Michael F. Atiyah
Matematika ve 20. století

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 48 (2003), No. 3, 177–192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141177

Matematika ve 20. století

Michael Atiyah, Edinburgh

Hovoříme-li o konci jednoho století a začátku druhého, máme na výběr dvě možnosti. Obě jsou obtížné. Jedna z nich je podat přehled matematiky za posledních sto let, druhá je předvídat vývoj matematiky během příštích sta let. V tomto článku jsem si vybral ten těžší úkol. Každý může předpovídat dopředu, co se stane; za další století už tu nebudeme, abychom zjistili, jestli jsme se zmýlili. Ale popsat svůj dojem z minulosti je něco, s čím je velmi snadné nesouhlasit.

Vše, co mohu udělat, je vyjádřit zde svůj osobní názor. Není možné popsat všechno, a tak vynechám některé podstatné části příběhu; částečně proto, že nejsem expert, částečně proto, že jsou zveřejněny jinde. Nezmíním se například o velkých událostech v oblasti mezi logikou a informatikou spojených se jmény osobností, jako byl Hilbert, Gödel a Turing. Právě tak neřeknu mnoho o aplikacích matematiky, s výjimkou aplikací v částicové fyzice, protože je jich příliš mnoho a protože vyžadují speciální způsob výkladu. Každé z těchto témat by vyžadovalo samostatnou přednášku. Navíc nemá žádný smysl pokusit se napsat seznam vět nebo dokonce seznam slavných matematiků za posledních sto let. To by bylo dost nudné čtení. A tak místo toho chci zkusit vybrat některá témata, o kterých si myslím, že se dotýkají více oblastí a jsou základem jejich vývoje.

Dovolte mi nejprve učinit jednu obecnou poznámku. Století jsou hrubá čísla. Není možné opravdu věřit, že po sto letech se náhle něco zastaví a pak znovu začne. Takže pokud popisuji matematiku dvacátého století, budu s daty zacházet poměrně volně. Pokud něco začalo v devadesátých letech 19. století a pokračovalo to po začátku století dvacátého, budu takovéto detaily přehlížet. Budu se chovat jako astronom a budu pracovat s přibližnými čísly. Ve skutečnosti mnoho událostí začalo v devatenáctém století a dozrálo až ve století dvacátém.

Jedním z problémů tohoto pokusu je to, že je velmi těžké se vcítit do situace matematika na počátku dvacátého století. Během posledních sta let totiž mnoho věcí z matematiky vrostlo do naší kultury a do našeho způsobu uvažování. Je velmi obtížné se vcítit do doby, kdy lidé nepřemýšleli v našich pojmech. Naopak, pokud uděláte opravdu důležitý objev v matematice, budete úplně vynechán, budete prostě absorbován do obecného základu. A tak je třeba zkusit se vrátit zpět a představit si tu odlišnou dobu, kdy lidé nepřemýšleli stejně jako my dnes.

Z anglického originálu Michael Atiyah: *Mathematics in the 20th Century*, Amer. Math. Monthly *108* (2002), 654–666, přeložil Vladimír Souček.

Michael Atiyah byl oceněn Fieldsovou medailí v roce 1966. Tento článek vznikl přepisem záznamu jeho slavnostní fieldsovské přednášky na světovém matematickém kongresu v Torontu 7. – 9. června 2000 (Světovém roce matematiky).

1. Od lokálního ke globálnímu

Začněme tím, že budu probírat některá témata a stručně o nich pojednám. První téma by bylo možné nazvat přechod od lokálních problémů k problémům globálním. V klasickém období se matematikové věnovali zpravidla otázkám v malém měřítku, například v lokálních souřadnicích. Ve dvacátém století se důraz posunul k pokusům zkoumat a rozumět chování ve velkém měřítku, globálnímu chování. A protože je těžší porozumět globálnímu chování, podstatná část zkoumání se stala více kvalitativní a vliv topologických myšlenek podstatně vzrostl. Byl to Poincaré, kdo nejen učinil první pionýrské kroky v topologii, ale zároveň předpověděl, že topologie bude podstatnou součástí matematiky 20. století. Mimochodem to nebyl případ Hilberta a jeho slavného seznamu problémů. Na tomto seznamu lze topologii jen těžko nalézt. Ale Poincaré viděl zcela jasně, že topologie bude podstatným faktorem budoucího vývoje.

Zkusme projít několik oblastí, pak bude vidět, co mám na mysli. Uvažujme například komplexní analýzu („teorii funkcí", jak byla tenkrát nazývána). Tato teorie byla ve středu zájmu matematiků 19. století, je dílem velkých osobností, jako byl Weierstrass. Pro ně slovo funkce znamenalo funkci jedné komplexní proměnné a pro Weierstrasse byla funkce mocninná řada, něco, na co je možné si sáhnout, napsat a popsat zcela explicitně; nebo také funkce zadaná konkrétním předpisem. Funkce byly dány explicitními vzorci, byly to zcela konkrétní objekty. Dílo Abela, Riemanna a jejich dalších následovníků nás ale přeneslo jinam. Funkce již nebyly popsány konkrétními vzorci, ale spíš jejich globálními vlastnostmi: tím, kde měly singularity, kde byly definovány a kde měly své hodnoty. Tyto globální vlastnosti byly význačnými charakteristickými rysy příslušných funkcí. Lokální rozvoj byl jen jedním ze způsobů, jak se na ně dívat.

Podobná věc se stala v oblasti diferenciálních rovnic. Vyřešit diferenciální rovnici původně znamenalo najít explicitní lokální řešení: něco, co lze konkrétně napsat a sáhnout si na to. S dalším vývojem věcí se řešení stávalo implicitním. Nebylo nutně třeba je popsat hezkým konkrétním vzorcem. Singularity řešení byly tím, co opravdu určovalo globální vlastnosti řešení. To je ideově velmi podobné, i když v detailech odlišné, tomu, co se stalo v komplexní analýze.

V diferenciální geometrii byly klasické práce Gaussovy a dalších věnovány popisu malých částí ploch, lokální křivosti a lokálním rovnicím popisujícím lokální geometrii. Posun odtud k velkým měřítkům je zcela přirozený, pokud je třeba rozumět celkovému globálnímu obrazu zakřivených ploch a topologii s nimi spojené. Po přechodu od malého k velkému se stanou topologické vlastnosti dominantními.

Ačkoli to zdánlivě nepatří do téhož schématu, také teorie čísel prodělala podobný vývoj. Odborníci v teorii čísel rozlišují to, co nazývají „lokální teorií", kde mluví o každém prvočísle zvlášť, o jednom prvočísle po druhém; a „globální teorií", kdy uvažují všechna prvočísla najednou. Tato analogie mezi prvočísly a body, mezi lokálním a globálním, sehrála důležitou úlohu ve vývoji teorie čísel a myšlenky, které se objevily během rozvoje topologie, ovlivnily vývoj v teorii čísel.

Ve fyzice se samozřejmě klasická teorie zabývala lokálními otázkami, kde napíšete diferenciální rovnici, která popisuje chování systému v malých časových úsecích, a pak musíte studovat jeho asymptotické chování. Celá fyzika se ve skutečnosti zabývá snahou předpovědět, co se stane při přechodu od malých měřítek, kde věci dobře chápeme, k měřítkům velkým a k celkovým závěrům.

2. Růst dimenze

Druhé téma je odlišné, nazval bych ho zvětšování dimenze. Začněme opět s klasickou teorií funkcí: klasická teorie komplexních funkcí byla především teorií funkcí jedné komplexní proměnné, která byla studována do detailu a do velké hloubky. Přechod ke dvěma nebo více proměnným nastal v podstatě až ve 20. století; v této oblasti se objevily zcela nové jevy. Teorie funkcí mnoha komplexních proměnných se postupně stávala čím dále, tím více dominantní. Je to jedna z nejúspěšnějších teorií v matematice dvacátého století.

V diferenciální geometrii byly podobně v minulosti studovány zejména křivky a plochy. Dnes je samozřejmostí studium geometrie n-dimenzionálních variet a musíte se pořádně zamyslet, abyste si uvědomili, jak podstatný krok to byl. V začátcích byly křivky a plochy objekty, které bylo možno opravdu vidět v prostoru. Vyšší dimenze byly trochu fiktivní, objekty v této oblasti bylo sice možné si představit matematicky, ale nebyly brány příliš vážně. Fakt, že tyto objekty je třeba uvažovat seriózně a podrobně je zkoumat, přineslo až 20. století. Podobně nebylo pro naše předchůdce z 19. století tak úplně samozřejmé uvažovat o růstu počtu funkcí, studovat ne jednu, ale více funkcí najednou, tj. zajímat se o vektorově-hodnotové funkce. Takže došlo k růstu počtu jak nezávislých, tak závislých proměnných.

Lineární algebra sice vždy studovala více proměnných, ale růst dimenze zde byl podstatně dramatičtější. Vývoj šel od konečné dimenze k dimenzím nekonečným, od vektorového prostoru konečné dimenze k Hilbertovu prostoru, který měl dimenzi nekonečnou. Zde ovšem také hrála roli matematická analýza. Po funkcích více proměnných přišly na řadu funkce funkcí aneb funkcionály. To jsou funkce na vektorových prostorech funkcí. Tyto všechny prostory mají v jistém smyslu nekonečně mnoho proměnných, příslušná teorie dostala název variační počet. Podobná situace nastala u obecných (nelineárních) funkcí, což byl starý obor, který se ale stal opravdu důležitým až ve 20. století.

3. Od komutativního k nekomutativnímu

Posun od komutativních teorií k teoriím nekomutativním je pravděpodobně nejtypičtější rys matematiky dvacátého století, zejména pak algebry. Nekomutativní aspekty algebry se staly extrémně důležité, jejich kořeny ovšem sahají do 19. století. Tyto kořeny jsou různé. Hamiltonovy práce o kvaternionech byly pravděpodobně největším překvapením a měly obrovský dopad motivovaný myšlenkami souvisejícími s fyzikou. Byly zde výsledky Grassmanna o vnějších algebrách — což je další algebraický systém, který je v současné době zahrnut do moderní teorie diferenciálních forem. Dalšími význačnými objevy tohoto období byly samozřejmě Galoisova teorie, která se opírala o teorii grup, a Cayleyovy práce o maticích, založené na lineární algebře.

Všechny tyto objevy jsou různými proudy a cestami, které vytvořily základ pro zavedení nekomutativního násobení do algebry, které je samozřejmou součástí algebraických systémů dvacátého století. My už si to ani neuvědomujeme, ale již uvedené příklady tvořily, každý svým způsobem, zcela zásadní průlomy. A aplikace těchto myšlenek ovšem přišly zcela neočekávaně z různých stran. Použití teorie matic a nekomutativního násobení mělo důležitou roli při zrodu kvantové mechaniky. Heisenbergovy komutační relace dávají nejvýznamnější příklad podstatného použití nekomutativní algebry ve fyzice, který později von Neumann přetvořil do teorie operátorových algeber.

Teorie grup byla také dominantním rysem dvacátého století. Vrátím se k ní později.

4. Od lineárního k nelineárnímu

Moje další téma je přechod od lineárních teorií k teoriím nelineárním. Velké součásti klasické matematiky jsou v podstatě lineární, a pokud nejsou lineární zcela, jsou založeny na lineární aproximaci svého perturbačního rozvoje. Podstatně nelineární jevy jsou mnohem těžší. Příslušné teorie se dočkaly významného rozvoje až ve dvacátém století.

Příběh začíná geometrií: eukleidovská geometrie, tj. geometrie roviny, prostoru, přímek, to vše je lineární teorie. Ta pak pokračuje několika různými stadii neeukleidovské geometrie až k Riemannově obecnější geometrii, která je již podstatně nelineární. V oblasti diferenciálních rovnic přineslo důkladnější studium nelineárních případů celé spektrum nových jevů, které nehrály žádnou roli v klasických spisech. Abych uvedl dva z nich: solitony a chaos, dva velmi odlišné aspekty teorie diferenciálních rovnic, které se staly výjimečně důležitými a populárními ve dvacátém století. Jsou to dva opačné extrémy. Solitony reprezentují nečekaně organizované chování nelineárních diferenciálních rovnic a chaos reprezentuje nečekaně chaotické chování. Oba typy se objevují v různých režimech a jsou zajímavé a důležité, ale jsou to zásadně nelineární jevy. I v tomto případě je možné najít výskyt některých článků o solitonech již na samém konci devatenáctého století.

Ve fyzice jsou Maxwellovy rovnice, základní rovnice pro elektromagnetické pole, lineární parciální diferenciální rovnice. Jejich protipól, slavné Yangovy-Millsovy rovnice, jsou nelineární parciální diferenciální rovnice, které se používají při popisu sil, jež působí na nejjemnějších úrovních hmoty. Jsou to rovnice nelineární, protože Yangovy-Millsovy rovnice jsou v podstatě maticovou verzí Maxwellových rovnic. Že součin matic není komutativní, je důvodem pro existenci nelineárního členu v těchto rovnicích, což je velmi zajímavý příklad souvislosti mezi nelinearitou a nekomutativností. Nekomutativita vytváří nelinearitu zvláštního druhu, která je obzvlášť zajímavá a důležitá.

5. Geometrie proti algebře

Doposud jsem vybral několik obecných témat. Teď se chci věnovat dichotomii v matematice, která je neustále s námi a osciluje sem a tam a která mi dává příležitost přidat několik filozofických spekulací a poznámek. Jde o dichotomii mezi geometrií a algebrou. Jsou to dva formální pilíře matematiky a oba jsou velmi starodávné. Geometrie pochází z období řeckých klasiků a jejich předchůdců. Za algebru vděčíme Arabům a Indům. Obě tvoří základ matematiky, ale jejich vztah nebyl vždy jednoduchý.

Začněme však od počátku. Eukleidovská teorie je první a základní příklad matematické teorie. Byla to teorie po výtce geometrická až do časů Descartových, který zavedl algebraické souřadnice v rovině, jež nyní nazýváme kartézské souřadnice. To byl pokus redukovat geometrické uvažování na algebraické manipulace. Byl to ovšem velkolepý objev a silný útok na geometrii ze strany algebraiků. Pokud porovnáme analýzu v díle Newtona a Leibnize, každá z nich se hlásí k jiné tradici: Newton byl ve své podstatě geometr, zatímco Leibniz byl svým založením algebraik a oba pro to měli dobré důvody. Pro Newtona byla geometrie, nebo kalkulus v jeho pojetí, matematickým pokusem o popis zákonů přírody. Jeho zájmem byla fyzika v širokém slova smyslu. Pokud chcete rozumět tomu, jak věci fungují, přemýšlíte v pojmech světa kolem sebe, v geometrických obrazech. Když si Newton vymýšlel kalkulus, chtěl najít jeho formu tak, aby byla co nejblíže fyzikálnímu obsahu za ním. To byl důvod, proč užíval geometrické argumenty, aby byl co nejblíže k významu věcí. Na druhé straně Leibniz měl cíl, velmi ambiciózní cíl, formalizovat celou matematiku a vytvořit z ní velký algebraický systém. To bylo právě v protikladu Newtonovu přístupu. Oba také užívali velmi odlišné označení. Jak víme, ve velkém sporu mezi Newtonem a Leibnizem vyhrálo označení zavedené Leibnizem. Dodnes používáme jeho způsob označování derivace. Duch Newtonova přístupu je zde stále, ale byl po dlouhou dobu pohřben.

Před sto lety, koncem devatenáctého století, vynikaly dvě hlavní postavy v matematice — Poincaré a Hilbert. Už jsem se o nich zmínil, byli velmi zhruba řečeno žáky Newtona, resp. Leibnize. Styl Poincarého byl bližší duchu geometrie a topologie, užíval tyto nástroje jako základ své intuice. Hilbert byl více formalista; chtěl mít matematiku založenou na axiomech, formálně přesnou, s důkladnou a precizní prezentací. Každý z nich náležel k jiné tradici, i když je těžké velké matematiky zařadit do předepsaných kategorií.

Při přípravě této přednášky jsem si uvědomil, že bych měl přidat ještě další jména ze současné generace, která by reprezentovala pokračování těchto tradic. Je velmi těžké mluvit o žijících osobách — koho přidat do seznamu? Ale pak jsem si řekl: komu by vadilo mít své jméno na kterékoliv straně tak slavného seznamu? A tak jsem vybral dvě jména: Arnoľda — dědice tradice Newtona a Poincarého, a Bourbakiho — podle mého názoru nejslavnějšího žáka Davida Hilberta. Arnoľd se nikterak netají tím, že jeho přístup k mechanice, nebo spíš k fyzice, je v podstatě geometrický, s kořeny jdoucími zpět k Newtonovi; a že vše, co bylo mezi tím, s výjimkou několika osobností, jako byl Riemann (který tak trochu vybočoval), pokládá za slepou uličku. Bourbaki se pokusil pokračovat v Hilbertově programu axiomatizace a formalizace matematiky ve velkém rozsahu a s jistým úspěchem. Každý z těchto přístupů má své přednosti, ale je mezi nimi napětí.

Rád bych teď vysvětlil svůj vlastní názor na rozdíly mezi geometrií a algebrou. Geometrie popisuje samozřejmě prostor, o tom není pochyb. Když se podívám mezi posluchače v této místnosti, mohu vidět velmi mnoho, v jedné vteřině nebo zlomku vteřiny mohu získat obrovské množství informací, což není ovšem náhoda. Náš mozek je uzpůsoben tak, že se přednostně věnuje tomu, co vidíme. Podle informací přátel, kteří pracují v neurofyziologii, používá zrak kolem 80 či 90 procent kůry mozkové. Existuje zde asi 17 různých center a každé z nich zpracovává různé části zrakových informací; některá z nich se soustřeďují na informace o svislých liniích, další o liniích vodorovných, jiná zpracovávají údaje o barvě, perspektivě a konečně další z nich jsou odpovědná za význam a interpretaci. Porozumění a pochopení světa, který vidíme, je velmi důležitá součást našeho vývoje. Proto je prostorová intuice a prostorové vnímání mimořádně účinný nástroj a to je důvod, proč je geometrie tak podstatnou částí matematiky — nejen pro ty části, které jsou zřejmě geometrické, ale i pro ty ostatní. Pokoušíme se je převést do geometrických pojmů, abychom mohli užívat svou intuici. Naše intuice je náš nejmocnější nástroj. To je zcela jasné, když se pokusíte vysvětlit nějakou matematickou otázku studentovi nebo kolegovi. Máte dlouhou a obtížnou diskusi, až konečně student porozumí. A co řekne? Řekne „Už to vidím!“ Vidět je synonymum pro chápání a slovo „vnímání“[1]) používáme pro obě věci současně. To je přinejmenším pravda v anglickém jazyce a bylo by zajímavé to porovnat se situací v jiných jazycích. Považuji za zcela podstatné, že se lidský mozek vyvinul s mimořádnou kapacitou pojmout ohromné množství informace pomocí okamžitého zrakového vjemu. Matematika to přejímá a zdokonaluje.

Na druhou stranu algebra (a na to možná můžete mít i jiný názor) podstatně závisí na průběhu času. Ať pěstujete jakýkoliv druh algebry, posloupnost operací je vykonávána jedna po druhé a sousloví „jedna po druhé“ znamená, že vše probíhá v čase. Ve statickém vesmíru si nelze představit algebru, ale geometrie je v podstatě statická. Mohu zde sedět, dívat se a nic se nemusí měnit, ale já to stále mohu vidět. Algebra naopak potřebuje čas, protože se zabývá operacemi, které se uskutečňují postupně. Když říkám „algebra“, nemyslím tím jen moderní algebru. Jakýkoliv algoritmus, libovolný výpočet je posloupnost kroků vykonávaných jeden po druhém, jak je obzvlášť zřejmé u moderních počítačů. Ty zpracovávají jako vstupní informaci proud nul a jedniček a na ni odpovídají.

Algebra se zabývá manipulacemi v *čase*, geometrie zkoumá *prostor*. To jsou dva doplňující se aspekty světa, reprezentující různé přístupy v matematice. A tak diskuse či dialog mezi matematiky v minulosti o relativní důležitosti geometrie a algebry se týká zcela základní otázky.

Není samozřejmě rozumné chápat tuto otázku jako diskusi, kde jedna strana prohraje a druhá vyhraje. Lze to přiblížit analogií: ptát se „Mám být algebraik nebo geometr?“ je podobné otázce „Chtěl byste být radši hluchý nebo slepý?“ Jste-li

---

[1]) *Pozn. překl.:* V originále „perception“.

slepý, nevidíte prostor, jste-li hluchý, neslyšíte, a proces slyšení se uskutečňuje v čase. Samozřejmě, dáváme přednost tomu mít obě dvě tyto schopnosti.

Ve fyzice existuje analogické rozdělení na teorii a experimenty. Fyzika má dvě části: *teorii* — pojmy, myšlenky, slova, zákony — a *experimentální přístroje.* Teorii chápu v širším slova smyslu geometricky, protože se zabývá věcmi, které se odehrávají v reálném světě. Na druhou stranu, experiment je spíše podobný algebraickému výpočtu. Něco vykonáváte v čase; měříte jistá čísla; dosazujete je do vzorců, ale základní pojmy, které stojí za experimenty, jsou částí geometrické tradice.

Jeden způsob, jak chápat diskutovaný protiklad ve více filozofickém či literárním rámci, je říci, že algebra je pro geometra něco, co lze nazvat „faustovským pokušením". Jak je známo, v Goethově románu ďábel nabídl Faustovi, cokoliv si bude přát, pokud mu prodá duši. Algebra je pokušení, které nabízí ďábel matematikům. Říká: „Dám ti tuto mocnou teorii, která ti zodpoví jakoukoliv otázku. Stačí, když mi dáš svou duši: vzdej se geometrie a dostaneš tento zázračný stroj." [V současnosti je možné si pod tím představit počítač!] My ovšem chceme mít obojí: jako bychom šidili ďábla a tvrdili, že prodáváme svou duši, ale nechtěli ji dát. Ale nebezpečí pro duši tu existuje, protože když přejdeme k mechanickým výpočtům, přestaneme přemýšlet; přestaneme myslet geometricky, přestaneme přemýšlet o smyslu.

Tady jsem trochu nespravedlivý k algebraikům, ale cíl algebry je vždy vytvořit vzorec, který se dá vložit do stroje, zatočit klikou a dostat odpověď. Vezmete něco, co mělo význam, přetvoříte to do vzorce; a na konci dostanete odpověď. Během výpočtu už nemusíte přemýšlet o tom, čemu jednotlivé kroky v algebře odpovídají v geometrii. Ztrácíte vhled to toho, co se děje, a ten může být v různých stadiích důležitý. Nesmíte se úplně vzdát intuice! Možná ji později budete potřebovat. To je to, co míním faustovským pokušením. To, co říkám, je určitě provokativní.

Tento výběr mezi geometrií a algebrou vedl k hybridům, které je míchají dohromady, a dělení mezi algebru a geometrii není tak přímočaré a naivní, jak jsem je právě popsal. Například algebraici často užívají diagramy. A jsou diagramy něco jiného než ústupky geometrické intuici?

6. Společné postupy

Nyní se vraťme a věnujme se tématům nikoliv z hlediska obsahu, ale z hlediska postupů a společných metod používaných v příslušných oblastech. Rád bych popsal několik společných metod, které byly použity v celé řadě různých oblastí. První metodou je

Homologická teorie

Homologická teorie začínala historicky jako větev topologie. Uvažujme následující situaci. Máte složitý topologický prostor a potřebujete z něj získat nějakou jednoduchou informaci, týkající se počtu děr nebo něčeho podobného, nějaké aditivní lineární invarianty, které by bylo možno přiřadit složitému prostoru. Je to, přejete-li si, konstrukce lineárních invariantů v nelineární situaci. Geometricky je možné si představit cykly (např. uzavřené křivky či plochy), které můžete sčítat a odčítat, a pak dostanete to, čemu se říká homologická grupa příslušného prostoru. Homologie je základní algebraický nástroj, který byl objeven v první polovině dvacátého století jako postup, jak získat jisté informace o topologickém prostoru; kousek algebry získané z geometrické situace.

Homologie se také objevila v jiné souvislosti: dalším zdrojem homologické teorie jsou Hilbertovy práce o polynomech. Polynomy jsou funkce, které nejsou lineární a které můžete násobit a dostávat tak polynomy vyšších stupňů. Obrovským Hilbertovým přínosem zde bylo studium „ideálů“, lineárních kombinací polynomů, které mají společné nulové body. Hilbert hledal generátory pro tyto ideály. Množiny generátorů mohou být vzájemně závislé, a tak Hilbert hledal relace mezi generátory a pak relace mezi těmito relacemi. Dostal tak hierarchii takovýchto relací, které byly později nazvány „Hilbertovy syzygy“. Tato Hilbertova teorie je velmi hluboký způsob, jak redukovat nelineární situaci — studium polynomů — na situaci lineární. Dá se říct, že Hilbert sestrojil složitý systém lineárních relací, který v sobě obsahoval jistou informaci o nelineárních objektech, o polynomech.

Tato algebraická teorie je ve skutečnosti velmi podobná topologické teorii. Obě jsou dnes spojeny v tom, čemu dnes říkáme „homologická algebra“. Jedním z obrovských úspěchů algebraické geometrie v padesátých letech bylo sestrojení kohomologické teorie svazků a její rozšíření na případ geometrie analytické (tj. rozšíření výsledků z algebraické geometrie na teorii funkcí reálných nebo komplexních proměnných). Tuto teorii ve Francii vytvořili Leray, Cartan, Serre a Grothendieck. Je to kombinace topologických myšlenek Riemanna a Poincarého a algebraických postupů Hilberta spolu s jistou dávkou analýzy přidané ve vhodném poměru.

Ukázalo se, že teorie homologie má ještě širší použití v dalších odvětvích algebry. Je možné zavést homologické grupy, což jsou vždy lineární objekty přiřazené objektům nelineárním. Pokud uvažujete grupy, například konečné grupy, nebo Lieovy algebry, pro oba případy existují příslušné homologické grupy. V teorii čísel existují velmi důležité aplikace homologické teorie, týkající se Galoisovy grupy. Homologická teorie se tedy stala jedním z velmi mocných nástrojů pro analýzu celého spektra různých situací; je to jev typický pro matematiku dvacátého století.

K-teorie

Další teorie, která je v mnoha směrech podobná teorii homologické a která byla široce používána a pronikla do mnoha odvětví matematiky, je pozdějšího data. Neobjevila se dříve než v polovině dvacátého století, i když její kořeny jsou také podstatně starší. Říká se jí tradičně „K-teorie“ a souvisí ve skutečnosti úzce s teorií reprezentací. Teorie reprezentací grup (např. konečných grup) sahá do devatenáctého století, ale její moderní forma, K-teorie, vznikala později. K-teorii si lze představit následujícím způsobem: je to pokus uvažovat teorii matic, ve které je součin matic nekomutativní, a přitom se snažit sestrojit abelovské (tj. komutativní) neboli lineární invarianty matic. Příkladem takových komutativních invariantů teorie matic jsou stopa matice a její determinant a K-teorie je systematický postup umožňující jejich popis. Někdy se jí také říká „stabilní lineární algebra“. Základní myšlenka je tato: uvažujme dvě matice A a B, které spolu nekomutují. Tyto matice spolu budou komutovat, pokud je umístíte do dvou různých diagonálních bloků příslušných (dostatečně velkých) blokových matic. Protože ve velkém prostoru můžete věci volně mezi sebou přesouvat, můžete to v jistém přibližném smyslu považovat za vhodný způsob, jak získat jakousi částečnou informaci. To je základ metod K-teorie. Je to podobné homologické teorii, v obou případech se pokoušíme získat lineární informaci z komplikované nelineární situace.

V algebraické geometrii použil K-teorii poprvé s pozoruhodným úspěchem Grothendieck v úzké souvislosti s příběhem o teorii svazků zmíněným před chvílí a v souvislosti se svou prací na zobecněné Riemannově-Rochově větě.

V topologii jsme se ujali těchto myšlenek spolu s Hirzebruchem a použili je v čistě topologickém kontextu. Je možné říci, že zatímco Grothendieckova práce souvisí s Hilbertovou teorií o syzygách, naše práce je spíše svázána s myšlenkami Riemanna a Poincarého o homologiích a používá spojité funkce místo polynomů. K-teorie také sehrála roli ve větě o indexu pro eliptické parciální diferenciální rovnice.

V jiném směru na algebraické straně tématu a s možnými aplikacemi v teorii čísel rozvíjeli K-teorii Milnor, Quillen a další. To také vedlo k mnoha zajímavým otázkám.

Ve funkcionální analýze byla spojitá K-teorie rozšířena prací mnoha dalších včetně Kasparova na případ nekomutativních C^*-algeber. Spojité funkce na daném topologickém prostoru tvoří komutativní algebru, ale v jiných situacích vznikají nekomutativní analogie těchto algeber a funkcionální analýza tvoří přirozený rámec pro otázky tohoto druhu.

A tak je K-teorie další metoda, ke které existuje celá řada různých částí matematiky, kde má tento jednoduchý formalismus přirozené uplatnění, i když v každém jednotlivém případě existují velmi složité technické problémy typické pro příslušnou oblast, které souvisejí s dalšími součástmi příslušné oblasti. Není to společný nástroj, spíše jde o společný rámec s řadou analogií a podobností mezi jednotlivými částmi. Velkou část této teorie také rozšířil Alain Connes na případ „nekomutativní diferenciální geometrie“.

Je velmi zajímavé, že zcela nedávno objevil E. Witten ve svých článcích o teorii strun (jde o nejnovější ideje v teorii elementárních částic) zajímavý způsob, jak využít K-teorii pro velmi přirozenou formulaci pojmů spojených se „zachovávajícími se veličinami“. Původně se předpokládalo, že vhodné pojmy budou nalezeny v homologické teorii, ale nyní se zdá, že K-teorie nabízí lepší možnost.

Lieovy grupy

Dalším sjednocujícím konceptem, který není jen užitečnou technikou, je pojem Lieovy grupy. Mezi základní příklady Lieových grup patří ortogonální, unitární a symplektická grupa[2]) spolu s několika výjimečnými dalšími případy. Lieovy grupy hrály velmi důležitou roli v historii matematiky dvacátého století. I zde sahají kořeny do století devatenáctého. Sophus Lie byl norský matematik, který žil v devatenáctém století a který s Felixem Kleinem a dalšími matematiky vytvořil „teorii spojitých grup“, jak jí říkali. Pro Kleina to byla původně myšlenka vedoucí k pokusu o sjednocení dvou odlišných typů geometrií: geometrie eukleidovské a geometrie neeukleidovské. I když toto úsilí začalo v devatenáctém století, rozvinulo se opravdu až ve století dvacátém, ve kterém pak měla teorie Lieových grup dominantní roli jako sjednocující koncept, v jehož rámci bylo možné studovat mnoho různých otázek.

Už jsem se zmínil o roli Kleinových myšlenek v rozvoji geometrie. Geometrie chápal jako homogenní prostory, v nichž bylo možné volně přemísťovat věci z místa na místo bez jejich deformace. Tyto prostory byly charakterizovány příslušnou grupou izometrií. Grupa eukleidovských shodností vede na eukleidovskou geometrii, hyperbolická geometrie odpovídá jiné grupě izometrií. A tak každá homogenní geometrie má svou odpovídající Lieovu grupu. Ale později, pod vlivem geometrických prací Riemanna, se pozornost přesunula na geometrie, které nebyly homogenní, kde se křivost měnila od místa k místu a kde nebyly žádné globální symetrie celého prostoru. Nicméně i zde měly Lieovy grupy stále podstatnou roli, protože se objevovaly na infinitezimální úrovni, protože v tečném prostoru existují eukleidovské souřadnice. Lieovy grupy se tedy objevily znovu v tečném prostoru, infinitezimálně. Ale protože bylo třeba porovnávat různé body v různých místech, bylo třeba věci nějakým způsobem měnit, aby bylo možné pokrýt případy různých Lieových grup. To byla teorie, kterou vyvinul Élie Cartan a která tvoří základ moderní diferenciální geometrie, právě tak jako tvoří rámec, který byl podstatný pro Einsteinovu teorii relativity. Einsteinova teorie byla samozřejmě hnacím motorem celého dalšího vývoje diferenciální geometrie.

V průběhu dvacátého století vyžadovaly globální otázky, o kterých jsme již mluvili, Lieovy grupy a diferenciální geometrii na globální úrovni. Podstatný vývoj, který přinesly práce Borela a Hirzebrucha, vedl k objevu toho, čemu se dnes říká „charakteristické třídy“. Jsou to topologické invarianty, které kombinují tři klíčové součásti: Lieovy grupy, diferenciální geometrii a topologii, a ovšem také Lieovy algebry příslušné ke grupám samotným.

Ve směru bližším k analýze vznikla teorie, která se nyní nazývá nekomutativní harmonická analýza. Je to zobecnění Fourierovy teorie, kde Fourierovy řady nebo Fourierův integrál odpovídají harmonické analýze na komutativních Lieových grupách, na kružnici, resp. na reálné přímce. Když nahradíme tyto grupy složitějšími Lieovými grupami, dostaneme velmi krásnou a obsáhlou teorii, která kombinuje teorii reprezentací Lieových grup a analýzu. Je to v podstatě celoživotní dílo Harishe-Chandry.

V teorii čísel existuje rozsáhlý tzv. „Langlandsův program“, který má také úzkou souvislost s teorií Harishe-Chandry a který se odehrává v rámci teorie Lieových grup. Každé Lieově grupě odpovídá příslušná teorie čísel a Langlandsův program, který byl

[2]) *Poznámka redakce:* Symplektická grupa v n-rozměrném prostoru je množina všech lineárních transformací, které jsou invariantní vzhledem k nedegenerovaným antisymetrickým bilineárním formám.

do jisté míry uskutečněn. Program ovlivnil velkou část práce v algebraické teorii čísel v druhé polovině dvacátého století. Do tohoto okruhu spadá studium modulárních forem včetně práce Andrewa Wilese na důkazu velké Fermatovy věty.

Zdálo by se, že Lieovy grupy jsou obzvlášť důležité hlavně v geometrickém kontextu, díky potřebě spojité deformace, ale analogie Lieových grup nad konečnými tělesy vedou ke konečným grupám a většina konečných grup vzniká tímto způsobem. Proto se metody z některých částí teorie Lieových grup používají i v diskrétní situaci pro konečná tělesa nebo pro lokální tělesa. Je zde mnoho prací, které patří do čisté algebry; například práce spojené se jménem George Lusztiga, kde jsou studovány reprezentace takovýchto konečných grup a kde mnoho metod již zmíněných má své protějšky.

7. Konečné grupy

To nás dovedlo až ke konečným grupám a připomíná mi, že klasifikace konečných grup je něco, kde jsem dlužen jisté přiznání. Před několika lety jsem poskytl rozhovor v době, kdy se klasifikace konečných jednoduchých grup blížila ke svému konci. V rozhovoru jsem dostal otázku, co si o klasifikaci myslím. Byl jsem natolik příkrý, že jsem řekl, že ji nepokládám za příliš podstatnou. K tomuto názoru mě vedlo to, že výsledkem klasifikace byl seznam, který obsahoval většinou známé konečné jednoduché grupy spolu s několika výjimkami. V jistém smyslu to byl výsledek, který uzavíral tuto oblast, ale neotvíral novou. Když se věci uzavírají, místo aby se otvíraly nové, nejsem z toho příliš nadšený. Mnoha svých přátel pracujících v této oblasti jsem se ovšem velmi, velmi dotkl. Musel jsem potom nosit něco na způsob neprůstřelné vesty![3])

Je tu ale okolnost, která situaci zachránila. Už jsem se zde zmínil, že největší grupa na seznamu takzvaných „sporadických grup“ dostala jméno „Monstrum“. Jsem přesvědčen, že objev tohoto Monstra je sám o sobě velice vzrušující výsledek klasifikace. Ukázalo se, že Monstrum je neobyčejně zajímavý objekt, který je v současné době stále ještě zkoumán. Má neočekávané souvislosti s většinou dalších partií matematiky, s eliptickými modulárními funkcemi, a dokonce i s teoretickou fyzikou a kvantovou teorií pole. To byl velmi zajímavý vedlejší produkt klasifikace, která sama, jak jsem řekl, zavřela dveře. Monstrum je ale opět otevřelo.

8. Vliv fyziky

Teď bych se chtěl věnovat jinému tématu, kterým je vliv fyziky na matematiku. Po celou dobu historického vývoje byla fyzika přímo spojena s matematikou. Velké části matematiky, např. kalkulus, byly vynalezeny pro řešení fyzikálních problémů. V polovině dvacátého století se toto spojení možná stalo méně zřejmé. Většina čisté

[3]) *Pozn. překl.:* Viz R. Minio: *Rozhovor s Michaelem Atiyahem.* PMFA *31* (1986), 154–168.

matematiky se velmi dobře vyvíjela nezávisle na fyzice, ale v poslední čtvrtině dvacátého století se věci dramaticky změnily. Chtěl bych teď stručně popsat tuto novou interakci fyziky s matematikou, a obzvlášť s geometrií.

V devatenáctém století přispěl Hamilton k vývoji klasické mechaniky tím, že zavedl to, co dnes nazýváme hamiltonovským formalismem. Klasická mechanika vedla k rozvoji tzv. „symplektické geometrie". Je to větev geometrie, která mohla být velmi dobře studována mnohem dříve, ale ve skutečnosti byla podstatně rozvinuta teprve během posledních dvou desetiletí. Ukázalo se, že jde o velmi bohatou část geometrie. Geometrie má, ve smyslu, ve kterém toto slovo používám, tři větve: Riemannovu geometrii, komplexní geometrii a symplektickou geometrii, které odpovídají příslušným třem typům Lieových grup. Symplektická geometrie je nejmladší z nich a v jistém smyslu možná nejzajímavější. Určitě je to ta, která má výjimečně úzkou souvislost s fyzikou, díky svým historickým kořenům souvisejícím s hamiltonovskou mechanikou a nedávnými vztahy ke kvantové mechanice.

Maxwellovy rovnice, o nichž jsem se již zmínil a které jsou základními lineárními rovnicemi elektromagnetismu, byly motivací pro Hodgeovy práce o harmonických formách a pro jejich další aplikace v algebraické geometrii. To vedlo k neobyčejně plodné teorii, která byla v pozadí velkého množství prací v geometrii od třicátých let dvacátého století.

Již jsem se také zmínil o obecné teorii relativity a o Einsteinově práci. Kvantová mechanika samozřejmě také přispěla mimořádným vkladem. A to nejen svými komutačními relacemi, ale ještě podstatněji svým důrazem na Hilbertovy prostory a spektrální teorii.

Mnohem konkrétnějším a zřejmým způsobem sem patří krystalografie, která se ve své klasické podobě zajímala o symetrie krystalických struktur. Konečné grupy symetrií působící v okolí bodů byly studovány především pro jejich použití v krystalografii. V tomto století to byly hlubší aplikace teorie grup, které začaly být podstatné pro fyziku. Elementární částice, o kterých předpokládáme, že tvoří hmotu, mají jakési skryté symetrie na nejmenších úrovních, které je možné popsat pomocí jistých Lieových grup, které sice nelze vidět, ale jejichž symetrie se stávají zjevnými při studiu chování elementárních částic. A tak lze vytvořit modely, které obsahují tyto symetrie jako svou základní součást. V dnešní době se nejčastěji používají pro konstrukci různých teorií jisté základní Lieovy grupy, např. grupy SU(2) a SU(3). A tak tyto Lieovy grupy se zde vyskytují jako nástroje pro budování základních bloků hmoty.

Ale tyto kompaktní Lieovy grupy nejsou jediné, které se ve fyzice vyskytují. Podstatnou úlohu ve fyzice mají také jisté nekompaktní Lieovy grupy, např. Lorentzova grupa. Byli to fyzikové, kteří jako první začali studovat teorii reprezentací nekompaktních Lieových grup. Pro kompaktní grupy jsou ireducibilní reprezentace konečně dimenzionální, ale pro reprezentace nekompaktních grup je již třeba používat Hilbertovy prostory nekonečné dimenze. A byli to fyzikové, kteří si to uvědomili jako první.

V poslední čtvrtině dvacátého století, které právě skončilo, jsme byli svědky obrovského proudu nových myšlenek přicházejících z fyziky do matematiky. Je to pravděpodobně nejpozoruhodnější příběh dvacátého století. Jeho popis by si vyžadoval samostatnou přednášku. Zhruba řečeno, kvantová teorie pole a teorie strun byly použity pozoruhodným způsobem při objevu nových výsledků, idejí a metod v mnoha částech matematiky. Tím myslím, že fyzikové byli pomocí svého intuitivního pochopení jistých fyzikálních teorií schopni předpovědět, že budou platit jistá matematická tvrzení. Nebyl to ovšem přesný důkaz těchto tvrzení, ale byl podpořen velmi rozsáhlým počtem intuitivních tvrzení, speciálních případů a analogií. Tyto výsledky, které fyzici předpověděli, jsou postupně ověřovány matematiky. Zjišťuje se, že jsou v zásadě pravdivé, i když je velmi těžké najít jejich úplné důkazy a mnohé z nich ještě úplně dokázány nejsou.

V posledních 25 letech tak fyzika nesmírně ovlivnila matematiku. Výsledky jsou neobyčejně podrobné. Nejen že fyzikové říkají „něco takového by mělo být pravda“. Oni říkají „toto je přesný vzorec a zde je prvních deset případů“ (často obsahujících čísla s více než dvanácti platnými číslicemi). Dávají přesné odpovědi na velmi složité problémy, které není možné jen tak uhodnout, je třeba mít aparát na jejich výpočet. Kvantová teorie pole se ukázala být zcela pozoruhodným nástrojem, který je velmi obtížné přesně pochopit matematicky, ale který slaví nečekané úspěchy v aplikacích. To byl opravdu velmi vzrušující příběh posledních 25 let.

Zkusme zde vyjmenovat některé části příběhu: práce Simona Donaldsona o čtyřdimenzionálních varietách, výsledky Vaughana Jonese o invariantech uzlů, zrcadlová symetrie, kvantové grupy a pro vyváženost již zmiňované Monstrum.

O co v této oblasti vlastně jde? Jak jsem se již zmínil, dvacáté století přineslo posun zájmu od malých dimenzí k větším a nakonec až k dimenzi nekonečné. Fyzikové šli ještě dál. V kvantové teorii pole se opravdu snaží o velmi podrobné studium nekonečněrozměrných prostorů do velké hloubky. Předmětem jejich zájmu jsou typicky nekonečněrozměrné prostory funkcí různého druhu. Tyto prostory jsou velmi komplikované. Důvodem není jen to, že jsou nekonečnědimenzionální, ale to, že jsou složité z hlediska algebraického, geometrického i topologického a že jsou svázány s velkými Lieovými algebrami, které samy mají nekonečnou dimenzi. Zatímco velké části matematiky dvacátého století se zabývaly rozvojem geometrie, topologie, algebry a analýzy na konečnědimenzionálních varietách a Lieových grupách, tato část fyziky měla za téma podobný rozvoj v dimenzích nekonečných. To je samozřejmě nesrovnatelně obtížnější úloha, ale zato její řešení přináší mimořádný zisk.

Rád bych toto téma komentoval podrobněji. Kvantová teorie pole popisuje jevy, které se odehrávají v prostoru a čase. Prostorem se myslí v reálné situaci prostor trojrozměrný, ale existují jednodušší modely, ve kterých má prostor jednu dimenzi. Objekty, se kterými se fyzikové setkávají v případě jednorozměrného prostoru a jednorozměrného času, jsou v matematické řeči různé nekonečnědimenzionální grupy — např. grupa difeomorfismů kružnice nebo grupa diferencovatelných zobrazení z kružnice do kompaktní Lieovy grupy. To jsou dva základní příklady nekonečnědimenzionálních Lieových grup, které se v kvantové teorii pole v těchto dimenzích vyskytují. Jsou to velmi rozumné matematické objekty, které matematikové již nějakou dobu studují.

V takových $(1+1)$-rozměrných teoriích je možné jako prostoročas vzít Riemannovy plochy, což vede k novým výsledkům. Například prostor modulů Riemannových ploch daného rodu je klasický objekt, který má své kořeny v devatenáctém století. Kvantová teorie pole přinesla nové výsledky o kohomologiích těchto prostorů. Jiný velmi podobný prostor je prostor modulů plochých fíbrovaných prostorů na dané Riemannově ploše rodu g s grupou G. Jsou to velmi zajímavé prostory a kvantová teorie pole pro ně přinesla přesné výsledky. Existují např. krásné vzorce pro jejich objem vyjádřené pomocí hodnot dzeta funkce.

Jiné aplikace se týkají počítání křivek. Pokud se zajímáte o rovinné algebraické křivky daného stupně a daného typu a pokud chcete vědět, kolik z nich například prochází daným počtem zvolených bodů, dostanete se zpět do výpočetních problémů algebraické geometrie, které patří mezi klasické problémy devatenáctého století. Jsou to velmi obtížné problémy. Jejich řešení přinesla nová, moderní koncepce zvaná „kvantová kohomologie", která je součástí příběhu o kvantové teorii pole. Podobným, ale obtížnějším problémem je studium křivek na zakřivených varietách místo v rovině. Zde je možné potkat jiný krásný příběh s explicitními výsledky souvisejícími s pojmem zrcadlové symetrie. Toto vše přinesla kvantová teorie pole v jedné prostorové a jedné časové dimenzi.

Pokud postoupíme o dimenzi výš, kde máme dvě prostorové dimenze a jednu dimenzi časovou, potkáme teorii invariantů uzlů, kterou vytvořil Vaughan Jones. I tato teorie má elegantní vysvětlení a interpretaci v řeči kvantové teorie pole.

S tím jsou spojeny také nové matematické objekty s názvem „kvantové grupy". Nejhezčí na kvantových grupách je jejich název! Pokud se mě zeptáte na definici kvantové grupy, budu na to potřebovat další půlhodinu. Jsou to složité objekty, které bez jakýchkoliv pochyb mají hluboké souvislosti s kvantovou teorií. Vznikly na půdě fyziky a byly později systematicky použity algebraiky pro jejich konkrétní výpočty.

Pokud postoupíme ještě o další krok do čtyřdimenzionální situace (tři plus jedna dimenze), najdeme zde Donaldsonovu teorii čtyřrozměrných variet, která sem přirozeně patří a na kterou měla kvantová teorie pole zásadní vliv. Na základě této teorie vytvořili Seiberg a Witten alternativní přístup k teorii invariantů čtyřrozměrných variet, který je založen na fyzikální intuici a přináší zázračné matematické výsledky. To jsou jen některé příklady z mnoha.

Pak je zde proslulá teorie strun, ale to je již minulost! O čem bychom nyní měli mluvit, je M-teorie. Jde o bohatou teorii, která v sobě opět obsahuje řadu matematických aspektů. Výsledky, které tato teorie přináší, se teprve v současnosti zpracovávají a určitě budou matematiky zaměstnávat ještě dlouhou dobu.

9. Historický souhrn

Zkusme si udělat rychlý přehled. Podívejme se na historii ve zkratce: co se stalo s matematikou? Shrňme stručně osmnácté a devatenácté století dohromady jako období, které lze nazvat klasickou matematikou, období spojené s Eulerem a Gaussem, kdy celá ta skvělá klasická matematika byla vytvořena a rozvinuta. Mohl by vzniknout dojem, že to byl téměř konec matematiky. Ale dvacáté století naopak bylo velmi produktivní, jak jsme právě popsali.

Dvacáté století lze zhruba rozdělit na dvě části. Myslím, že první část byla převážně tím, co bych nazval „obdobím specializace“. V tomto období byl velmi vlivný Hilbertův přístup, který se pokoušel vše formalizovat, pečlivě definovat a pak postupně zkoumat, co je možné v jednotlivých odvětvích dělat. Jak jsem řekl, jméno Bourbaki je spojováno s tímto přístupem, kde je pozornost soustředěna na to, co je možné se v daném čase dozvědět o zvoleném algebraickém nebo jiném tématu. Druhá polovina dvacátého století byla podstatně více dobou, kterou bych nazval „obdobím sjednocování“, kdy hranice byly překračovány, metody se stěhovaly z jednoho oboru do druhého a kdy se odvětví v podstatném měřítku slévala. Je to asi přílišné zjednodušení, ale je možné to považovat za krátké shrnutí některých aspektů, které je možné v matematice dvacátého století vidět.

A co lze říct o jednadvacátém století? Řekl jsem, že dvacáté první století by mohlo být obdobím kvantové matematiky nebo, přejete-li si, matematiky nekonečné dimenze. Co tím chci říct? Kvantová matematika může znamenat, pokud se dostaneme tak daleko, řádné porozumění analýze, geometrii, topologii a algebře spojené s nelineárními prostory funkcí. Pod pojmem „řádné porozumění“ rozumím přesnou formulaci spojenou s úplnými důkazy všech těch obdivuhodných výsledků, o kterých nyní fyzikové spekulují.

Je třeba říct, že naivní zkoumání těchto nekonečněrozměrných oblastí a kladení naivních otázek vede zpravidla k nesprávným nebo nezajímavým odpovědím. Fyzikální aplikace, intuitivní pochopení a motivace umožnily teoretickým fyzikům klást inteligentní otázky o nekonečných dimenzích a provádět jejich velmi jemné zkoumání, vedoucí ke smysluplným odpovědím. Proto provádět takovouto nekonečněrozměrnou analýzu je hluboce netriviální úloha. Je třeba přistupovat k této oblasti ze správné strany. Hodně klíčů je již k dispozici. Mapa je již nakreslena: víme, co je třeba udělat, ale zbývá ještě obrovský kus cesty.

Co ještě by se mohlo stát v 21. století? Rád bych zdůraznil nekomutativní geometrii Alaina Connese, tuto obdivuhodně rozsáhlou jednotnou teorii, která opět kombinuje vše. Je v ní analýza, algebra, geometrie, topologie, fyzika i teorie čísel a všechny tyto obory přispívají k jejím jednotlivým částem. Je to rámec, který umožňuje dělat vše, co se obvykle dělá v diferenciální geometrii včetně jejích vztahů s topologií, v kontextu nekomutativní analýzy. Existují velmi dobré důvody, proč je právě toto žádoucí, spolu s aplikacemi (již existujícími nebo možnými) v teorii čísel, geometrii, teorii diskrétních grup atd., spolu s aplikacemi ve fyzice. Zajímavé souvislosti s fyzikou jsou právě teď předmětem zkoumání. Jak daleko teorie pokročí, čeho všeho dosáhne, je otázkou budoucnosti. Je to jistě oblast, kde očekávám podstatný vývoj v prvním desetiletí tohoto století a je možné, že budou objeveny souvislosti se zatím neexistující rigorózní kvantovou teorií pole.

Pohlédneme-li jiným směrem, je zde to, co se nazývá „aritmetická geometrie“ nebo Arakelova geometrie, která se pokouší sjednotit, jak je to jen možné, algebraickou geometrii a části teorie čísel. Je to velmi úspěšná teorie. Její začátek je pozoruhodný, ale má před sebou ještě dlouhou cestu. Kdo ví, kam povede?

Všechny tyto oblasti mají ovšem společné části. Očekávám, že vliv fyziky se rozšíří do všech oblastí, i do teorie čísel: Andrew Wiles s tím nesouhlasí a jen čas tuto otázku rozhodne.

Je možné očekávat, že směry, které jsem právě vyjmenoval, se postupně vynoří během tohoto desetiletí. Ale je zde ještě něco, čemu říkám žolík v balíčku: návrat zpět ke geometrii v malých dimenzích. Bok po boku s těmi zvláštními nekonečněrozměrnými objekty stále ještě dělá potíže geometrie v malých dimenzích. Z mnoha hledisek jsou dimenze, v nichž se geometrie zrodila a se kterými naši předchůdci začínali, stále záhadou. Malými dimenzemi se myslí dimenze 2, 3 a 4. Například práce W. Thurstona o geometrii v dimenzi 3 se pokouší o klasifikaci geometrií, které mohou existovat na trojrozměrných varietách. Je to mnohem hlubší problém než dvojrozměrná geometrie. Thurstonův program je stále daleko od cíle a dokončit jej je jistě podstatná výzva.

Dalším pozoruhodným příběhem v dimenzi 3 jsou práce Vaughana Jonese, jejichž inspirace přichází z teoretické fyziky. Přinášejí nám řadu informací o dimenzi 3, které jsou téměř komplementární s informacemi obsaženými v Thurstonově programu. Spojení těchto dvou stránek pořád zůstává enormní výzvou, ale nedávno se objevily náznaky možného řešení. A tak celá tato oblast, stále v malých dimenzích, má své souvislosti s fyzikou, ale zůstává opravdovou hádankou.

Konečně bych se měl zmínit o tom, že ve fyzice mají významnou úlohu tzv. „duality“. Tyto duality vznikají, zhruba řečeno, když příslušná kvantová teorie má dvě různé realizace ve formě klasické teorie. Jednoduchým příkladem je dualita mezi polohou a hybností v klasické mechanice. Ta nahrazuje prostor jeho duálem, v lineárních teoriích je dualita realizována pomocí Fourierovy transformace. Ale v nelineárních teoriích zůstává otázka, jak nahradit Fourierovu transformaci, nerozřešeným podstatným problémem. Rozsáhlé části matematiky souvisejí s otázkou, jak zobecnit dualitu v nelineární situaci. Zdá se, že na tuto otázku jsou fyzikové schopni pozoruhodným způsobem odpovědět ve strunových teoriích a v M-teorii. Vyrábějí příklad za příkladem zázračné duality, které jsou v jakémsi širokém smyslu nekonečněrozměrné nelineární verze Fourierovy transformace a které opravdu fungují. Porozumění těmto nelineárním dualitám se také zdá být jedním z velkých úkolů pro toto století.

Myslím, že se v tomto místě zastavím. Zbývá udělat spoustu práce a je velmi příjemné pro starého muže, jako jsem já, mluvit k mnoha mladým lidem, jako jste vy; a mít možnost vám říct: v tomto století na vás čeká obrovské množství práce!