připomeňme si, že rovnice typu (2.2) s konečněrozměrným kompaktním atraktorem mají na tomto atraktoru alespoň jednu invariantní míru. Její existenci zaručuje v čase vystředovaná funkce ψ, pro kterou dostáváme $\overline{\psi} = \lim\limits_{T\to\infty} T^{-1} \displaystyle\int_0^T \psi(t)\,\mathrm{d}t$. Na základě takové míry lze systém interpretovat jako stacionární náhodný proces ve smyslu teorie pravděpodobnosti.

Podle naší domluvy píšeme

$$\varphi = \overline{\psi^{(1)}} - \overline{\psi} = \int \psi^{(1)}\,\mathrm{d}\mu(\psi^{(1)}, \delta f) - \int \psi\,\mathrm{d}\mu(\psi, 0)$$

a funkce $\mu(\psi^{(1)}, \delta f)$ a $\mu(\psi, 0)$ považujeme za invariantní míry perturbovaného a původního systému. Zajímá nás chování φ při $\delta f \to 0$. Protože invariantní míra systému (2.2) na jeho atraktoru nemusí být spojitou funkcí malých vnějších perturbací, při takovém limitním přechodu nelze apriori vyloučit ze zřetele výskyt různých bifurkací, při nichž dynamika na atraktoru může doznat podstatné změny již při dosti malých perturbacích. Může dojít ke „katastrofické situaci“, charakterizované nespojitostí středního stavu systému při působení vnějších vzruchů. Podle [6] k takovému jevu může dojít již tehdy, je-li euklidovská norma pravé části f dosti malá. Proto je třeba vybrat parametry systému a rovněž perturbaci f tak, aby chování systému bylo výrazně chaotické. Pak lze očekávat spojitou závislost invariantní míry na malých poruchách operátoru systému. Je-li navíc invariantní míra perturbovaného systému dostatečně hladkou funkcí δf, očekáváme platnost vztahu $\varphi = U\delta f + \varepsilon(\delta f)$, kde $\varepsilon(\delta f)$ je jistá veličina s malou euklidovskou normou vzhledem k $U\delta f$ s maticí U, která bude předmětem dalšího šetření.

Především nás zajímá perturbace δf_{opt} s euklidovskou normou generující největší možnou odezvu $\varphi_{\max}$ systému, jmenovitě zápis

$$\frac{\left|U\delta f_{\mathrm{opt}}\right|^2}{\left|\delta f_{\mathrm{opt}}\right|^2} = \sup_{\delta f \neq 0} \frac{\left|(U\delta f,\, U\delta f)\right|}{\left|\delta f\right|^2};$$

zde i nadále je $|\cdot|$ norma příslušného vektoru. Suprema bude dosaženo pro vlastní vektor δf_{opt} matice $U^{\mathrm{T}}U$ (U^{T} je matice transponovaná k matici U), odpovídající největšímu vlastnímu číslu $\lambda_{\max}$ matice U: $U^{\mathrm{T}}U\delta f_{\mathrm{opt}} = \lambda_{\max}^2 \delta f_{\mathrm{opt}}$. S přihlédnutím ke vztahu

$$\lambda_{\max}^2 \varphi_{\max} = \lambda_{\max}^2 U\delta f_{\mathrm{opt}} = U\lambda_{\max}^2 \delta f_{\mathrm{opt}} = UU^{\mathrm{T}}U\delta f_{\mathrm{opt}} = UU^{\mathrm{T}}\varphi_{\max}$$

maximální odezva $\varphi_{\max} = U\delta f_{\mathrm{opt}}$ co do směru spadá s vlastním vektorem matice UU^{T} příslušejícím $\lambda_{\max}$. Nazvěme vlastní vektory operátoru $U^{\mathrm{T}}U$ „singulárními perturbacemi“ a vlastní vektory operátoru UU^{T} „singulárními odezvami“. Vlastní vektory operátorů $U^{\mathrm{T}}U$ a UU^{T}, odpovídající největšímu vlastnímu číslu, budeme označovat jako „optimální perturbace“ a „maximální odezvy“. Dodejme, že druhé odmocniny vlastních čísel matice UU^{T} pojmenujeme jako „koeficienty zesílení“ (terminologie je převzata z [6]). Úhrnem lze proto říci, že při známé normě generuje „optimální perturbace“ v normě „maximální odezvu“ a poměr jejich norem je roven největšímu „koeficientu zesílení“.

Důležitým krokem je formulace numerického algoritmu pro výpočet operátoru U. S odkazem na [6] při volbě $\delta f = re_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, kde e_i je i-tý souřadnicový vektor a r jistá malá normovací konstanta, získáme operátor U minimalizací normy ε ve výrazu $\overline{\psi^{(1)}}(i,r) - \overline{\psi} = rUe_i + \varepsilon$. Je třeba říci, jak dospějeme ke střední hodnotě $\overline{\psi} = \langle \psi \rangle$. Vyjdeme z daného souboru počátečních podmínek ve fázovém prostoru systému (2.2). Jestliže odtud integrujeme systém po dostatečně dlouhou dobu, trajektorie systému skončí na jeho atraktoru a budou aproximací nějakého rovnovážného rozdělení na atraktoru systému. Nezapomínejme, že u systému (2.2) se setkáváme s invariantní mírou. Nazvěme takový soubor počátečních dat bazálním souborem. S jeho pomocí máme možnost přibližně spočítat $\overline{\psi}$ jako $\langle \psi \rangle$, kde lomenými závorkami označujeme středování funkce ψ v tomto souboru. Čím déle systém integrujeme, tím přesnější střední hodnotu získáme.

Operátor U můžeme získat například pomocí metody nejmenších čtverců. Příslušný algoritmus je podobně popsán v [6]. Pokud je norma ε malá vůči normě rU, odezvu systému lze považovat za lineární s chybou lineární aproximace

$$K = \max_i \frac{|\varphi(i,r,t) - Ure_i|}{|\varphi(i,r,t)|}\,.$$

Výsledky numerických experimentů s perturbovaným systémem rovnic barotropní vorticity na severní hemisféře s uvedenými koeficienty parametrizující tření ukázaly, že operátor U (jeho vlastní hodnoty i vlastní vektory) nezávisí na čase, počínaje $t > 50$ dnů. Pro tato t došlo k ustavení stacionární odezvy systému na malé vnější perturbace. Chyba lineární aproximace dosahovala v průměru hodnoty 0,08 a prakticky nezávisela na veličině $|r|$. To značí, že odezva systému na malé vnější perturbace je z 92 % dána lineární částí (operátorem U). Podle [6] dosažené výsledky jsou statisticky významné.

Úhrnem zaznamenejme získané výsledky do následujících odstavců:

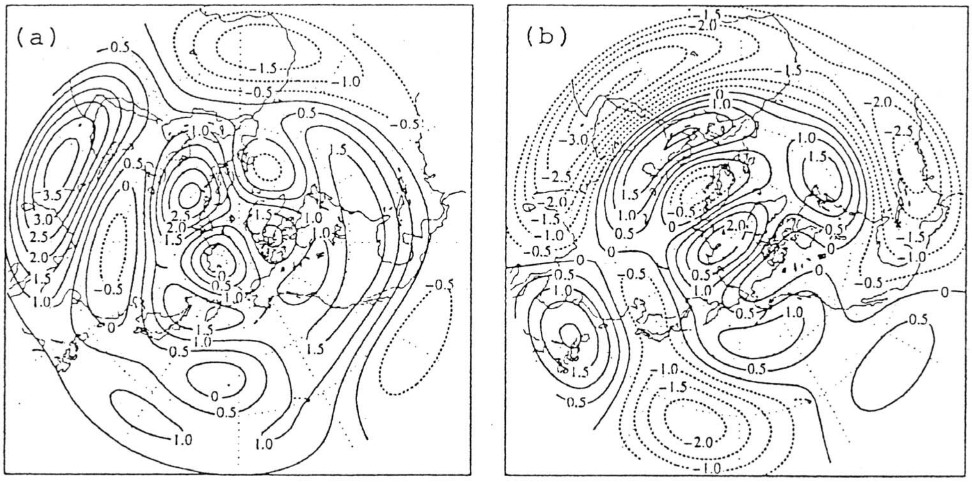
1. V odezvě systému (2.2) na malé vnější perturbace dominuje lineární část operátoru odezvy U. Na nelineární část tohoto operátoru připadá 8 % odezvy a tento poměr se prakticky zachovává v rozsáhlém intervalu změn $|r|$.

2. Struktura lineární části operátoru odezvy U nezávisí na normě perturbace pro širokou paletu změn $|r|$. Vlastní vektory operátoru U tedy nezávisí na veličině r. První dvě singulární perturbace tohoto operátoru jsou znázorněny na obr. 2 a jim odpovídající singulární odezvy jsou na obr. 3.

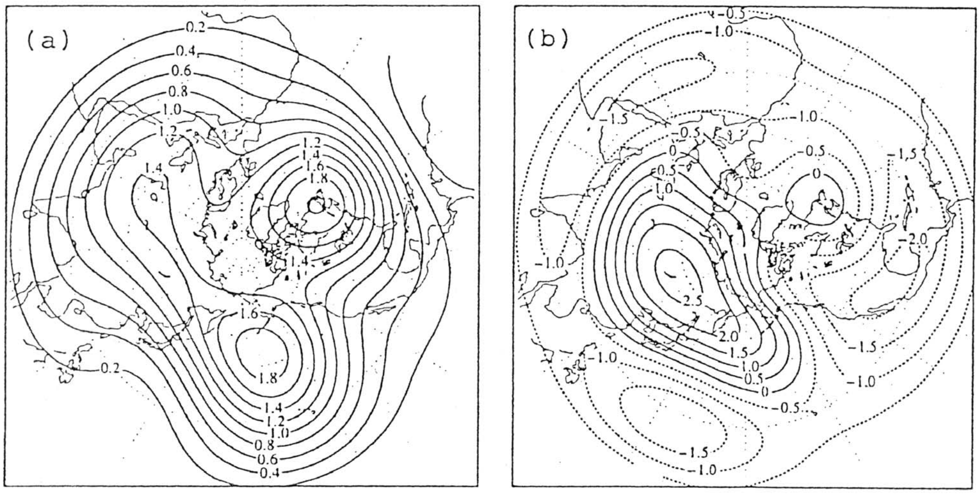
3. Chyba lineární aproximace operátoru U v průměru činí 10 %. Ve spektru operátoru U (spektrum totálně spojitého samoadjungovaného pozitivně definitního operátoru je tvořeno jen vlastními čísly tohoto operátoru) proto nelze od sebe dostatečně odlišit větší vlastní čísla operátoru U, např. vlastní číslo 94, od ostatních vlastních čísel, mezi nimiž druhé vlastní číslo nabývá hodnoty 74.

4. Pomocí lineárního modelu máme možnost s vysokou přesností určit jak podprostor „navlečený“ na dvě maximální singulární odezvy systému (2.2), tak i podprostor odezev tohoto systému na malé vnější perturbace.

5. Maximální singulární odezva systému (2.2) je blízká nízkofrekvenčním POF tohoto systému. Ukazuje na to vysoký stupeň vázanosti (koeficient korelace) mezi odezvou a první nízkofrekvenční POF, který činí 0,82 při $|r| = 0{,}2\,\%$. Maximální



Obr. 2. První (a) a druhá (b) singulární perturbace pro model (2.2) při $|r| = 0{,}2\,\%$ v bezrozměrných jednotkách (podle [6]).



Obr. 3. První (a) a druhá (b) singulární odezva pro model (2.2) při $|r| = 0{,}2\,\%$ v bezrozměrných jednotkách (podle [6]). Stejně jako v obr. 2 i zde vynesené veličiny odpovídají největším vlastním číslům matice U.

singulární odezva systému (2.2) prakticky náleží rovině „navlečené“ na prvé dvě nízkofrekvenční POF systému.

3. Závěrečné poznámky

Stojíme na prahu významné matematizace věd o Zemi prostupující i do oblasti, kde studujeme dlouhodobé aspekty a celkové účinky meteorologických procesů probíhajících na Zemi. Objevují se nové, netradiční přístupy k modelování klimatu založené na kvalitativní dynamice a spolu s ním si klademe otázky: Na jaké úrovni se projevují změny klimatu v matematickém modelu cirkulace a jak je citlivý takový model, reprezentovaný nelineární parciální diferenciální rovnicí barotropní vorticity, k vnějším silám? Na hledání odpovědí na tyto otázky je zaměřen i náš článek. Stručně je lze shrnout do tvrzení: Operátor odezvy modelu barotropní cirkulace na severní hemisféře na malé vnější vlivy je možno s dostačující přesností považovat za lineární v širokém spektru změn normy perturbace. Maximální odezva systému (při dané normě perturbace) je blízká k prvním nízkofrekvenčním POF systému, které jsou důležitými charakteristikami náhodného procesu.

Stranou našeho zájmu zůstal někde diskutovaný lineární dynamicko-stochastický model $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t + L(u) = q(t)$, kde je $u(t) \in \mathbb{R}^N$, L lineární „stabilní“ operátor (jeho spektrum leží napravo od imaginární osy) a $q(t)$ značí náhodný proces parametrizovaný nelineární interakcí v systému (2.2). Je třeba říci, že i když vlastní vektory matice odezvy lineárního a výchozího nelineárního modelu jsou k sobě blízké, „koeficient zesílení“ optimální perturbace pro výchozí nelineární model je v průměru o 1,5 menší než pro dynamicko-stochastický model. Tento fakt vyžaduje další zkoumání.

L i t e r a t u r a

[1] Gorelov, A. S., Filatov, A. N.: *Iněrcialnye mnogoobrazija uravněnij barotropnoj atmosfery na vraščajuščejsja sfere.* Sbor. trud. Gidrometcentra Rus. fed. *323* (1992), 71–97.

[2] Horák, J.: *Equation of a Barotropic Fluid on Rotating Spherical Surface and its Inertial Manifold.* Studie geoph. et geod. *44* (2000), 26–37.

[3] Dymnikov, V. P., Grutsin, A. S.: *On the Structure of the Attractors of the Finite-dimensional Approximations of the Barotropic Vorticity Equation on a Rotating Sphere.* Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling *1* (1997), 12–37.

[4] Dymnikov, V. P., Filatov, A. N.: *O někotorych zadačach matematičeskoj teorii klimata.* Izv. AN. Fiz. atm. i okeana *3* (1995), 313–323.

[5] Dymnikov, V. P.: *O predskazuemosti izmeněnij klimata.* Izv. An. Fiz. atm. i okeana *6* (1998), 741–751.

[6] Grutsin, A. S., Dymnikov, V. P.: *Otkliv barotropnoj atmosfery na malye vněšnie vozdějstva. Teorija i čislennye experimenty.* Izv. An. Fiz. atm. i okeana *5* (1999), 565–581.

[7] Dymnikov, V. P., Filatov, A. N.: *Mathematics of Climate Modeling.* Birkhauser, Boston–Basel–Berlin 1997, 264 s.

[8] Horák, J., Krlín, L.: *Deterministický chaos a matematické modely turbulence.* Academia, Praha 1996, 444 s.