Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Horák

Klima, objekt matematického zkoumání. Část 1. Matematický model klimatu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 46 (2001), No. 4, 313--327

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141098

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2001

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Klima, objekt matematického zkoumání

Část 1. Matematický model klimatu

Jiří Horák, Praha

1. Úvod

Účelem tohoto článku je tematicky navázat na informaci [1, str. 322–327] o simulaci možných změn klimatu (klimatických katastrof) „přeskoky“ mezi kvazistacionárními stavy konečnědimenzionálních regulárních kvadraticky nelineárních aproximací rovnic hydrodynamiky. Mluvili jsme o nich jako o systémech hydrodynamického typu. Redukce nekonečného počtu stupňů volnosti dynamických systémů (jejich definici podáme později) je z praktického hlediska velice žádoucí a udává jeden z prioritních směrů matematického modelování přírodních jevů. Již v [1, str. 180–185] jsme uvedli, že procedura redukce je podpořena poznatky o existenci a hladkosti konečnědimenzionálních inerciálních variet. Proto má smysl převést otázky o atraktoru evolučních parciálních diferenciálních rovnic na konečnědimenzionální systémy. Víme, že pokud existuje inerciální varieta a existuje atraktor, který nemusí být ani globální, pak atraktor je podmnožinou inerciální variety.

Kdo se seznámil s prací [1, odst. 4.6.11.6.6], poznal, že jejím jádrem jsou v podstatě numerické experimenty s jednoduššími systémy založenými na superpozici tripletů s cílem vytipovat „přeskoky“ mezi jejich stavy. V tomto ohledu citovaná stať měla spíše „experimentální“ charakter. Avšak již v jejím závěru jsme naznačili možnou cestu podstatně obecnějšího náhledu na možné změny klimatu. Prioritní úlohu zde přisuzujeme samotné teorii dynamických systémů a jejich atraktorům. Poté na klimatické katastrofy nahlížíme z pozice dynamiky klimatického systému, soustředěné v konečném čase buď na atraktoru, nebo na inerciální varietě. A to za podmínek, že klimatické charakteristiky finálních pohybů jsou spojeny s charakteristikami atraktorů, inerciálních variet i s působením vnějších perturbací aktivujících systém. Tuto myšlenku dále podrobněji rozvedeme na několika úlohách, tentokrát již matematické teorie klimatu, a ve druhé části příspěvku v pojednání o prediktabilitě změn klimatu.

Ještě dříve, než podáme definici dynamických systémů a vymezíme centrální úlohu matematické teorie klimatu, je třeba říci, jak se díváme na možné změny klimatu z hlediska existence invariantních přitahujících množin — atraktorů.

Náhlé změny klimatu signalizuje zánik jednoho atraktoru nebo inerciální variety situovaných do určité oblasti fázového prostoru a jejich generace v jiné části tohoto

---

RNDr. Jiří Horák, CSc. (1929), Ústav fyziky atmosféry AV ČR, Boční II, čp. 1401, 141 31 Praha 4.

prostoru. Dochází ke „krizi“ atraktoru či inerciální variety, známé z teorie dynamických systémů. Nastane-li takový případ u modelu klimatu, bod reprezentující jeho stav se začne pohybovat v nějaké části jiné atrahující (absorbující) množiny a klimatické rozdělení se skokem změní — nastane klimatická katastrofa. Staré klima ztrácí stabilitu a na jeho místo nastupuje nové stabilní klima. Centrální úlohou matematické teorie klimatu poté je úloha zaměřená na získání jisté (podstatné) invariantní míry, soustředěné na atraktoru klimatického systému. Pojem „klimatický systém“ zahrnuje atmosféru, hydrosféru, litosféru, kryosféru a biosféru [2]. Podnebí se definuje jako statistický soubor stavů vnitřního klimatického systému, který je v rovnováze s pomalu se měnícími vnějšími podmínkami, tj. s vnějším klimatickým systémem. V matematické teorii klimatu je jeho modelem nekonečnědimenzionální nelineární disipativní systém. Pak ovšem vzniká otázka: Jaké funkcionály řešení tohoto systému mohou popisovat reálné klima a v jakém vztahu budou k signálům generovaným reálným atmosférickým systémem? Signálem rozumíme potenciálně předpověditelnou složku podnebí související se změnami vnější části úplného klimatického systému [2].

Nyní již k pojmu dynamického systému. Budeme jím rozumět zobrazení $f : X \times G \to X$, kde X je metrický prostor, G je buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Z}$ a f splňuje podmínky: 1. Pro všechna $x \in X$ je $f(x,0) = x$; 2. Pro všechna $x \in X$ a $(s,t) \in G$ je $f\bigl(f(x,s),t\bigr) = f(x, s+t)$. Místo $f(x,t)$ budeme psát $f^t x$. Čas t nemusí být nutně spojitý. Omezíme-li se na diskrétní čas $t \in \mathbb{N}$, f^t budou mocniny jediného zobrazení f. Dále f nemusí být invertibilní, nebude tedy automorfismem, ale jen endomorfismem prostoru s mírou. Pak $\{f^t\}$ není grupou, ale jen semigrupou. Teorii, o níž mluvíme v souvislosti s automorfismy prostoru s mírou, označujeme jako metrickou teorii dynamických systémů. Větší pozornost bývá věnována homeomorfismům topologického prostoru a pak mluvíme o topologické teorii dynamických systémů.

Připomeňme, že to byla právě Boltzmannova formulace tzv. ergodické hypotézy [3] (předložil ji v r. 1871), která dala základ vzniku teorie dynamických systémů. Samotný objekt této teorie je vděčným předmětem matematického zkoumání a doznal během času mnoho zobecnění. Pojem dynamického systému a další, které s ním souvisí, jsou vysvětleny ve [4], kde je také mnoho údajů o důležitém pojmu strukturální stability.

2. Základní věty a tvrzení o klimatických modelech

I když jsme se již letmo zmínili o obsahu pojmu matematická teorie klimatu, řekněme si znovu, že jí míníme teorii klimatu, v níž se zajímáme o zákony chování trajektorií klimatického systému metodami kvalitativní teorie diferenciálních rovnic (kvalitativní dynamiky).[1])

[1]) Hledisko, které bylo nazváno „kvalitativní teorií diferenciálních rovnic“, zavedl H. Poincaré v r. 1881. Místo snahy po explicitním řešení soustavy diferenciálních rovnic hledáme globální geometrický obraz trajektorií pole definovaného rovnicemi. V mnoha případech to stačí, neboť nám často více než na kvantitativních výsledcích záleží na kvalitativním výsledku evoluce systému [5].

Předpokládáme, že při tom platí následující hypotézy [6]: 1. Evoluce klimatického systému je determinovaná. To znamená, že pro vektor parametrů klimatického systému $X(t)$ existuje zobrazení $f : X(t) \to X(t+\tau)$, $t \geqq 0$, $\tau \geqq 0$, které dovoluje určit stav systému v čase $t+\tau$, je-li znám stav tohoto systému v čase t; 2. Zobrazení f je řešením jistého „ideálního" hydrodynamického modelu přírody a pozorovatelné ve formě časových řad (signálů) jsou realizací řešení tohoto ideálního modelu v diskrétním čase.

Podle této druhé hypotézy lze evoluci klimatického systému s dostatečnou přesností pro praxi popsat systémem rovnic termohydrodynamiky. O takové možnosti je zevrubně pojednáno v [1] a [7] v souvislosti se stochastičností v matematických modelech všeobecné cirkulace atmosféry.

Na základě obou zde uvedených hypotéz musí mít model klimatického systému globální řešení, tj. musí platit teorém o existenci a jednoznačnosti řešení rovnic modelu klimatu pro libovolně velká t. Zdůrazňujeme, že tyto hypotézy považujeme za základ výstavby matematické teorie klimatu.

Víme, že finální pohyb klimatického modelu se rozvíjí na jeho atraktoru, kterým je invariantní kompaktní množina. Řešení (pohyb) na atraktoru lze popsat jistou funkcí $f(p,t)$, kde p je prvkem atraktoru. Toto řešení je definováno pro všechna $t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. S ohledem na invarianci samotný atraktor můžeme považovat za fázový prostor dynamického systému generovaného $f(p,t)$. Z tohoto faktu je možno získat pro nás důležitá tvrzení. Především všechny body atraktoru A lze rozdělit na bloudící a nebloudící. Bloudící bod p atraktoru A má takové okolí U, že platí $U(p) \cap f\big(U(p), t\big) = \emptyset$, kde $\emptyset$ je prázdná množina. Nebloudící bod $p \in A$ má tu vlastnost, že je-li U okolí p, pak existuje $t > t_0$ tak, že $U(p) \cap f\big(U(p), t\big) \neq \emptyset$. Sjednocení všech nebloudících bodů řešení f se nazývá nebloudící množinou řešení f a na této množině je soustředěna rekurentnost systému.

Prioritní otázkou je: Jak se chovají bloudící body na atraktoru? Odpověď zní: Pro libovolné $\varepsilon > 0$ každý pohyb $f(p,t)$ bloudícího bodu $p \in A$ trvá jen v jistém konečném čase $T = T(\varepsilon)$ vně ε-okolí množiny nebloudících bodů. V tomto smyslu lze říci, že pohyb na atraktoru vždy směřuje k množině nebloudících bodů. O samotné množině nebloudících bodů můžeme podat jen kusé informace. Zcela jistě však platí, že pokud je tato množina tvořena stacionárními body, pak se všechny trajektorie nacházejí v okolí těchto bodů.

V termínech teorie pravděpodobnosti můžeme předcházející věty formulovat následovně. Budiž $\varphi_E(x)$ charakteristickou funkcí množiny $E \subset A$ a nechť k pohybu $f(p,t)$ dochází v čase $\langle 0, T\rangle$. Poté čas pobytu (čas života) pohybu $f(p,t)$ v množině E vyjadřuje integrál

$$\tau(p,T,E) = \int_0^T \varphi_E\big(f(p,t)\big)\,\mathrm{d}t$$

a platí $0 \leqq \tau/t \leqq 1$. Pokud existuje

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_E\big(f(p,t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

nazýváme ji pravděpodobností výskytu bodu p v množině E a píšeme $P\big(f(p,t) \in E\big)$. Množinu V nazveme centrem přitažlivosti pohybu $f(p,t)$, jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$P\big(f(p,t) \in U_\varepsilon(V)\big) = 1,$$

kde $U_\varepsilon(V)$ je ε-okolí množiny centrálních pohybů. Je tedy množina centrálních pohybů centrem přitažlivosti všech trajektorií na atraktoru. Až dosud jsme předpokládali, že výše uvedená limita existuje. K tomu si řekněme, že její existenci lze zaručit pro téměř všechny body p atraktoru, pokud na něm existuje invariantní míra.

3. Invariantní pravděpodobnostní míry

Míra μ se nazývá invariantní, jestliže pro libovolné $E \subset A$ máme $\mu(E) = \mu\big(f(E,t)\big)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Pravděpodobnostní míru na atraktoru lze vždy získat. Podstatně složitější situace nastává, jde-li o invariantní pravděpodobnostní míru na atraktoru[2]).

Máme možnost sestrojit na něm invariantní míru, vyjdeme-li z kompaktnosti atraktoru a užijeme-li metodu navrženou Bogoljubovem a Krylovem. Ještě dříve, než se zde budeme zabývat touto metodou, připomeňme si Kolmogorovovu metodu [8]. Ta je založena na pozorování, že každý realistický model nějakého fyzického nebo počítačového experimentu by měl v sobě obsahovat nedeterministickou složku odpovídající náhodnému šumu v systému. Výchozím vztahem je pro nás rovnice $\dot{x} = F\big(x(t)\big) + \varepsilon w(t)$, kde w je nějaký šum a $\varepsilon > 0$ parametr. Pro vhodný šum má stochastický proces definovaný touto rovnicí jedinou stacionární míru m_ε. Pak pro systém $\dot{x} = F\big(x(t)\big)$ je vhodná míra $\lim m_\varepsilon = m$ pro $\varepsilon \to 0$. Můžeme však postupovat i takto (odvoláváme se na [8]): ze všech invariantních měr vybereme pouze takové m, pro něž existuje nějaká podmnožina fázového prostoru M s kladnou Lebesgueovou mírou tak, že pro libovolné $x \in M$ je m dáno předchozím vztahem. Množina takových měr je pro řadu „rozumných“ systémů jednoprvková. Takové míry nazýváme Sinaiovými-Ruelleovými-Bowenovými mírami. Pro některé „rozumné“ systémy, např. systémy splňující tzv. axiom A [7], lze ukázat, že obě tyto míry jsou stejné.

Třebaže Kolmogorovova míra je opravdu velmi „rozumná“ a přirozená (citujeme podle [8]), bohužel nevíme, zda existuje i třeba jen pro „rozumné“ fyzické systémy. Proto dáváme přednost jiné metodě, která vychází z Bogoljubovovy a Krylovovy teorie invariantní míry. Podle jejich věty je postačující podmínkou k existenci alespoň jedné

---

[2]) V reálných fyzikálních problémech, s výjimkou důležitého, ale speciálního případu hamiltonovských systémů, máme obvykle zadán jen fázový prostor a transformace $\{f^t\}$. Úkolem pak je určit, jaké všechny invariantní míry takový prostor připouští, a vybrat z nich vhodné. Invariantních měr bude většinou více, tak např. pro hamiltonovské systémy to jsou všechny míry P_E s „hustotou“ $\delta(H(x) - E)$ a všechny jejich konečné či nekonečné lineární kombinace. Při jejich hledání nelze využít ergodickou větu, podle níž $(1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f^t x$ konverguje pro skoro všechna x k invariantní funkci $\tilde{f}(x)$ a pro ta x, pro něž to platí, je $\tilde{f}(x)$ lineární nezáporný funkcionál. Ergodickou větu nelze použít, protože její důkaz sám netriviálním způsobem využívá existence invariantní míry [7].

konečné invariantní míry kompaktnost metrického prostoru. O tom, že požadavek kompaktnosti je nezbytný, se můžeme přesvědčit na příkladu dynamického systému, za který vezmeme posuv doprava na reálné ose $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$: $f^t x = x + t$. V obvyklé topologii $\mathbb{R}$ není kompaktní a konečná invariantní míra pro $\{f^t x\}$ neexistuje. Přidáme-li k $\mathbb{R}$ bod ∞ a k topologii jeho okolí (jednobodová kompaktifikace), bude jediným spojitým rozšířením $f^t \infty = \infty$ a existuje konečná invariantní míra δ_x (δ_x je míra soustředěná v bodě x: $\int f \, \mathrm{d}\delta_x = f(x)$). Jak víme, prioritní úlohou matematické teorie klimatu je konstrukce (získání algoritmu) vhodné invariantní míry soustředěné na atraktoru klimatického systému a otázka o její existenci a jednoznačnosti. Proto invariantním mírám věnujeme v našem pojednání zvýšenou pozornost.

4. Bogoljubovova a Krylovova metoda získání invariantní pravděpodobnostní míry na atraktoru

Jejich procedura se opírá o Rieszovu-Radonovu větu, kterou zde vyslovíme ve tvaru: Každý lineární spojitý a nezáporný funkcionál $L(\varphi)$ definovaný na množině spojitých funkcí $\{\varphi(p)\}$ zadaných na atraktoru A generuje nějakou míru a funkcionál sám lze pomocí této míry vyjádřit integrálem

$$L(\varphi) = \int_A \varphi(p) \mu(\mathrm{d}p).$$

Míra μ je pravděpodobnostní mírou, jestliže $L(1) = 1$. Vyjdeme-li z tohoto faktu, máme možnost prokázat, že na atraktoru existuje alespoň jedna pravděpodobnostní míra invariantní vůči dynamickému systému působícímu na atraktoru [6]. Na zde citovanou práci se budeme odvolávat častěji.

Naznačme postup, kterým lze dospět k takové míře. Vezměme libovolnou pravděpodobnostní míru m na atraktoru. Může to být např. míra m_p, $p \in A$ a $E \subset A$, pro kterou platí $m_p(E) = 1$, jestliže $p \in E$, a $m_p(E) = 0$, jestliže $p \notin E$. Tato míra je invariantní a ergodická a její význam spočívá v tom, že libovolná pravděpodobnostní míra je limitou (ve slabém smyslu) lineárních kombinací měr m_p:

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j m_{p_j}, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j > 0.$$

Nyní položme

$$L_T(\varphi) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \int_A \varphi\big(f(p,t)\big) m(\mathrm{d}p).$$

Podle Rieszovy a Radonovy věty tento funkcionál generuje míru m_T a platí

$$L_T(\varphi) = \int_A \varphi(q) m_T(\mathrm{d}q).$$

Protože atraktor A je kompaktní množinou, máme možnost ze souboru měr $\{m_T\}$ vybrat slabě konvergující posloupnost $\{m_{T_n}\}$, $T_n \to \infty$, tj. existuje míra μ taková, že

$$\lim_{T\to\infty} \int_A \varphi(q) m_{T_n}(\mathrm{d}q) = \int_A \varphi(q)\mu(\mathrm{d}q),$$

kde $\varphi(q)$ je libovolná spojitá funkce na atraktoru A. Míra μ je již invariantní pravděpodobnostní mírou na atraktoru a definujeme ji rovností

$$\lim_{T_n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \mathrm{d}t \int_A \varphi\big(f(p,t)\big) m(\mathrm{d}p) = \int_A \varphi(q)\mu(\mathrm{d}q). \tag{4.1}$$

Jestliže za výchozí míru m vezmeme míru m_p (nazýváme ji individuální mírou) a limitní míru označíme μ_p, (4.1) nabývá tvaru

$$\lim_{T_n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \varphi\big(f(p,t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_A \varphi(q)\mu_p(\mathrm{d}q).$$

Povšimněme si, že limita na levé straně zápisu (4.1) je střední hodnotou přes $f(p,t)$ a pravá strana představuje zprůměrovanou hodnotu $\varphi(p)$ na atraktoru. Střední hodnota braná přes trajektorie existuje pro téměř všechny body atraktoru A [3]).

Dosud jsme se zaměřili na algoritmus získání pravděpodobnostních invariantních měr na atraktoru. Ukázali jsme, že takových měr může být mnoho, a není zřejmé, kterou z nich máme vybrat. Příznivá situace nastává, když známe pravděpodobnostní rozdělení počátečních dat o systému. Tehdy na atraktoru existuje invariantní pravděpodobnostní míra, které dáme přednost před druhými mírami. Touto úlohou se budeme zabývat později. Než tak učiníme, vyslovíme základní tvrzení o pohybu na atraktoru za předpokladu, že na něm je soustředěna invariantní míra.

První se týká Poincarého rekurentního teorému a druhé Birkhoffova ergodického teorému. Nechť na atraktoru A je zadána pravděpodobnostní invariantní míra μ. Poincarého teorém pak říká, že pro libovolnou množinu E kladné míry ($\mu(E) > 0$) existuje takové t, že $\mu\big(E \cap f(E,t)\big) > 0$ a téměř všechny body (ve smyslu míry μ) atraktoru jsou stabilní ve smyslu Poissona. Body, které jsou stabilní ve smyslu Poissona, jsou nebloudícími body. K tomu lze říci, že při existenci dynamického systému na atraktoru a jeho invariantní míry jsou téměř všechny body atraktoru nebloudícími body.

---

[3]) Je-li zadána jistá invariantní míra μ, která není ergodická (viz dále), můžeme s její pomocí předložit libovolně mnoho druhých invariantních pravděpodobnostních měr generovaných dynamickým systémem $f(p,t)$. Když $E \subset A$ a E je invariantní, množinu invariantních měr μ_α, $0 < \alpha < 1$, $\mu(E) > 0$, udává předpis [6]

$$\mu_\alpha(B) = \alpha\,\frac{\mu(E\cap B)}{\mu(E)} + (1-\alpha)\,\frac{\mu((X-E)\cap B)}{\mu(X-E)}\,.$$

Přejděme k Birkhoffovým teorémům. Jsou dva a první můžeme formulovat takto: Budiž μ invariantní pravděpodobnostní míra na atraktoru A ($\mu(A) = 1$). Tehdy pro libovolnou integrovatelnou funkci φ existuje časová střední hodnota dynamické funkce φ pro téměř všechna $p \in A$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi\bigl(f(p,t)\bigr)\,\mathrm{d}t = \bar{\varphi}(p). \tag{4.2}$$

Přitom $\bar{\varphi}(p) = \bar{\varphi}\bigl(f(p,t)\bigr)$, $t \in \mathbb{R}$, a dále

$$\int_A \bar{\varphi}(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int_A \varphi(p)\mu(\mathrm{d}p). \tag{4.3}$$

Jestliže φ bude charakteristickou funkcí φ_E množiny $E \subset A$, dostáváme

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_E\bigl(f(p,t)\bigr)\,\mathrm{d}t = \bar{\varphi}_E(p). \tag{4.4}$$

Integrál na levé straně rovnosti (4.4) dává čas pobytu řešení $f(p,t)$ v množině E a tento čas je roven $\bar{\varphi}(p)$. Abychom mohli nalézt $\bar{\varphi}(p)$, je třeba vyslovit předpoklad o ergodičnosti dynamického systému na atraktoru. Dynamický systém nazveme ergodickým s ohledem na míru μ, jestliže atraktor nelze rozložit na dvě invariantní neprotínající se množiny kladné míry.

Druhý Birkhoffův teorém říká, že pro ergodický systém a invariantní míru μ je časová střední hodnota (4.2) konstantní pro téměř všechny body $p \in A$, tj. limitní funkce $\varphi = c =$ konst. Poté z (4.3) vyplývá, že platí

$$c = \int_A \varphi(p)\mu(\mathrm{d}p). \tag{4.5}$$

Přihlédneme-li nyní k zápisům (4.2) – (4.5), dojdeme ke známé formulaci druhého Birkhoffova teorému o tom, že pro ergodické systémy platí ekvivalence obou způsobů středování. Když $\varphi = \varphi_E$ pro množinu $E \subset A$, můžeme psát $c = \mu(E)$ a (4.4) má tvar

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_E\bigl(f(p,t)\bigr)\,\mathrm{d}t = \mu(E). \tag{4.6}$$

Z (4.6) dostáváme, že střední doba pobytu v množině E je pro téměř každé řešení ergodického systému úměrná míře této množiny. Jinak řečeno, je-li systém ergodický na atraktoru, pak trajektorie téměř každého jeho bodu se budou vyskytovat v každé množině kladné míry a zůstanou tam po dobu úměrnou této míře.

5. Pravděpodobnostní míra zadaná v prostoru počátečních dat klimatického modelu

Až dosud jsme uvažovali libovolnou pravděpodobnostní míru na atraktoru a z ní získali invariantní pravděpodobnostní míru pomocí Bogoljubovovy a Krylovovy metody.

Nyní se budeme věnovat případu, kde je pravděpodobnostní míra zadána v prostoru počátečních dat klimatického modelu. Ukážeme, že při procesu evoluce nás tato míra přivede k invariantní pravděpodobnostní míře soustředěné na atraktoru klimatického systému. Nazveme ji „podstatnou“, neboť proti invariantním mírám získaným v předešlém oddílu je tato míra spojena s fyzikou a dynamikou konkrétního modelu. Příslušnou proceduru založíme na rovnici vorticity (vířivosti) barotropní atmosféry na rotující kulové ploše [6]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\Delta^{-1}\omega, \omega + l) = -\sigma\omega + \nu\Delta\omega + f,\\ \omega\big|_{t=0} = \omega_0.\end{gathered} \tag{5.1}$$

Zde je $\omega = \Delta\psi$, $\psi = \psi(\lambda, \varphi, t)$ vlnová funkce v geografických souřadnicích λ (délka) a φ (šířka), J jacobián v týchž souřadnicích, $l = 2\Omega \sin\varphi$ (Ω je úhlová rychlost rotace Země), $\sigma\omega$ popisuje rayleighovské tření v planetární přízemní vrstvě, $\nu\Delta\omega$ turbulentní vazkost a $f = f(\lambda, \varphi)$ zdroj vnější vorticity nezávisející na čase t. Úlohu (5.1) budeme uvažovat v prostoru

$$H(S) = \Big\{\omega : \omega \in L_2(S),\ \int_S \omega \,\mathrm{d}s = 0\Big\}$$

skalárních funkcí na kulové ploše S integrovaných na S s druhou mocninou a s nulovou střední hodnotou. Normu a skalární součin v tomto prostoru označme $\|\,.\,\|$ a $(\,.\,,\,.\,)$. Jestliže funkce $f \in H(S)$, lze psát

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leqq n} f_{mn} \mathrm{Y}_{mn},$$

kde Y_{mn} jsou sférické funkce. Budiž $A = -\Delta$ Laplaceho-Beltramiho operátor na kulové ploše. Definujme prostor $H_0^\alpha(S) = D(A^{\alpha/2})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tak, že

$$\|u\|_{H_0^\alpha} = \|u\|_\alpha = \|(-\Delta)^{\alpha/2} u\|.$$

Když $f \in H_0^{-1}$ a $\omega_0 \in H$, existuje jediné řešení úlohy (5.1) takové, že

$$\omega \in C(\langle 0, \infty), H) \cap L_2(0, T; H_0^1)$$

pro libovolné $T > 0$. Toto řešení lze psát ve tvaru $\omega(t) = S(t)\omega_0$, kde $S(t)$: $\omega_0 \to \omega_0(t)$ je semigrupa spojitých operátorů působících v H.

Nechť je v prostoru počátečních dat $\omega_0 \in H$ zadána pravděpodobnostní míra, tj. $\sigma_B(H)$-algebra borelovských množin, na níž je dána σ-aditivní nezáporná funkce $\mu_0(E)$ pro všechna $E \in \sigma_B(H)$ taková, že $\mu_0(H) = 1$. Uvážíme-li tuto pravděpodobnostní míru $\mu_0(E)$, můžeme zavést pojem statistického řešení rovnice (5.1) jako souboru měr $\mu(t, E)$, $E \in \sigma_B$, vyhovujících podmínce

$$\begin{gathered}\mu(t, E) = \mu_0(S_t^{-1} E) \quad \text{pro všechna } E \in \sigma_B,\\ S_t^{-1} E = \{\omega \in H : S_t\omega \in E\}, \quad S_t \equiv S(t).\end{gathered} \tag{5.2}$$

Protože operátor S_t je spojitý, $S_t^{-1}E \in \sigma_B$, a tedy $\mu\bigl(t, E)\bigr)$ je pravděpodobnostní míra na σ_B.

Statistické řešení $\mu(t, E)$ nazveme stacionárním, jestliže soubor měr $\mu(t, E)$ nezávisí na t, tj. $\mu(t, E) \equiv \mu(E)$ pro všechna $t \geqq 0$. Můžeme dokázat, že míra $\mu(E)$, $E \in \sigma_B$, je invariantní vůči semigrupě $S(t)$ právě tehdy, když $\mu(E)$ je stacionární statistické řešení rovnice (5.1). Ze vztahu (5.2) dostáváme, že

$$\int F(S_t\omega)\mu_0(\mathrm{d}\omega) = \int F(\omega)\mu(t, \mathrm{d}\omega) \tag{5.3}$$

pro libovolný spojitý funkcionál $F : H \to \mathbb{R}$, pro který existuje jeden z integrálů v (5.3).

Vyjdeme-li ze statistického řešení $\mu(t, E)$ a uvážíme-li proceduru vyšetřování, dojdeme k pravděpodobnostní míře

$$\mu_T(E) = \frac{1}{T}\int_0^T \mu(t, E)\,\mathrm{d}t,$$

a to pro všechna $E \in \sigma(H)$. Tvrdíme, že existuje slabá limita (důkaz je proveden v [6])

$$\lim_{T\to\infty} \mu_T(E) = \hat{\mu}(E)$$

a touto limitou $\hat{\mu}(E)$ je pravděpodobnostní míra na $H(S)$, invariantní vůči semigrupě S_t. Míra $\hat{\mu}(E)$ je soustředěna na atraktoru $A \subset H$ semigrupy S_t: $\hat{\mu}(A) = 1$. Pro důkaz invariance míry $\hat{\mu}(E)$ stačí ukázat, že

$$\int F(\omega)\hat{\mu}(\mathrm{d}\omega) = \int F(S_t\omega)\hat{\mu}(\mathrm{d}\omega)$$

pro libovolný spojitý na H ohraničený funkcionál F, a to pro všechna $t > 0$. Důkaz tvrzení, že $\hat{\mu}(A) = 1$, provedeme sporem.

Shrňme výsledky, k nimž jsme zde dospěli. Libovolná počáteční pravděpodobnostní míra $\mu_0(E)$, $E \in \sigma_B$, generuje invariantní míru $\hat{\mu}(E)$ na atraktoru, a to „jako by zároveň byla zapomenuta“ její počáteční hodnota. Pokud je S_t ergodická semigrupa, pak $\hat{\mu}(E)$ je jediné. (Otázka o ergodičnosti S_t je otevřená.)

K tomu je třeba dodat, že vše, co bylo řečeno o invariantní míře $\hat{\mu}$ na atraktoru, lze převést na pohyby, k nimž dochází na atraktoru s invariantní mírou, tentokrát již klimatického modelu.

6. Invariantní pravděpodobnostní míra soustředěná na atraktoru

Budou nás zde zajímat kvazistacionární režimy atmosférické cirkulace v relaci se stacionárními body dynamického systému [6].

Nadále budeme předpokládat, že nízkofrekvenční režim atmosférické cirkulace je popsán rovnicí vorticity ve tvaru

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = -\sigma\omega + \nu\Delta\omega + f. \tag{6.1}$$

Stacionární řešení systému (6.1) vyhovuje rovnici

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega} + l) = -\sigma\bar{\omega} + \nu\Delta\bar{\omega} + f \tag{6.2}$$

(předpokládáme, že f nezávisí na čase).

Budiž $\{\bar{\psi}_i, \bar{\omega}_i\}$ množina stacionárních řešení, $i = 1, 2, \ldots, n$, a Ω_i dostatečně malé okolí stacionárního řešení $\bar{\omega}_i$. Jestliže $\omega(t) \in \Omega_i$, pak

$$(\omega, \bar{\omega}_i)(\|\omega\| \, \|\bar{\omega}_i\|)^{-1} \approx 1. \tag{6.3}$$

Jestliže trajektorie systému (6.1) budou podstatnou dobu ležet v množině, kterou dostaneme sjednocením Ω_i, bude

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_i \tau_i = 1,$$

kde

$$\tau_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g_i\big(\omega(t)\big)\,\mathrm{d}t, \tag{6.4}$$

$g_i(\omega) = 1$ pro $\omega(t) \in \Omega_i$ a $g_i(\omega) = 0$ pro $\omega(t) \notin \Omega_i$.

Budeme říkat, že řešení (6.1) je i-tým kvazistacionárním cirkulačním režimem, pokud $\omega(t) \notin \Omega_i$. Jestliže náš výchozí systém má vlastnosti ergodicity, $\lim \tau_i/T$, $T \to \infty$, bude mírou okolí Ω_i. Obecně vzato předpoklad o existenci stacionárních řešení není podstatný, stačí, když bude splněna podmínka (6.3), kde za $\bar{\omega}_i$ a ω můžeme považovat řešení systému v různých časových okamžicích a $\omega \in \Omega_i$, $\bar{\omega} \in \Omega_i$.

Hledejme nyní algoritmus výpočtu $\bar{\omega}_i$ z řady pozorovatelných a výše uvedených modelových představ. Při platnosti vztahu (6.3) pro diagnózu klimatických charakteristik můžeme trajektorii systému (5.1) s vyhovující přesností aproximovat zápisem

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\bar{\omega}_i, \tag{6.5}$$

kde $\alpha_i = 1$ pro $\omega(t) \in \Omega_i$ a $\alpha_i = 0$ pro $\omega(t) \notin \Omega_i$. Po časovém vystředování dostaneme

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i\bar{\omega}_i,$$

kde $\bar{\alpha}_i = \lim \tau_i/T$, $T \to \infty$, a pro τ_i platí (6.4). Je známo, že střední doba života trajektorie dynamického systému generovaného rovnicí barotropní atmosféry na kulové ploše v okolí stacionárních bodů je určena charakteristikami jeho stability. Za takové charakteristiky bychom mohli považovat lokální Ljapunovovy exponenty. Avšak protože samotná doba života je hledanou veličinou, lépe nám vyhovují „modifikované“ lokální Ljapunovovy exponenty, které v případě barotropních proudových polí významně korelují s enstrofií toku. Míníme jí integrál čtverce vířivosti. Procedura získání takto pojímaných Ljapunovových exponentů je podrobně popsána např. v [8]. Stručně se o ní zmíníme v oddílu 7. Opírá se o tzv. multiplikativní ergodickou teorii.

Využijme existence takové korelace a zvolme enstrofii stacionárního bodu za parametr určující střední dobu života trajektorie v okolí tohoto bodu. Při rovnosti těchto dvou charakteristik pro $n = 2$ můžeme položit $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)$ a volbou $\varphi' = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)$ dostáváme $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega} + \varphi'$, $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega} - \varphi'$, kde φ' vyhovuje lineární rovnici

$$L(\bar{\psi}, \bar{\omega})\varphi' = 0, \tag{6.6}$$

kde L je operátor úlohy (6.1), linearizovaný vzhledem ke vztahu $(\bar{\omega}, \bar{\psi})$, kde $\Delta\bar{\psi} = \bar{\omega}$.

Ze zápisu (6.6) vyplývá, že při reálných L a φ' bude φ' vlastní funkcí odpovídající nulovému vlastnímu číslu operátoru L^*L (L^* je adjugovaný operátor k L). Můžeme jít ještě dále a prokázat souvislost vlastních funkcí tohoto operátoru s vlastními funkcemi autokorelačních matic (citujeme podle [6]).

Protože naším konečným cílem je ověřit adekvátnost modelu klimatu, tj. identifikaci metrických a topologických invariantů za předpokladu, že máme k dispozici měření jistých signálů ve formě časových řad, pišme $\omega(t_i) \in \mathbb{R}^N$ pro všechna t_i, $i = 0, l$, kde l je dostatečně velké číslo. Naším dalším požadavkem je i nadále volba $n = 2$ (n vystupuje jako mez sčítání v (6.5)). Pak máme $\bar{\omega} = \alpha_1\bar{\omega}_1 + (1 - \bar{\alpha}_1)\bar{\omega}_2$, a spočítáme-li $\bar{\omega}$ z (6.5), dostaneme:

$$\omega(t_i) - \bar{\omega} = \alpha_1(t)(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}) + \alpha_2(t)(\bar{\omega}_2 - \omega).$$

Když nyní položíme $\varphi(t_i) = \omega(t_i) - \bar{\omega}$, $\psi_i(t_i) = \bar{\omega}_i - \bar{\omega}$, dojdeme ke vztahu pro výpočet autokorelační matice

$$\langle \varphi\varphi^T \rangle \equiv C = \left\langle \sum_i \alpha_i\psi_i \sum_j \alpha_j\psi_j^T \right\rangle = \sum_i \bar{\alpha}_i\psi_i\psi_i^T \equiv \sum_i \bar{\alpha}_i M_i. \tag{6.7}$$

Vztah (6.7) je důsledkem platnosti výrazu $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}\bar{\alpha}_i$.Přihlédneme-li k zápisu $\bar{\omega} = \bar{\alpha}_1\bar{\omega}_1 + \bar{\alpha}_2\bar{\omega}_2$ (odpovídá volbě $n = 2$), máme $\bar{\alpha}_1\psi_1 + (1 - \bar{\alpha}_1)\psi_2 = 0$, tj. vektory ψ_1 a ψ_2 jsou lineárně závislé a matice C má hodnost jedna.

Dříve než v našem úsilí o nástin matematické teorie klimatu pokročíme dále, je třeba, abychom si stále uvědomovali, že idea, kterou se snažíme realizovat, spočívá v používání všeobecně přijatých statistických charakteristik — invariantů počítaných z experimentálních dat — pro vytipování cirkulačních režimů. A to za předpokladů, že takové režimy existují.

V tomto duchu předpis $\psi_2 = -\bar{\alpha}_1\psi_1/(1 - \bar{\alpha}_1)$ ukazuje na to, že v bázi tvořené vlastními vektory matice C může být vztah (6.7) přepsán do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} = \frac{\bar{\alpha}_1}{1 - \bar{\alpha}_1} \begin{pmatrix} \varphi_1^2, & \varphi_1\varphi_2 \\ \varphi_1\varphi_2, & \varphi_2^2 \end{pmatrix},$$

kde φ_1, φ_2 jsou Fourierovy koeficienty v rozvoji ψ_1 podle vlastních vektorů matice C. Odtud dostáváme, že $\lambda = \varphi_1^2\bar{\alpha}_1/(1 - \bar{\alpha}_1)$. Jestliže je η vlastní vektor odpovídající číslu λ, pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \bar{\omega} \pm \big(\lambda(1 - \bar{\alpha}_1)/\bar{\alpha}_1\big)^{1/2}\eta, \\ \bar{\omega}_2 &= \bar{\omega} \mp \big(\lambda\bar{\alpha}_1/(1 - \bar{\alpha}_1)\big)^{1/2}\eta. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Nadále předpokládáme, že veličiny $\bar{\omega}$, λ a η jsou známé. Abychom mohli jednoznačně vyřešit (6.8), je třeba zavést jisté doplňující vztahy. Nabízí se nám zde již dříve vzpomenutá vazba mezi enstrofií stacionárních řešení, „modifikovanými“ Ljapunovovými exponenty a střední dobou života trajektorie v okolí stacionárních bodů:

$$\frac{\|\bar{\omega}_1\|^2}{\|\bar{\omega}_2\|^2} = \bar{\alpha}_1^{-1}(1 - \bar{\alpha}_1), \tag{6.9}$$

kde $\|\,.\,\|$ rozumíme normu v prostoru L_2. Právě díky (6.9) je vztah (6.8) uzavřen (dvě rovnice pro dvě proměnné)[4]).

Na základech již postavených můžeme vystavět analýzu regionálních režimů cirkulace atmosféry. Pro tento účel byl vybrán režim zimní cirkulace nad regionem Severního Atlantiku a Evropy, vycházející z měření jistých signálů generovaných atmosférickým systémem. V našem případě šestiměsíční řady výšky hladiny 500 hPa generované modelem všeobecné cirkulace atmosféry, který byl navržen v Institutu aplikované matematiky RAN [6]. Z řady časových údajů této veličiny byly odfiltrovány frekvence odpovídající synoptickým oscilacím ($T < 6$ dnů). Připojený obrázek, na němž jsou zakresleny hladiny 500 hPa odpovídající $\bar{\omega}_1$ ($\bar{\alpha}_1 \cong 0{,}1$) a $\bar{\omega}_2$ ($\bar{\alpha}_2 \cong 0{,}9$), dokumentuje situaci, kdy vytipované cirkulační režimy generované matematickým modelem všeobecné cirkulace atmosféry uspokojivě simulují dobře známé režimy zonálního přenosu a blokování. Rozumíme jím přerušení zonálního proudění (proudění vzduchu přibližně ve směru podél rovnoběžek, obvykle ve směru západ–východ) vysokou a teplou anticyklónou, vytvářející se v malých zeměpisných šířkách, a s tím spojený odklon trajektorie cyklón a anticyklón postupujících v západovýchodním směru (podle [2]).

Připojme krátký komentář k podmínce existence dvou cirkulačních režimů, které jsou spojeny s přítomností izolovaných rezonančních modů v časově vystředované rovnici vorticity (6.1), převzatý z [6]. Položme

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \omega\,\mathrm{d}t, \qquad \hat{\omega} = \lim \tilde{\omega} \ \text{ pro } \ T \to \infty \qquad \text{a} \qquad \omega' = \tilde{\omega} - \hat{\omega}.$$

Pokud T je dostatečně velké, takže ve vystředované rovnici lze zanedbat člen $\partial\tilde{\omega}/\partial t$, pro ω' dostaneme operátorovou rovnici $L(\hat{\psi}, \hat{\omega} + l)\omega' = f$. Při náhodné vnější síle f za jistých dostatečně obecných podmínek se vlastní vektory autokorelační matice $\langle \omega' \omega'^T \rangle$ (předpokládá se, že analýzu provádíme v konečnědimenzionálním prostoru) shodují s vlastními funkcemi operátoru L^*L. Při existenci reálného izolovaného rezonančního modu operátoru L autokorelační matice bude mít jediný vektor s nenulovým vlastním číslem, který se shoduje s tímto modem, a budou splněny nutné podmínky platné pro výše provedenou analýzu. Samotná existence rezonančního modu ještě nezaručuje existenci dvou cirkulačních režimů. Pro matematický model všeobecné cirkulace atmosféry s rezonančním modem (nebo modem blízkým k rezonančnímu)

[4]) V případě úplné symetrie stacionárních bodů ($\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$) platí $(\bar{\omega}, \eta) = 0$, tj. vlastní vektor autokorelační matice odpovídající nenulovému vlastnímu číslu je ortogonální k vektoru středního stavu. Tuto podmínku lze použít při předběžné analýze předpokládané symetrie stacionárních bodů. Platí $0 \leqq \bar{\alpha}_1 \leqq 1$.

veškeré zprůměrované anomální odezvy cirkulace na anomální perturbace budou ležet v podprostoru „navlečeném“ na tento mod. Existence takových modů je potvrzena výsledky studie [9].

7. Dodatek. Lokální Ljapunovovy exponenty barotropní atmosférické cirkulace

V oddílu věnovaném kvazistacionárním režimům atmosférické cirkulace a stacionárním bodům (invariantní míra byla soustředěna na atraktoru v malých okolích stacionárních bodů) jsme se zmínili o tom, že střední doba života trajektorie systému generovaného rovnicí barotropní atmosféry na kulové ploše v okolí stacionárních bodů je určena charakteristikami jejich stability. Řekli jsme, že takovými charakteristikami mohou být lokální Ljapunovovy exponenty. V této souvislosti jsme naznačili, že nejlépe nám budou vyhovovat jejich jisté „modifikace“. Mínili jsme jimi tzv. „akutní“ nebo — jinak řečeno — „okamžité“ Ljapunovovy exponenty, které významně korelují s enstrofií toku. Tou je, jak již víme, integrál čtverce vířivosti (vorticity), tedy veličina $I = \int_D (\nabla\psi)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde integrujeme přes proudovou oblast D. Naším úkolem je tyto exponenty definovat.

Vyjděme z úlohy týkající se autonomního dynamického systému, jehož řešení předložíme ve tvaru

$$\omega(t + \Delta t) = F\bigl(\omega(t)\bigr). \tag{7.1}$$

Jestliže v čase t dojde k perturbaci řešení systému (7.1), pak píšeme $\tilde{\omega}(t) = \omega(t) + \omega'(t)$ a rovnice pro ω' na intervalu $(t, t + \Delta t)$ bude mít tvar

$$\omega'(t + \Delta t) = B(t)\omega'(t), \tag{7.2}$$

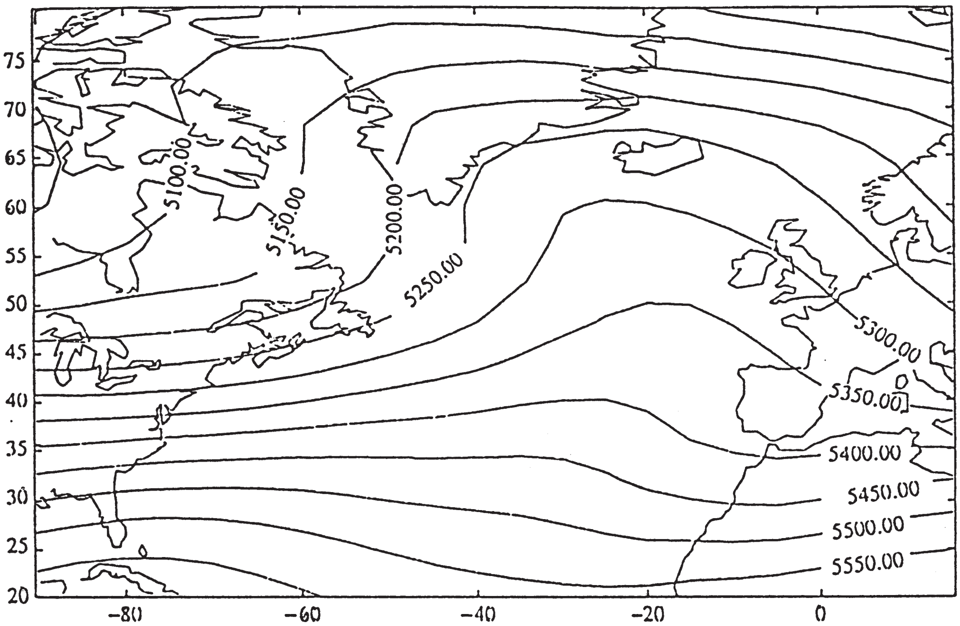
kde $B(t) = \partial B/\partial\omega\big|_{\omega=\omega(t)}$ je lineární operátor. Volme nyní $\Delta t = 1$ a položme

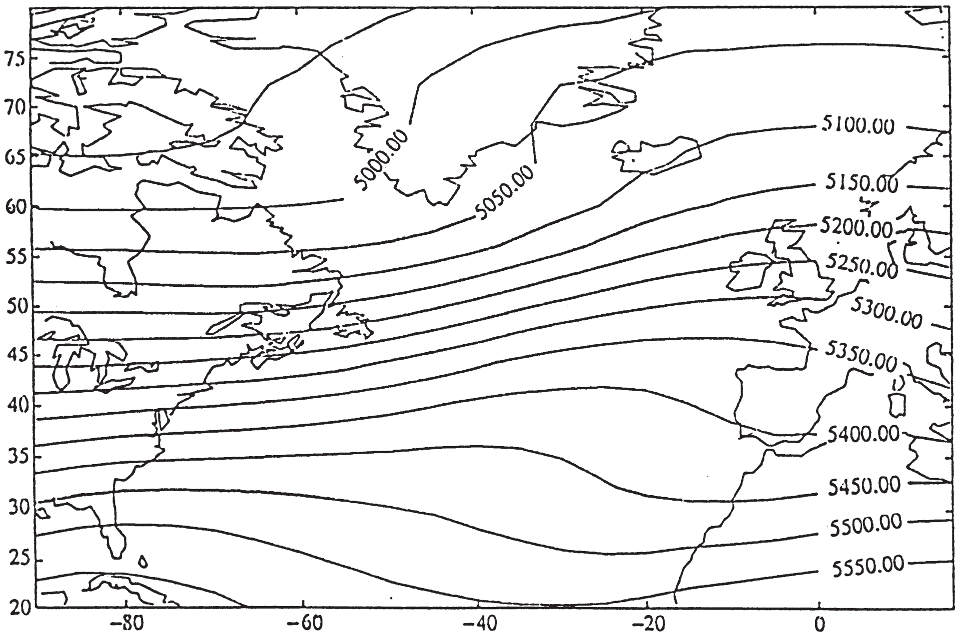
$$M_n = \prod_{k=-n}^{n} B(t_k),$$
$$M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{M_n^* M_n}.$$

Pro Ljapunovovy exponenty systému (7.2) pak platí vztah

$$\lambda_\alpha = \ln \lambda_\alpha(M),$$

v němž $\lambda(M)$ značí vlastní hodnotu matice M. Je známo, že součet kladných Ljapunovových exponentů $\sum_\alpha \lambda_\alpha^+$ se shoduje s Kolmogorovovou K-entropií, tj. veličina $1/\sum_\alpha \lambda_\alpha^+$ udává střední charakteristickou dobu prediktability trajektorie systému





Na horním obrázku je vynesena výška hladiny 500 hPa, odpovídající hodnotě $\bar{\omega}_1$ ($\bar{\alpha}_1 \cong 0{,}1$). Dolní obrázek odpovídá výšce hladiny 500 hPa pro $\bar{\omega}_2$ ($\bar{\alpha}_2 \cong 0{,}9$). Na vodorovnou osu je vynášena zeměpisná šířka [6]. Vyznačené režimy všeobecné cirkulace atmosféry jsou blízké známým režimům typu zonálního přenosu a režimu blokování.

(7.2). Třebaže tyto střední charakteristiky chování trajektorie systému ve fázovém prostoru jsou bezpochyby velmi důležitými ukazateli chování dynamického systému, neméně důležité jsou veličiny popisující stabilitu konkrétní trajektorie v konečném čase $T = n\Delta t$. Dobrý základ pro další počin představuje vztah definující lokální Ljapunovovy exponenty

$$\lambda_\alpha(T,\omega) = \frac{1}{2n} \ln \lambda_\alpha(M_n^* M_n)$$

a $T(\omega) = \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha^+(T,\omega)\right)^{-1}$ je poté střední dobou vzdalování se od sebe (v čase T) původně (v čase t) navzájem k sobě blízkých trajektorií. Za veličinu $\sum_\alpha \lambda_\alpha^+(T,\omega)$ považujeme tzv. index nestability nestacionárního řešení $\omega(t)$ na intervalu T. Jestliže $T = \Delta t$, tj. $n = 1$, lokální Ljapunovovy exponenty nazveme „akutními“ [8].

L i t e r a t u r a

[1] Horák, J., Krlín, L.: *Deterministický chaos a matematické modely turbulence.* Academia, Praha 1997, 444 s.

[2] Sobíšek, B. a kolektiv: *Meteorologický slovník výkladový a teminologický.* MŽP, Praha 1993, 594 s.

[3] Lebowitz, J.: *Moderní ergodická hypotéza.* Čs. čas. fyz. *25* (1975), 219–234.

[4] Brunovský, P.: *Topologická klasifikácia diferenciálnych rovníc a štrukturálna stabilita.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie *18* (1973), 271–281.

[5] Medveď, M.: *Dynamické systémy.* Veda, Bratislava 1988, 253 s.

[6] Dymnikov, V. P., Filatov, A. N.: *O někotorych zadačach matematičeskoj teorii klimatu.* Fizika atmosfery i okeana *31* (1995), 313–323.

[7] Šiška, J.: *Statistické vlastnosti atraktorů dynamických systémů.* Sborník Fyzika a synergetika (eds. Horák, J., Růžička, M.), JČMF, Praha 1989, 209 s.

[8] Dymnikov, V. P., Kazancev, E. V., Charin, V. V.: *Informacionnaja entropija i lokalnyje pokazatěli Ljapunova barotropnoj atmosfernoj cirkuljaciji.* Fizika atmosfery i okeana *28* (1992), 563–573.

[9] Kharin, V.: *The relationship between sea surface temperature anomalies and atmospheric circulation in General Circulation model experiments.* Max-Planck-Institut für Meteorologie. Report No. 136 (1994).