Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Aleš Kropáč

Pozoruhodná řešení problému N těles

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 48 (2003), No. 4, 308--315

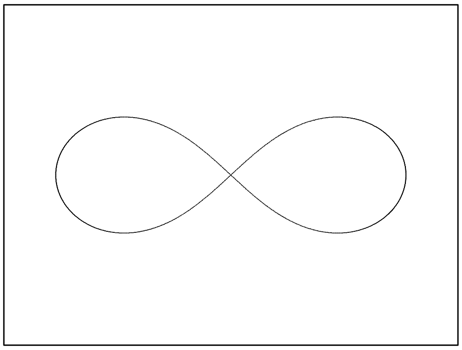
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141192`

Pozoruhodná řešení problému N těles

Aleš Kropáč, Praha

1. Úvod

Tento článek se zabývá zajímavými periodickými řešeními rovinného problému N těles, která na sebe gravitačně působí. Např. tři tělesa o stejných hmotnostech mohou obíhat po křivce ve tvaru čísla osm (viz obr. 1). Tato řešení byla nedávno objevena pomocí numerických metod, viz [2], [4], protože jejich explicitní analytický tvar není znám. V PMFA se o překvapivých řešeních problému N těles už psalo. Například v čísle 2 (1997) se objevil článek, který popisuje unikátní konstrukci vyvržení tělesa do nekonečna v konečném čase v soustavě pěti těles, viz [6]. Zájemce o problematiku řešení problému N těles odkazujeme také na článek [1].



Obr. 1. Trajektorie nového řešení problému tří těles.

Než přejdeme k podrobnému popisu vlastností nových řešení, připomeňme si několik základních pojmů. V dalším textu předpokládáme, že tělesa jsou idealizována v podobě hmotných bodů, jejichž pohyb se řídí podle klasické newtonovské mechaniky. Opomíjíme tedy veškeré efekty teorie relativity. Podle Newtonova gravitačního zákona působí na sebe dva hmotné body silou F, jejíž velikost je přímo úměrná součinu jejich hmotností m_1 a m_2 a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti r_{12}:

$$F = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,, \tag{1}$$

Mgr. Aleš Kropáč (1978), Matematický ústav Akademie věd ČR, Žitná 25, 115 67 Praha, e-mail: `kropac@math.cas.cz`.

Práce vznikla v rámci grantu č. A 1019201 GA AV ČR.

kde $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ je gravitační konstanta. Podívejme se nejprve na řešení rovinného problému dvou těles. Ten je znám jako Keplerova úloha, viz [4]. Pro vektor $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, kde $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ jsou polohové vektory těles, je pohyb popsán rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \varkappa \frac{M}{\|\vec{r}\|^3}\,\vec{r}, \tag{2}$$

kde $M = m_1 + m_2$ je Keplerova konstanta a $\|\cdot\|$ je euklidovská norma, která vyjadřuje vzdálenost těles. Rovnice (2) plyne z Newtonových zákonů síly, akce a reakce a z gravitačního zákona. Řešením Keplerovy úlohy je kuželosečka daná počátečními podmínkami. V tomto článku nás budou zajímat řešení, která jsou periodická, tj. je-li $T > 0$ perioda a $\vec{r}(t)$ je periodické řešení, pak platí $\vec{r}(t+T) = \vec{r}(t)$ pro libovolný čas t. V Keplerově úloze jsou periodickými řešeními pouze elipsy, nazývané Keplerovy elipsy.

Vyšetřování pohybu N hmotných bodů, které na sebe vzájemně gravitačně působí, pak vede na řešení soustavy nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu:

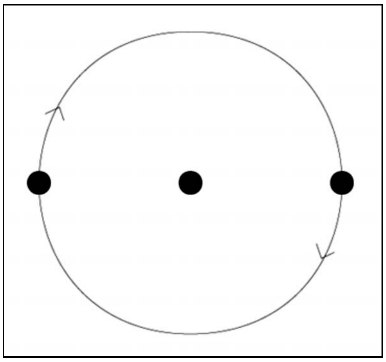
$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \varkappa \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^3}\,\vec{r}_{ij}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

kde m_j je hmotnost j-tého hmotného bodu, $\vec{r}_i$ označuje polohový vektor i-tého hmotného bodu a $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$. Soustavu (3) většinou doplňují počáteční podmínky pro polohy a rychlosti hmotných bodů, které zaručují existenci právě jednoho řešení, pokud nedojde ke kolizi těles (viz [6]). Vektory $\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_N(t)$ nazýváme řešením problému N těles, pokud splňují uvedené diferenciální rovnice (3).

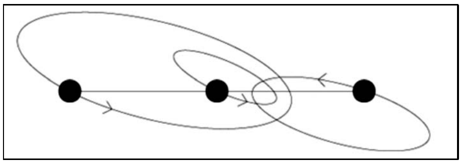
Snaha o řešení problému N těles má dlouhou historii. Již v roce 1885 byla vyhlášena soutěž, ve které bylo úkolem najít obecné řešení problému pro $N > 2$. Řešení tehdy nebylo nalezeno a cena byla udělena Henri Poincarému za jeho příspěvek [5], v němž dokázal, že obecné řešení nelze explicitně vyjádřit analyticky pomocí elementárních funkcí pro $N > 2$ (srov. [1]). Mnoho dalších významných matematiků se pokoušelo rozlousknout tento problém, bohužel však neúspěšně. Ve 20. století se přesto rozzářily dvě jiskřičky naděje. V roce 1907 publikoval Karl Sundman článek [7] s obecným řešením problému tří těles ve tvaru mocninné řady, která konvergovala pro všechny počáteční podmínky s výjimkou podmínek odpovídajících nulovému momentu hybnosti soustavy. Řešení pro případ N těles ve tvaru konvergentní mocninné řady se později objevilo v článku [8] čínského studenta Quidonga Wanga. Ten vyloučil počáteční podmínky vedoucí ke srážkám hmotných bodů. Znamená to tedy, že problém N těles byl vyřešen? Bohužel ne. Uvedené řady sice konvergují, ale neumíme je sečíst. Jejich konvergence je navíc velmi pomalá. Abychom získali dostatečně přesné polohy hmotných bodů v nějakém časovém intervalu, museli bychom sečíst miliony jejich členů a vlivem zaokrouhlovacích chyb jsou tato řešení prakticky nepoužitelná. K řešení soustavy (3) se proto používají numerické metody.

2. Eulerovo a Lagrangeovo řešení

Podívejme se nyní na periodická řešení pro rovinný případ tří těles libovolných hmotností. Nejjednodušší řešení objevil již v roce 1765 Leonhard Euler (viz obr. 2, 3) a v roce 1774 Joseph-Louis Lagrange (viz obr. 4, 5). Rovinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ uvažujme jako rovinu pohybu. Počáteční polohy hmotných bodů označme $\vec{r}_{0i} \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$, a nechť těžiště soustavy leží v počátku. Eulerovo řešení sestrojíme umístěním bodů na jednu přímku tak, že poměr jejich vzdáleností $\|\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j}\|/\|\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0k}\|$ je kořenem určitého polynomu s koeficienty závislými na hmotnostech těles. Vezměme nyní libovolná periodická řešení $\vec{\lambda}_i(t) \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$, úlohy tří těles, která mají stejnou excentricitu, periodu a společné ohnisko v počátku. Eulerovo řešení pak můžeme psát $\vec{r}_i(t) = \vec{\lambda}_i(t)$, $\vec{\lambda}_i(0) = \vec{r}_{0i}$. V každém okamžiku leží hmotné body na jedné přímce (jsou kolineární) a poměr jejich vzdáleností zůstává stejný.



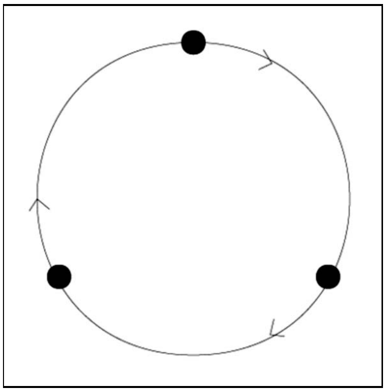
Obr. 2. Eulerovo řešení pro stejné hmotnosti.



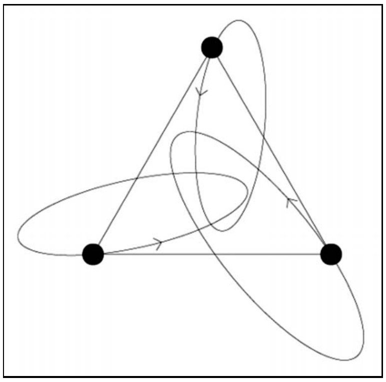
Obr. 3. Eulerovo řešení pro obecné hmotnosti.

Lagrangeovo řešení získáme umístěním počátečních poloh hmotných bodů $\vec{r}_{01}$, $\vec{r}_{02}$, $\vec{r}_{03}$ do vrcholů rovnostranného trojúhelníku. Opět si zvolme nějaké periodické řešení Keplerovy úlohy $\vec{\lambda}_i(t) \in \mathbb{C}$ s již uvedenými vlastnostmi. Pak Lagrangeovo řešení má tvar $\vec{r}_i(t) = \vec{\lambda}_i(t)$, $\vec{\lambda}_i(0) = \vec{r}_{0i}$. Každý bod obíhá po elipse takovým způsobem, že v libovolném okamžiku t tvoří hmotné body vrcholy rovnostranného trojúhelníku (viz [3]).

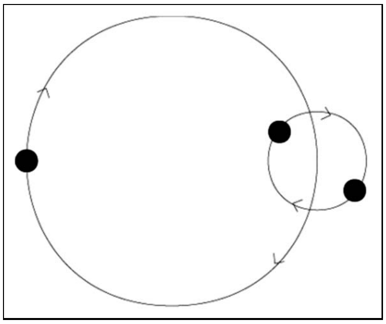
Pro studium problémů v astronomii jsou ještě velmi důležité tzv. Hillovy pevné dvojice. Ty modelují např. systém Slunce-Země-Měsíc. Dvě blízká tělesa obíhají kolem svého hmotného středu po skoro kruhových orbitách. Třetí zůstává ve velké vzdálenosti od těchto dvou a společně s hmotným středem dvou blízkých těles obíhá po málo výstředných elipsách kolem těžiště celé soustavy (viz např. obr. 6). Hillovy pevné



Obr. 4. Lagrangeovo řešení pro stejné hmotnosti.



Obr. 5. Lagrangeovo řešení pro obecné hmotnosti.



Obr. 6. Hillovy pevné dvojice.

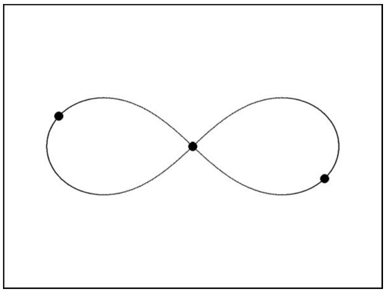
dvojice existují pro všechny poměry hmotností těles. Další důležitý případ problému tří těles je pro $m_3 = 0$, který má aplikace v kosmonautice.

3. Popis nového řešení problému tří těles

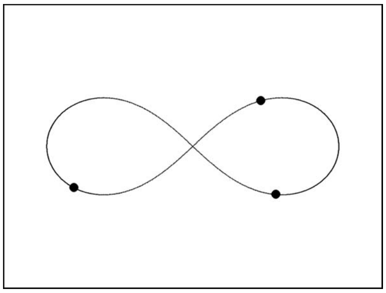
V dalším textu předpokládejme, že gravitační konstanta $\varkappa$ a všechny hmotnosti m_i jsou rovny jedné. Polohové vektory hmotných bodů v rovině opět označme $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$.

Trajektorie. V úvodu jsme se zmínili o novém periodickém řešení rovinného problému tří těles se stejnými hmotnostmi. Všechna tři tělesa se pohybují po stejné trajektorii a ta je zajímavá nejenom pro svůj svérázný vzhled, osovou symetrii podle os x a y, ale i pro další vlastnosti, jako je např. stabilita.

Těžiště soustavy umístěme do počátku. Trajektorie nově objevených řešení označme $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\vec{r}_3(t)$. Je-li T perioda, pak $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t - \frac{1}{3}T)$ a $\vec{r}_3(t) = \vec{r}_1(t - \frac{2}{3}T)$. Tělesa jsou tedy od sebe fázově posunuta o třetinu periody. V čase $t = 0$ tvoří bod m_1 střed úsečky mezi body m_2 a m_3. Uspořádání tohoto typu nazýváme Eulerova konfigurace a označujeme ji E_i, $i = 1, 2, 3$, podle toho, který bod tvoří střed úsečky. Každou šestinu periody procházejí body Eulerovou konfigurací v pořadí E_1, E_3, E_2, E_1, E_3, E_2 po celou periodu T. V půli cesty mezi dvěma konfiguracemi E_i, E_j utvoří body vrcholy rovnoramenného trojúhelníku. Danou konfiguraci označme M_i (viz obr. 7, 8). Za čas $\frac{1}{12}T$ projdou body z konfigurace E_1 do konfigurace M_2, a to byl také klíč k sestrojení nového řešení, viz [2].



Obr. 7. Eulerova konfigurace.



Obr. 8. Lagrangeova rovnoramenná konfigurace.

Stabilita. Důležitou vlastností řešení je stabilita. Je známo jen velmi málo stabilních řešení problému tří těles se stejnými hmotnostmi[1]) a navíc se nové řešení získalo metodami variačního počtu, které obvykle dávají nestabilní dynamická řešení. Hillovy pevné dvojice jsou stabilní za určitých podmínek, Lagrangeovo řešení je stabilní jen tehdy, pokud je jedno těleso hmotnější než ostatní dvě, a Eulerova řešení stabilní nejsou.

[1]) Nestabilita konfigurace z obr. 4 je hlavní příčinou toho, proč nepozorujeme galaxie se třemi spirálními rameny otočenými o 120°.

Trajektorie nového řešení je atraktorem, což znamená, že řešení s počátečními podmínkami velmi málo odlišnými od počátečních podmínek řešení ve tvaru osmičky má tendenci se vrátit zpět na původní trajektorii řešení. Otázkou proto je, zda je možné daný systém pozorovat někde ve vesmíru. Autoři článků [2] a [4] odhadují, že pravděpodobnost existence skutečné osmičky se pohybuje v rozmezí mezi jednou osmičkou na galaxii a jednou na celý vesmír.

Konfigurační prostor. Při řešení pohybu soustavy N hmotných bodů se zavádí tzv. konfigurační prostor. Místo vyšetřování pohybu N hmotných bodů např. v rovině vyšetřujeme pohyb jen jednoho bodu v prostoru o dimenzi $2N$, tj. v konfiguračním prostoru. Mějme tedy v rovině tři hmotné body, které na sebe působí přitažlivými silami podle Newtonova zákona. Pak konfigurační prostor je množina

$$\Gamma = \left\{ r = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \in \mathbb{C}^3 \colon \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i = 0 \right\}, \tag{4}$$

kde podmínka $\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i = 0$ vyjadřuje, že hmotný střed soustavy leží v počátku.

Newtonovy rovnice jsou invariantní vůči izometriím prostoru $\mathbb{R}^2$, tj. posunutí a rotaci. Máme tedy možnost snížit dimenzi konfiguračního prostoru a dosáhnout tak určitého zjednodušení. Můžeme vytvořit kvocientní strukturu podle grupy těchto izometrií. Výsledkem je prostor orientovaných trojúhelníků, ve kterém neuvažujeme posunutí ani rotace. Tento prostor má dimenzi tři a můžeme ho proto ztotožnit s prostorem $\mathbb{R}^3$. Celková energie soustavy je spjata s volným parametrem, který umožňuje její přeškálování. Zafixování tohoto parametru definuje povrch koule nazývaný tvarovou sférou. Na pólech sféry jsou body L_1 a L_2 reprezentující rovnostranné konfigurace, na rovníku jsou symetricky rozmístěny Eulerovy body E_1, E_2 a E_3. Každým bodem E_i a L_i prochází poledník M_i, na kterém leží konfigurace odpovídající rovnoramenným trojúhelníkům. Rovník protíná poledník M_i v bodě binární kolize C_i, který je umístěn oproti bodu E_i.

V případě obecných hmotností by rozložení bodů na tvarové sféře bylo asymetrické. Jediná symetrie, která by se zachovala, je symetrie podle roviny rovníku. Tvarová sféra pro tři tělesa stejné hmotnosti má dané konfigurační body rozloženy symetricky. Tři Eulerovy body a tři body binární kolize tvoří pravidelný šestiúhelník vepsaný do rovníku.

Obraz řešení ve tvaru osmičky v konfiguračním prostoru tvoří na tvarové sféře křivku, která odpovídá celkové konstantní energii soustavy. Prochází všemi Eulerovými body E_i a protíná každý z poledníků M_i právě dvakrát během jedné periody T.

Věta. *Existuje rovinná křivka $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ve tvaru čísla osm, která je periodická s periodou T, bezkolizní a je řešením rovinného problému tří těles. V konfiguračním prostoru Γ je tato křivka popsána vztahem*

$$r(t) = \big(q(t + \tfrac{2}{3}T),\, q(t + \tfrac{1}{3}T),\, q(t)\big). \tag{5}$$

Důkaz věty lze najít např. v [2]. Řešení odpovídá počáteční podmínce (srov. obr. 7):

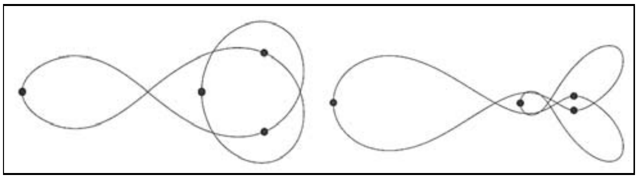
$$\vec{r}_1 \doteq (0.97000436,\, -0.24308753) = -\vec{r}_2, \quad \vec{r}_3 = (0, 0), \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_3}{\mathrm{d}t} \doteq (-0.93240737,\, -0.86473146), \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}_3}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7}$$

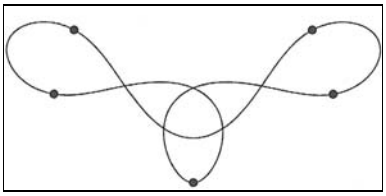
Odtud a podle uvedené věty lze dokázat, že křivka q není Bernoulliho lemniskátou, ani Lissajousovým obrazcem s poměrem frekvencí $1:2$, ani vrstevnicí součtu gravitačních potenciálů dvou stejně hmotných bodů.

4. Nová řešení pro $N > 3$

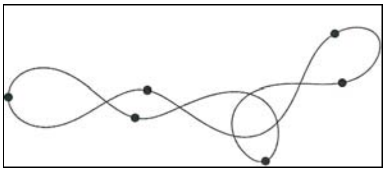
V článku [4] se popisují i další nová periodická řešení problému N těles, která byla nedávno objevena pomocí numerických metod. Např. na obrázku 9 vidíme vskutku pozoruhodné trajektorie pro $N = 4$. Další nové trajektorie byly spočítány také pro $N = 5$, $N = 6$ a $N = 9$ (viz obr. 10, 11, 12).



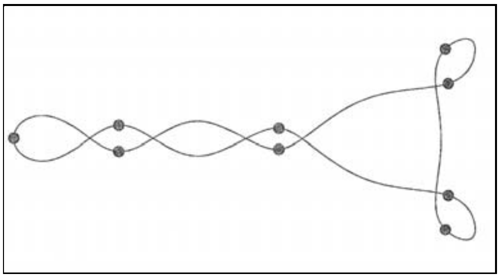
Obr. 9. Trajektorie pro $N = 4$.



Obr. 10. Trajektorie pro $N = 5$.



Obr. 11. Trajektorie pro $N = 6$.



Obr. 12. Trajektorie pro $N = 9$.

L i t e r a t u r a

[1] Diacu, F.: *Řešení problému n těles.* PMFA *42* (1997), 113–121.

[2] Chenciner, A., Montgomery, R.: *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses.* Ann. of Math. *152* (2000), 881–901.
[3] Marchal, Ch.: *The three body problem.* Elsevier, Amsterdam 1990.
[4] Montgomery, R.: *A new solution to the three body problem.* Notices AMS *5* (2001), 471–481.
[5] Poincaré, H.: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.* Acta Math. *13* (1890), 1–270.
[6] Saari, D. G., Xia, J.: *Do nekonečna v konečném čase.* PMFA *42* (1997), 90–102.
[7] Sundman, K.: *Recherches sur le problème des trois corps.* Acta Societatis Scientiarium Fennicae *34* (1907), No. 9.
[8] Wang, Q.: *The global solution of the n-body problem.* Celestial Mechanics *50* (1991), 73–88.

O jedné formě skryté symetrie chaotických stavů atmosférických procesů

Jiří Horák, Praha

Úvod

Stanovení statistických deskriptorů atraktorů generovaných matematickými modely všeobecné cirkulace atmosféry je v posledních letech věnována značná pozornost v souvislosti s její stochastičností. Abychom chování matematických modelů atmosféry mohli označit za stochastické, musí systém obsahovat expanzivní složku, což vyplývá např. z toho, že alespoň jeden z Ljapunovových exponentů na atraktoru matematického modelu dynamiky atmosféry musí být kladný, což je známý heuristický předpoklad chaosu[1]).

[1]) Ruelle, vůdčí osobnost v teorii deterministického chaosu, upozorňuje na to, že chaos není dokázán, jestliže jsme nalezli homoklinické body. Homoklinický bod dynamického systému (M, f) (M je prostor s algebrou měřitelných množin s mírou, normovanou tak, aby míra M byla rovna 1 a f je grupa transformací $M \to M$ zachovávajících míru), tj. takový bod x, pro který existují $\lim f^k x$ pro $k \to \infty$ a $\lim f^k x$ pro $k \to -\infty$ a jsou si rovné, nemusí být atraktorem a nemusí mít nic společného s chováním systému po uplynutí dlouhé doby. Existence homoklinického bodu ještě není důkazem, že jde o chaos. Za standardní cestu, jak ukázat, že dynamický systém je chaotický, je považována ta, která vede k numerickému odhadu Ljapunovova exponentu.

RNDr. Jiří Horák, CSc. (1929), Ústav fyziky atmosféry AV ČR, Boční II/1403, 141 31 Praha 4.