Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Alexandr Fischer
Od funkcí periodických ke skoroperiodickým

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 4, 273--283

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141047`

[KKT95] Karger, D., Klein, P. N., Tarjan, R. E.: *A randomized linear-time algorithm to find minimum spanning trees.* Journal of the ACM *42* (1995), 321–338.

[Kin93] King, V.: *A simpler minimum spanning tree verification algorithm.* Manuscript, 1993.

[KleTar94] Klein, P. N., Tarjan, R. E.: *A randomized linear-time algorithm for finding minimum spanning trees.* Proc. 26th Annual ACM Symp. On Theory of Computing, 1994, p. 9–15.

[Kru56] Kruskal, J. B.: *On the shortest spanning tree of a graph and the travelling salesman problem.* Proc. Amer. Math. Soc. *7* (1956), 48–50.

[Kru97] Kruskal, J. B.: *A reminiscence about shortest spanning subtrees.* Archivum Mathematicum Brno *33* (1997), 13–14.

[MatNeš95] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* KAM Series No. 95-299.

[Mil97] Milková, E.: *Optimalizace, prohledávání a třídění stromů.* Disertační práce, MFF UK, Praha 1997.

[Neš97] Nešetřil, J.: *A few remarks on the history of MST-Problem.* Archivum Mathematicum Brno *33* (1997), 15–22.

[Tar83] Tarjan, R. E.: *Data structures and network algorithms.* Ch. 6, CBMS Regional Conf., SIAM, Philadelphia, 1983.

Od funkcí periodických ke skoroperiodickým

Alexandr Fischer, Praha

1. Úvod

V mnoha technických, ale i čistě teoretických oborech mají důležité postavení periodické funkce reprezentující periodické pohyby nebo periodické procesy. Tyto periodické pochody, zejména astronomické úkazy slunce a měsíce, se staly vlastní lidskému vědění již od pradávna. Snad by se mohlo říci, že pojem periodická funkce v intuitivní podobě je starší než sám pojem funkce.

Množinu všech celých kladných (přirozených) čísel označíme $\mathbb{N}$, množinu všech celých čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$, množinu všech reálných čísel $\mathbb{R}$ a množinu všech komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Doc. RNDr. Alexandr Fischer, CSc. (1933), Strojní fakulta ČVUT v Praze, Ústav technické matematiky, Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2.

2. Periodické funkce

Budeme se zabývat, pokud nebude řečeno jinak, skalárními nebo vektorovými funkcemi definovanými na celé reálné ose $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Řekneme, že reálné číslo ω je *perioda funkce* f, jestliže platí

$$f(t + \omega) = f(t) \quad \text{pro všechna } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Jestliže ω je periodou funkce f, pak pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je číslo $k\omega$ opět periodou funkce f. Funkce f se nazývá *periodická*, jestliže existuje její nenulová perioda. Jestliže f je periodická funkce, pak infimum množiny všech jejích kladných period označíme ω_f a nazveme je primitivní perioda funkce f. *Jestliže f je spojitá periodická funkce, jejíž primitivní perioda ω_f je nulová, pak funkce f je konstantní.* Dokažme to. Protože $\omega_f = 0$, existuje posloupnost $\{\omega_n\}$ kladných period funkce f takových, že $\lim \omega_n = 0$. Jestliže t, t_0 jsou dvě libovolná reálná čísla, pak sestrojme posloupnost reálných čísel $t_n = t_0 + k_n\omega_n$, kde $k_n = [(t - t_0)/\omega_n]$. (Celá část $[r]$ reálného čísla r je celé číslo, pro které platí nerovnosti $[r] \leqq r < [r] + 1$.) Tedy $t_n \leqq t < t_n + \omega_n$ nebo $0 \leqq t - t_n < \omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$, tj. $\lim t_n = t$. Vzhledem k periodicitě funkce f a ke spojitosti funkce f v bodě t dostáváme $f(t) = \lim f(t_n) = \lim f(t_0 + k_n\omega_n) = \lim f(t_0) = f(t_0)$. Z libovolnosti t plyne, že funkce f je konstantní.

Pro nespojitou periodickou funkci uvedené tvrzení neplatí, tj. taková funkce může mít nulovou primitivní periodu, přestože není konstantní. Uvažujme např. Dirichletovu funkci danou předpisem

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \ t \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } \ t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2}$$

Tato funkce je nespojitá v každém bodě $t \in \mathbb{R}$ a zřejmě každé racionální číslo je periodou funkce g, takže $\omega_f = 0$.

Při skládání periodických sil nebo pohybů, což koresponduje se sčítáním odpovídajících periodických funkcí, se ukazuje, že výsledná síla nebo pohyb a tedy i odpovídající výsledná funkce nemusí být periodická. To je možno vidět např. u jednoduchého technického zařízení skládajícího se ze dvou hmot m_1, m_2 připevněných na lineárních pružinách o tuhostech c_1, c_2 a svisle zavěšených za sebou při vhodné volbě hmot m_1, m_2 a tuhostí c_1, c_2. Tak se můžeme dostat k funkci

$$\varphi(t) = \cos t + \cos \pi t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

která je součtem dvou periodických funkcí. Pro $t = 0$ máme $\varphi(0) = 2$. Tuto hodnotu však funkce φ nabývá pouze pro $t = 0$, což ověříme sporem. Nechť existuje $t \neq 0$ takové, že $\varphi(t) = \cos t + \cos \pi t = 2$. To je ale možné jen při $\cos t = 1$ a $\cos \pi t = 1$, takže $t = 2\pi j$ pro nějaké $j \in \mathbb{Z}$ a zároveň $\pi t = 2\pi k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Vzhledem k tomu, že $t \neq 0$, je také $j \neq 0$ a $k \neq 0$. Dostáváme tedy rovnost $\pi = \dfrac{\pi t}{t} = \dfrac{2\pi k}{2\pi j} = \dfrac{k}{j}$, což je však ve sporu s tím, že π je iracionální číslo. Pro $t \neq 0$ je tedy $\varphi(t) < 2$ a *funkce φ není periodická.*

Obdobně je možno ukázat, že spojitá funkce

$$\psi(t) = \sin t + \sin \pi t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

nemůže nabýt hodnotu 2 ani -2. Pomocí Kroneckerovy věty, kterou uvedeme v následujícím odstavci, lze dokázat, že její obor hodnot $\mathcal{R}(\psi)$ je otevřený interval $(-2, 2)$. Protože spojitá periodická funkce definovaná na $\mathbb{R}$ má uzavřený obor hodnot, ani *funkce ψ není periodická.*

3. Kroneckerova věta

Věta (L. Kronecker[1])**.** *Nechť n je přirozené číslo a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a $\theta_1, \dots, \theta_n$ jsou reálná čísla. Soustava (kongruentních) nerovnic*

$$|\lambda_j t - \theta_j| \leqq \delta \pmod{2\pi}, \quad j = 1, \dots, n,$$

má reálné řešení $t = t(\delta)$ při libovolném kladném čísle δ právě tehdy, když z každé rovnosti $\ell_1\lambda_1 + \ldots + \ell_n\lambda_n = 0$, kde $\ell_1, \dots, \ell_n$ jsou celá čísla, plyne (kongruentní) rovnost $\ell_1\theta_1 + \ldots + \ell_n\theta_n = 0 \pmod{2\pi}$. (Zde $|h(t)| \leqq \delta \pmod{2\pi}$ značí, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $|h(t) - 2\pi k| \leqq \delta$, a obdobně $|h(t)| = a \pmod{2\pi}$ značí, že $|h(t) - 2\pi k| = a$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.)

Zvláštní případ je ten, kdy čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou *lineárně nezávislá nad oborem $\mathbb{Z}$*, tj. z každé rovnosti $\ell_1\lambda_1 + \ldots + \ell_n\lambda_n = 0$, kde $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{Z}$, plyne $\ell_1 = \dots = \ell_n = 0$. Nutná a postačující podmínka z Kroneckerovy věty je při lineární nezávislosti čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nad $\mathbb{Z}$ automaticky splněna pro libovolná $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Užitím Kroneckerovy věty na funkci (4) dostáváme, že pro libovolné kladné číslo δ existuje $t = t(\delta) \in \mathbb{R}$ takové, že $|t - \pi/2| \leqq \delta \pmod{2\pi}$, $|\pi t - \pi/2| \leqq \delta \pmod{2\pi}$, protože čísla 1, π jsou lineárně nezávislá nad $\mathbb{Z}$ (π není racionální číslo). To při daném $\delta > 0$ znamená, že pro odpovídající řešení $t = t(\delta) \in \mathbb{R}$ dané soustavy nerovnic platí $|1 - \sin t| = |\sin \pi/2 - \sin t| \leqq |\pi/2 - t - 2\pi k| \leqq \delta$, $|1 - \sin \pi t| = |\sin \pi/2 - \sin \pi t| \leqq |\pi/2 - \pi t - 2\pi l| \leqq \delta$ pro nějaká celá čísla k a l. Vzhledem k libovolnosti $\delta > 0$ to znamená, že funkce ψ nabývá hodnot libovolně blízkých hodnotě 2, ale menších než 2, takže $\mathcal{R}(\psi) = (-2, 2)$, neboť ψ je lichá funkce. Pro funkci (3) obdobným způsobem zjistíme, že $\mathcal{R}(\varphi) = (-2, 2\rangle$.

Ukažme ještě zajímavý aspekt lineární nezávislosti dvou čísel nad $\mathbb{Z}$. *Nechť T, T_0 jsou dvě reálná čísla lineárně nezávislá nad $\mathbb{Z}$.* Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $T > T_0 > 0$. Pro každé kladné číslo ε existuje celočíselná lineární kombinace čísel T, T_0 ležící v intervalu $(0, \varepsilon)$. Položme $k_0 = [T/T_0]$. Platí $k_0 \leqq T/T_0 < k_0 + 1$, tj. $0 \leqq T - k_0T_0 < T_0$. Definujme kladné číslo T_1 předpisem $T_1 = \min\{T - k_0T_0, (k_0 + 1)T_0 - T\}$. Protože pro dvě libovolná kladná čísla a, b platí $\min\{a, b\} \leqq (a + b)/2$, dostáváme nerovnost $0 < T_1 \leqq T_0/2$, neboť $(T - k_0T_0) + \big((k_0 + 1)T_0 - T\big) = T_0$. Číslo T_1 je celočíselná lineární kombinace čísel T, T_0, tudíž se

[1]) Leopold Kronecker (1823–1891) — německý matematik.

nemůže, díky lineární nezávislosti T, T_0 nad $\mathbb{Z}$, rovnat $T_0/2$, takže platí $0 < T_1 < T_0/2$. Nyní induktivně definujeme posloupnost $\{T_n\}$ celočíselných lineárních kombinací čísel T, T_0 předpisem $T_{n+1} = \min\{T_{n-1} - k_n T_n, (k_n+1)T_n - T_{n-1}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Platí nerovnost $0 < T_{n+1} < T_n/2 < \cdots < T_0/2^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Posloupnost $\{T_n\}$ je klesající a konverguje k nule, takže pro libovolně zadané kladné číslo ε existuje takové reálné číslo n_ε, stačí volit $n_\varepsilon = \big(\ln(T_0/\varepsilon)\big)/\ln 2$, že pro všechna $n \geqq n_\varepsilon$ platí $0 < T_n < T_0/2^n \leqq \varepsilon$. Jestliže $a \in \mathbb{R}$ a ε je libovolně zadané kladné číslo, pak při $n \geqq \big(\ln(T_0/\varepsilon)\big)/\ln 2$ platí nerovnost $|a - kT_n| < T_n < T_0/2^n \leqq \varepsilon$, kde $k = [a/T_n]$. To znamená, že *množina všech celočíselných lineárních kombinací čísel T, T_0 je hustá v $\mathbb{R}$.*

Kroneckerova věta je významným nástrojem teorie skoroperiodických funkcí. Pomocí ní jsou např. odvozeny aritmetické vlastnosti prvků ze spektra skoroperiodické funkce. Důkaz Kroneckerovy věty je možno najít v publikacích [1], [17], [21], [22].

4. Skoroperiodické funkce

Uvedené nedostatky prostoru periodických funkcí se matematici snažili odstranit zobecněním pojmu periodická funkce. Takové snahy se objevily již na přelomu 19. a 20. století v pracích P. Bohla [3], [4] a E. Esclangona [10]–[15], kteří se zabývali tzv. kvaziperiodickými funkcemi zobecňujícími periodické funkce a tvořícími lineární prostor, který však není uzavřený vzhledem ke stejnoměrné konvergenci na $\mathbb{R}$. Snahy o zobecnění pojmu periodické funkce byly plně korunovány úspěchem v polovině dvacátých let našeho století (1925, 1926), kdy dánský matematik Harald Bohr publikoval svoji teorii skoroperiodických funkcí [5], které zobecňují spojité periodické funkce a tvoří lineární prostor, uzavřený vzhledem ke stejnoměrné konvergenci na $\mathbb{R}$ a zahrnující i kvaziperiodické funkce.

Harald Bohr žil v letech 1887–1951. Byl synem fyziologa a jeho starší bratr fyzik Niels Bohr se stal nositelem Nobelovy ceny. Harald Bohr byl také sportovcem a stal se členem olympijského fotbalového týmu Dánska, který se umístil na 2. místě na OH 1908. Jeho učitelem a později i přítelem byl H. Lebesgue. Když obhajoval svoji doktorskou disertační práci, většinu publika tvořili fotbaloví fanoušci. V roli profesora byl H. Bohr u studentů velmi oblíben. Zde uplatnil i své literární záliby a jako milovník Dickense, Goetha a Schillera byl inspirujícím přednášejícím. Na počest jeho šedesátých narozenin složili studenti kantátu.

H. Bohr přispěl ve svých pracích k teorii sumability Dirichletových řad a vytvořil významnou práci o θ-funkci. Jeho největším dílem je však teorie skoroperiodických funkcí, která je matematickou raritou jakožto ucelená teorie vytvořená jediným matematikem. Bohrova teorie zahrnující i harmonickou analýzu byla rozvíjena mnoha významnými matematiky; takovými jsou např. H. Weyl, C. de la Vallée-Poussin, S. Bochner, V. V. Stěpanov, N. Wiener, J. von Neumann, A. Besicovich, J. Favard, J. Delsarte, W. Maak, N. N. Bogoljubov, B. M. Levitan a další. Ale prakticky všechny hlavní výsledky Bohrovy teorie byly poprvé získány H. Bohrem samotným, i když některé jeho důkazy byly později zjednodušeny.

K vyslovení definice (Bohrovy) skoroperiodické funkce potřebujeme zobecnění dvou vlastností period periodických funkcí.

Definice 1. Nechť f je komplexní funkce definovaná na $\mathbb{R}$ a nechť ε je kladné číslo. Řekneme, že reálné číslo τ je *ε-skoroperioda funkce f*, jestliže platí

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leqq \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Samotné zobecnění periody na ε-skoroperiodu nevede k rozumnému rozšíření pojmu spojité periodické funkce. Všimněme si zde jednoho ze zásadních rozdílů mezi nenulovou periodou ω a nenulovou ε-skoroperiodou τ funkce f, $\varepsilon > 0$. Nenulová perioda ω zaručuje, že každý její celočíselný násobek je opět perioda funkce f, kdežto existence nenulové ε-skoroperiody τ nezaručuje, že každý její celočíselný násobek kromě násobků 0τ a $(-1)\tau$ je ε-skoroperioda funkce f. Že 0τ je ε-skoroperioda, je zřejmé a pro $(-1)\tau$ totéž plyne ze vztahu $|f(t-\tau) - f(t)| = |f\big((t-\tau)+\tau\big) - f(t-\tau)| \leqq \varepsilon$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Důsledkem je, že třída všech komplexních funkcí spojitých a definovaných na $\mathbb{R}$ takových, že pro každou z nich k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje nenulová ε-skoroperioda, je příliš široká. Obsahuje např. všechny stejnoměrně spojité komplexní funkce definované na $\mathbb{R}$, což nezaručuje ani jejich omezenost na $\mathbb{R}$. Například neomezená je funkce $f(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$, která do této třídy patří. Taková funkce však nereprezentuje žádný kmitavý pohyb a nemůže sloužit jako zobecnění periodické funkce. Proto je pro zobecnění periodické funkce třeba tuto třídu podstatně zúžit. K tomu účelu H. Bohr zavedl pojem relativně hustá množina.

Definice 2. Řekneme, že neprázdná množina $\mathcal{M}$ reálných čísel je *relativně hustá* (v $\mathbb{R}$), jestliže existuje kladné číslo ℓ, tzv. zahrnující délka (relativní hustoty množiny $\mathcal{M}$), takové, že pro každé reálné číslo a je průnik $\langle a, a+\ell\rangle \cap \mathcal{M}$ neprázdný. (Jestliže ℓ je zahrnující délka, pak každé $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}$, pro které platí $\tilde{\ell} > \ell$, je rovněž zahrnující délka.)

Pojmy z definic 1 a 2 použil H. Bohr pro vyslovení definice skoroperiodické funkce.

Definice 3. Řekneme, že komplexní spojitá funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ je *(Bohrova) skoroperiodická funkce*, jestliže pro každé kladné číslo ε je množina $T(f,\varepsilon)$ všech ε-skoroperiod funkce f relativně hustá.

Zřejmě každá spojitá periodická funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ je skoroperiodická. Pro každé kladné číslo ε všechny její periody jsou jejími ε-skoroperiodami a libovolná její kladná perioda je zahrnující délkou funkce f.

Snadno se ověří, že každá skoroperiodická funkce je omezená a stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$. Dále lze ukázat, že součet a součin dvou skoroperiodických funkcí je opět skoroperiodická funkce. Již definované funkce (3) a (4) nejsou periodické, ale jsou skoroperiodické jako součty dvou periodických funkcí. Rovněž limita posloupnosti skoroperiodických funkcí stejnoměrně konvergujících na $\mathbb{R}$ je skoroperiodická funkce.

Prostor všech komplexních skoroperiodických funkcí definovaných na $\mathbb{R}$, který je označován symbolem $AP(\mathbb{C})$ (z anglického almost periodic), je tedy uzavřeným podprostorem lineárního prostoru všech spojitých omezených funkcí na $\mathbb{R}$ se supremální normou. $AP(\mathbb{C})$ je tudíž Banachovým prostorem s normou

$$\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|. \tag{6}$$

Velmi snadno se ověří, že absolutní hodnota $|f|$ skoroperiodické funkce f je opět skoroperiodická funkce, neboť pro každé $\varepsilon > 0$, $\tau \in T(f,\varepsilon)$ a $t \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $\big||f(t+\tau)| - |f(t)|\big| \leqq |f(t+\tau) - f(t)| \leqq \varepsilon$, tj. $T(f,\varepsilon) \subset T(|f|,\varepsilon)$, takže $T(|f|,\varepsilon)$ je relativně hustá množina.

5. Normální funkce

Významnou postavou v historii a teorii skoroperiodických funkcí je Salomon Bochner. Narodil se r. 1899 v Krakově, v tehdejším Rakousko-Uhersku, studoval ve Varšavě a doktorát získal na univerzitě v Berlíně r. 1921 prací o ortogonálních soustavách komplexních analytických funkcí. Tuto práci oponoval Erhard Schmidt. V letech 1924–1933 Bochner přednášel na univerzitě v Mnichově. V roce 1933 odchází z Německa na univerzitu v Princetonu v USA a působí tam až do svého penzionování v roce 1968, kdy odchází na univerzitu v Rice. Bochnerovy práce zasahují mnoho matematických oborů od komplexních funkcí, theta funkce, teorie distribucí, Fourierových integrálů a řad, teorie skoroperiodických funkcí, zejména pak harmonické analýzy, teorie míry a integrálu až po teorii pravděpodobnosti a historii a filozofii matematiky. Zemřel r. 1982 v Houstonu ve státě Texas v USA.

Již v roce 1927 přispívá Salomon Bochner k teorii skoroperiodických funkcí Haralda Bohra. H. Bohr stavěl na zobecnění period na skoroperiody a periodického rozložení period na relativně husté rozložení skoroperiod (v $\mathbb{R}$). S. Bochner zobecnil jinou vlastnost spojitých periodických funkcí: nechť f je komplexní spojitá periodická funkce definovaná na $\mathbb{R}$ mající kladnou periodu ω. Jestliže h je reálné číslo, pak funkci f_h danou předpisem $f_h(t) = f(t+h)$, $t \in \mathbb{R}$, nazýváme h-posunem nebo jen posunem funkce f. Jestliže $\{\alpha_n\}$ je libovolně daná posloupnost reálných čísel, pak ke každému přirozenému číslu n existuje celé číslo k_n takové, že $\alpha_n + k_n\omega \in \langle 0,\omega\rangle$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\lim(\alpha_n + k_n\omega) = \alpha_0$. Posloupnost α_n-posunů funkce f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ díky ω-periodicitě a stejnoměrné spojitosti funkce f na $\langle 0,\omega\rangle$, a tedy i na $\mathbb{R}$. Právě tuto vlastnost spojitých periodických funkcí S. Bochner zobecnil.

Definice 4. Řekneme, že komplexní funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ je *normální,* jestliže každá posloupnost $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ obsahuje takovou podposloupnost $\{\alpha_{n_k}\}$, že posloupnost α_{n_k}-posunů funkce f stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$.

Zřejmě každá komplexní spojitá periodická funkce je normální. Nespojité periodické funkce nemusí být normální. Uvažujme opět Dirichletovu funkci g danou předpisem (2), pro kterou každé racionální číslo je její periodou, takže g je periodická funkce nespojitá v každém bodě $t \in \mathbb{R}$. Ukažme, že g *není normální funkce.* Rozložíme $\mathbb{R}$ na třídy $A(r) = \{r + q : q \in \mathbb{Q}\}$, kde $r \in \mathbb{R}$. Tyto třídy jsou navzájem buď disjunktní, nebo totožné a jsou spočetné, takže navzájem disjunktních tříd je nespočetně mnoho. Při $r \in \mathbb{R}$ je posun $g(t+r) = 1$ pro $t \in A(-r)$ a $g(t+r) = 0$ pro $t \notin A(-r)$. Nyní vezmeme libovolnou posloupnost $A(r_n)$, $n = 1,2,\ldots$, navzájem disjunktních tříd. Posloupnost $g_n(t) = g(t+r_n)$, $t \in \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$, posunů funkce g neobsahuje žádnou podposloupnost stejnoměrně konvergující na $\mathbb{R}$. Platí totiž

$$|g_{n+p}(t) - g_n(t)| = |g(t + r_{n+p}) - g(t + r_n)| = |1 - 0| = 1 \quad \text{pro } t \in A(-r_{n+p}),$$
$$|g_{n+p}(t) - g_n(t)| = |g(t + r_{n+p}) - g(t + r_n)| = |0 - 1| = 1 \quad \text{pro } t \in A(-r_n)$$

pro libovolná přirozená čísla n, p. Periodická funkce g tedy není normální.

Víme již, že každá spojitá periodická funkce definovaná na $\mathbb{R}$ je normální, platí však mnohem více.

Věta (Bochnerovo kritérium). *Komplexní spojitá funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ je (Bohrova) skoroperiodická funkce právě tehdy, když f je normální funkce.*

Zde dokážeme pouze nutnost, tj. že každá skoroperiodická funkce je normální. Nechť f je skoroperiodická funkce a $\{\alpha_n\}$ je libovolně daná posloupnost reálných čísel. Jestliže $m \in \mathbb{N}$, pak vzhledem ke stejnoměrné spojitosti funkce f existuje kladné číslo δ_m takové, že pro dvě libovolná reálná čísla t, t', pro která $|t - t'| \leqq \delta_m$, platí $|f(t) - f(t')| \leqq 1/m$. Množina $T(f, 1/m)$ všech $(1/m)$-skoroperiod $\tau(1/m)$ funkce f je relativně hustá s nějakou pevně vzatou zahrnující délkou $\ell(1/m)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $T(f, 1/m)$ obsahuje skoroperiodu $\tau_n(1/m)$ takovou, že $\alpha_n + \tau_n(1/m) \in \langle 0, \ell(1/m)\rangle$. Vzhledem k omezenosti posloupnosti $\{\alpha_n + \tau_n(1/m)\}$ existuje její konvergentní podposloupnost $\{\alpha_{n_k,m} + \tau_{n_k,m}\}$, jejíž limitu označíme α_{0m} a o které můžeme předpokládat, že $\{\alpha_{n_k,m} + \tau_{n_k,m}\} \subset \langle \alpha_{0m} - \delta_m/2,\, \alpha_{0m} + \delta_m/2\rangle$, čehož můžeme vždy dosáhnout případným vypuštěním dostatečného počtu prvních členů podposloupnosti. To ale znamená, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} |f(t + \alpha_{n_k,m}) - f(t + \alpha_{n_l,m})| &\leqq |f(t + \alpha_{n_k,m}) - f(t + \alpha_{n_k,m} + \tau_{n_k,m})| + \\ &+ |f(t + \alpha_{n_k,m} + \tau_{n_k,m}) - f(t + \alpha_{n_l,m} + \tau_{n_l,m})| + \\ &+ |f(t + \alpha_{n_l,m} + \tau_{n_l,m}) - f(t + \alpha_{n_l,m})| \leqq \frac{3}{m} \quad \text{při libovolných } k, l \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Jestliže budeme takto postupně sestrojovat posloupnosti $\{\alpha_{n_k,m}\}$ s podmínkami

$$\{\alpha_{n_k,m+1}\} \subset \{\alpha_{n_k,m}\}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

pak užitím Cantorovy diagonální metody sestrojíme posloupnost $\{\alpha'_m\} = \{\alpha_{n_m,m}\} \subset \subset \{\alpha_n\}$. Pro tuto posloupnost platí

$$|f(t + \alpha'_{m+p}) - f(t + \alpha'_m)| \leqq \frac{3}{m}$$

při libovolném $t \in \mathbb{R}$ a při libovolném $m, p \in \mathbb{N}$, takže podposloupnost $\{f(t + \alpha'_m)\}$ posloupnosti $\{f(t + \alpha_n)\}$ posunů funkce f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Vzhledem k libovolnosti posloupnosti $\{\alpha_n\}$ je skoroperiodická funkce f normální. (Tento důkaz pochází od autora článku.) Důkaz postačitelnosti, tj. že spojitá normální funkce je skoroperiodická, je možno najít např. v publikacích [21], [22].

Pomocí Bochnerova kritéria se snadno ukáže, že *součet* nebo *součin dvou skoroperiodických funkcí je opět skoroperiodická funkce.* Nechť jsou libovolně dány dvě skoroperiodické funkce f, g a číselná posloupnost $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$. Funkce f, g jsou normální, takže existuje podposloupnost $\{\alpha'_n\}$ posloupnosti $\{\alpha_n\}$ taková, že posloupnost $\{f(t+\alpha'_n)\}$ posunů funkce f stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$, a existuje podposloupnost $\{\alpha''_n\}$ posloupnosti $\{\alpha'_n\}$ taková, že posloupnosti $\{g(t+\alpha''_m)\}$ posunů funkce g a $\{f(t+\alpha''_n)\}$ posunů funkce f stejnoměrně konvergují na $\mathbb{R}$. To ale znamená, že také posloupnosti $\{f(t+\alpha''_n)+g(t+\alpha''_n)\}$ a $\{f(t+\alpha''_n)\, g(t+\alpha''_n)\}$ stejnoměrně konvergují na $\mathbb{R}$. Funkce $f+g$ a fg jsou normální, a tudíž i skoroperiodické. (Důkaz těchto tvrzení je značně jednodušší než důkaz pomocí původní Bohrovy definice skoroperiodické funkce.)

Není obtížné definovat vektorové skoroperiodické funkce obdobným způsobem, jako jsou definovány skalární skoroperiodické funkce. Pomocí Bochnerova kritéria se snadno ukáže, že nutná a postačující podmínka pro skoroperiodicitu spojité komplexní vektorové funkce definované na $\mathbb{R}$ je, aby všechny její souřadnice byly skalární skoroperiodické funkce.

Skoroperiodické funkce jsou v mnohém podobné spojitým periodickým funkcím, ale mohou mít některé vlastnosti nečekaně odlišné. To jsme viděli např. u funkce φ definované vzorcem (3). V článku [19] je dokonce zkonstruována prostá vektorová skoroperiodická funkce, tj. taková funkce, která nabývá každou svoji funkční hodnotu pouze jednou.

6. Harmonická analýza

Jestliže funkce $f \in AP(\mathbb{C})$, pak číslo

$$M(f) = M_t\{f(t)\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

které existuje stejnoměrně vzhledem k $a \in \mathbb{R}$ (tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $T_\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $T \geqq T_\varepsilon$ a všechna $a \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$\left| M(f) - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon\,),$$

nazveme *střední hodnota funkce* f.

Bohrovou transformací skoroperiodické funkce f se nazývá komplexní funkce

$$a(\lambda) = a(\lambda, f) = M_t\{f(t)\exp(-\mathrm{i}\lambda t)\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Kromě označení e^s pro hodnotu exponenciály v bodě s užíváme rovněž označení $\exp(s)$.)

Číslo $\lambda \in \mathbb{R}$, pro které je $a(\lambda)$ nenulové, se nazývá *Fourierův exponent* a $a(\lambda)$ *Fourierův koeficient* funkce f. Pro každý Fourierův koeficient $a(\lambda, f)$ funkce f platí nerovnost $|a(\lambda, f)| \leqq \|f\|$ (norma f je definována v (6)).

Množinu všech Fourierových exponentů funkce f označíme Λ_f a množinu $\mathrm{i}\Lambda_f = \{\mathrm{i}\lambda : \lambda \in \Lambda_f\}$ nazveme *spektrum* funkce f. Jestliže f je nulová funkce, pak $\Lambda_f = \emptyset$.

Trigonometrická řada

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_f} a(\lambda, f)\exp(\mathrm{i}\lambda t), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

se nazývá *Fourierova řada* skoroperiodické funkce f a je jednoznačně určena až na pořadí sčítání.

7. Trigonometrický polynom

Nechť jsou dána navzájem různá reálná čísla $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ a nenulová komplexní čísla $b_1,\dots,b_N$, kde $N\in\mathbb{N}$. Funkci Q definovanou předpisem

$$Q(t) = b_1\exp(\mathrm{i}\lambda_1 t) + \dots + b_N\exp(\mathrm{i}\lambda_N t), \quad t\in\mathbb{R},$$

nazýváme *trigonometrický polynom.* Počet nenulových čísel mezi čísly $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ určuje tzv. stupeň polynomu Q.

Každý trigonometrický polynom je skoroperiodická funkce. Fundamentální věta teorie skoroperiodických funkcí, tzv. aproximační věta, říká, že *množina všech trigonometrických polynomů je hustá v* $AP(\mathbb{C})$ (tj. její uzávěr vzhledem ke stejnoměrné konvergenci na $\mathbb{R}$ je roven $AP(\mathbb{C})$). Dokonce jestliže Λ je neprázdná množina reálných čísel a $B(\Lambda)$ označuje podprostor prostoru $AP(\mathbb{C})$ tvořený všemi skoroperiodickými funkcemi f, pro které $\Lambda_f\subset\Lambda$, pak množina všech trigonometrických polynomů z $B(\Lambda)$ je hustá v $B(\Lambda)$. Znamená to, že pro každou funkci $f\in AP(\mathbb{C})$ a libovolné $\varepsilon>0$ existuje trigonometrický polynom Q_ε takový, že

$$\Lambda_{Q_\varepsilon}\subset\Lambda_f \quad \text{a} \quad \|f-Q_\varepsilon\|\leqq\varepsilon. \tag{8}$$

Příkladem takových trigonometrických polynomů jsou tzv. Bochnerovy-Fejérovy aproximační polynomy. Jestliže skoroperiodická funkce f má Fourierovu řadu (7) a jestliže Q_ε je její Bochnerův-Fejérův aproximační polynom s vlastnostmi (8), pak $a(\lambda, Q_\varepsilon) = r(\lambda,\varepsilon)\,a(\lambda, f)$, kde $r(\lambda,\varepsilon)\in\mathbb{Q}$, $0\leqq r(\lambda,\varepsilon)\leqq 1$ a $\lim r(\lambda,\varepsilon)=1$ pro $\varepsilon\to 0+$. Aniž bychom tyto polynomy blíže specifikovali, uvedeme některé aritmetické vlastnosti spekter skoroperiodických funkcí, na kterých je založena konstrukce Bochnerových-Fejérových aproximačních trigonometrických polynomů a rovněž Bochnerovo-Fejérovo sčítání Fourierových řad skoroperiodických funkcí.

Nechť je dána neprázdná konečná nebo spočetná množina $\{\beta_j\}\subset\mathbb{R}$. Řekneme (podobně jako jsme v odst. 3 definovali množinu lineárně nezávislou nad $\mathbb{Z}$), že množina $\{\beta_j\}$ je *lineárně nezávislá nad* $\mathbb{Q}$, jestliže z každé rovnosti $q_1\beta_1+\dots+q_n\beta_n=0$, kde $n\in\mathbb{N}$, $q_1,\dots,q_n\in\mathbb{Q}$, plyne $q_1=\dots=q_n=0$. Řekneme, že množina $\{\beta_j\}$ lineárně nezávislá nad $\mathbb{Q}$ je *bazí* neprázdné množiny $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}$, jestliže ke každému $\lambda\in\mathcal{M}$ existuje $n\in\mathbb{N}$ a $q_1,\dots,q_n\in\mathbb{Q}$ takové, že $\lambda=q_1\beta_1+\dots+q_n\beta_n$.

Věta. *Ke každé neprázdné konečné nebo spočetné množině* $\{\lambda_k\}\subset\mathbb{R}$ *obsahující alespoň jedno nenulové číslo existuje její baze* $\{\beta_j\}\subset\{\lambda_k\}$.

Větu stačí ověřit jen pro spočetnou množinu $\{\lambda_k\}$ (konečnou množinu doplníme nulami na posloupnost). Za β_1 volíme první nenulové λ_k a vypustíme z $\{\lambda_k\}$ všechna λ, pro která $q_1\beta_1 + q\lambda = 0$, kde $q_1, q \in \mathbb{Q}$ a $q \neq 0$. Označme β_2 první nevypuštěné číslo z $\{\lambda_k\}$ a vypustíme dále všechna $\lambda \in \{\lambda_k\}$, pro která $q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + q\lambda = 0$, kde $q_1, q_2, q \in \mathbb{Q}$ a $q \neq 0$. Takto postupně vytvoříme bazi $\{\beta_j\}$ množiny $\{\lambda_k\}$. Tato baze může být konečná nebo spočetná. Množina $\{\lambda_k\}$ může mít nekonečně mnoho bazí, ale výše konstruovaná baze $\{\beta_j\}$ je určena jednoznačně. Mohli bychom také definovat analogickým způsobem bazi $\{\beta_j\}$ nejvýše spočetné množiny $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ nad $\mathbb{Z}$. Takovou bazi nazveme *celou bazí*, ale její existence není zaručena. Skoroperiodická funkce f, pro kterou Λ_f má konečnou celou bazi, se nazývá *kvaziperiodická*. Takovými funkcemi se zabývali P. Bohl a E. Esclangon.

Řekneme, že skoroperiodická funkce f má *jednobodovou bazi*, jestliže Λ_f má jednobodovou bazi. Každá nekonstantní spojitá periodická funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ má jednobodovou bazi $\{2\pi/\omega_f\}$, která však nemusí být celá. Existují však i neperiodické skoroperiodické funkce s jednobodovou bazí. Například funkce $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \exp(2^{-n}t)$, $t \in \mathbb{R}$, která je součtem řady stejnoměrně konvergující na $\mathbb{R}$, jejíž n-tý částečný součet je periodická funkce s primitivní periodou $\omega_n = 2^{n+1}\pi$, $n = 1, 2, \dots$ Funkce f však není periodická, neboť $\lim \omega_n = \infty$. (To plyne z teorému 5.8 a 5.9 v [18].) Pro f je $\Lambda_f = \{1/2, 1/4, \dots, 1/2^n, \dots\}$, která má např. jednobodovou bazi $\{1\}$.

Mezi techniky, ale i matematiky a fyziky se někdy objevuje názor, že zavedení skoroperiodických funkcí je nepotřebné a že postačí uvažovat pouze spojité periodické funkce definované na $\mathbb{R}$, pomocí nichž je možno každou skoroperiodickou funkci na libovolném omezeném intervalu stejnoměrně aproximovat s libovolnou přesností. Dnes ovšem existují zařízení s nepřetržitým provozem a navíc je možno za takový nepřetržitý provoz považovat i pohyb nebeských těles. Z tohoto hlediska je třeba opustit hypotézu o stejnoměrné konvergenci na omezeném intervalu ve prospěch studia možností stejnoměrné konvergence na $\mathbb{R}$. V článku [19] je ukázáno, že třída skoroperiodických funkcí, které je možno aproximovat stejnoměrně na $\mathbb{R}$ spojitými periodickými funkcemi s libovolnou přesností, tvoří poměrně úzkou třídu skoroperiodických funkcí s jednobodovou bazí. To ukazuje na význačné a nezastupitelné postavení skoroperiodických funkcí.

8. Závěr

V roce 1933 publikoval Salomon Bochner významnou práci [7], rozšiřující teorii skoroperiodických funkcí na abstraktní funkce s oborem hodnot v Banachově prostoru. Bochnerova definice abstraktní skoroperiodické funkce v sobě zahrnuje i některá zobecnění Bohrových skoroperiodických funkcí definovaná jinými matematiky.

Teorie skoroperiodických funkcí byla rovněž silným podnětem pro rozvoj skoroperiodických funkcí na grupách a jejich harmonické analýzy ([8]).

V posledních letech je rozvoj skoroperiodických funkcí spojen s úlohami diferenciálních rovnic, s teorií stability a dynamickými soustavami. Jde tu nejen o obyčejné diferenciální rovnice a klasické dynamické soustavy, ale i o široké třídy parciálních a abstraktních rovnic v Banachově prostoru. Důležité postavení mají v tomto směru práce L. Ameria a jeho školy, rozšiřující některé klasické výsledky J. Favarda, S. Bochnera, J. von Neumanna a S. L. Soboleva na skoroperiodická řešení diferenciálních rovnic v Banachově prostoru v silném i slabém smyslu.

Na téma tohoto příspěvku se uskutečnila přednáška 16. 11. 1999 na semináři Dějiny matematiky (SEDM).

Literatura

[1] Amerio, L., Prouse, G.: *Almost periodic functions and functional equations.* Van Nostrand Reihold Company, New York 1971.
[2] Besicovich, A. S.: *Almost periodic functions.* Cambridge Univ. Press 1932.
[3] Bohl, P.: *Über die Darstellung von Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen mit mehrerer einer Variablen proportialen Argumenten.* (Doktorská disertační práce.) Dorpat 1893.
[4] Bohl, P.: *Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie.* Crelles Journ. *131* (1906), 268–321.
[5] Bohr, H.: *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.* Acta Math. *45* (1925), 29–127, *46* (1925), 101–214, *47* (1926), 237–281.
[6] Bochner, S.: *Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.* Math. Ann. *96* (1927), 119–147.
[7] Bochner S.: *Abstrakte fastperiodischen Funktionen.* Acta Math. *61* (1933), 149–184.
[8] Bochner, S., von Neumann, J.: *Almost periodic functions in a group, II.* Trans. Amer. Math. Soc. *37* (1935), 21–50.
[9] Corduneanu, C.: *Almost periodic functions.* Wiley Interscience, New York 1968.
[10] Esclangon, E.: *Sur les extensions de la notion de périodicité.* C. R. Acad. Sci. Paris (1902).
[11] Esclangon, E.: *Les fonctions quasi-périodiques.* (Thèse.) Paris 1904.
[12] Esclangon, E.: *Sur les integrales quasi-périodiques d'équations différentielles linéaires.* C. R. Acad. Sci. Paris *158* (1914), 1254–1256.
[13] Esclangon, E.: *Sur les intégrales bornées d'une équation différentielle linéaire.* C. R. Acad. Sci. Paris *160* (1915), 475–478.
[14] Esclangon, E.: *Sur les integrales quasi-périodiques d'une équation différentielle.* C. R. Acad. Sci. Paris *160* (1915), 652–653, 488–489.
[15] Esclangon, E.: *Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques.* Ann. de l'Observ. de Bordeaux (1919).
[16] Favard, J.: *Leçons sur les fonctions presque périodiques.* Gauthiers Villars, Paris 1933.
[17] Fink, A. M.: *Almost periodic differential equations.* Lecture Notes in Mathematics, Springer, New York 1978.
[18] Fischer, A.: *Structure of Fourier exponents of almost periodic functions and periodicity of almost periodic functions.* Mathematica Bohemica *121* (1996), 249–262.
[19] Fischer, A.: *Approximation of almost periodic functions by periodic ones.* Czechoslovak Math. J. *48* (1998), 193–205.
[20] Fischer, A.: *Od periodických funkcí ke skoroperiodickým, Normální funkce.* Sborník (3. ročníku) semináře Matematika na vysokých školách, Herbertov 6. – 8. 9. 1999, JČMF a ČVUT 1999, 57–58, 59–60.
[21] Levitan, B. M.: *Počti-periodičeskije funkcii.* GIZTL, Moskva 1953.
[22] Levitan, B. M., Žikov, V. V.: *Počti–periodičeskije funkcii i differencial'nyje uravněnija.* IMU, Moskva 1978.