Antonín Sochor

Petr Vopěnka (*16. 5. 1935)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 2, 125--134

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141028`

Petr Vopěnka

* 16. 5. 1935

Antonín Sochor a kolektiv, Praha

Ve svém neobyčejně bohatém a plodném životě se P. Vopěnka věnoval přinejmenším pěti tematickým okruhům: (a) topologii, (b) klasické axiomatické teorii množin, (c) neklasické teorii množin, (d) filosofii a historii matematiky, (e) české společnosti. V každém z těchto oborů dosáhl významných výsledků. Výsledky týkající se matematiky jsou světově uznávány a ceněny a posunuly lidské poznání o značný kus cesty kupředu. Přitom je velice významné, že P. Vopěnka nekráčel jednoduchými a prošlapanými cestami, ale hledal a nalézal nové a zcela originální přístupy, a to jak v matematice, tak také v pojetí její historie. Matematické okruhy je možno časově vymezit tak, že následují za sebou. Zbývající okruhy se pochopitelně s nimi časově překrývají.

P. Vopěnka se narodil 16. května 1935 v Praze. Oba jeho rodiče byli středoškolskými učiteli matematiky. Studoval nejprve na gymnáziu v Ledči nad Sázavou (1946–1953), poté na Matematicko-fyzikální fakultě UK v letech 1953–1958. Na této fakultě pak pedagogicky a vědecky působil a působí až do současnosti.

Již během svého studia se začíná P. Vopěnka zabývat topologií. Byl posledním diplomantem jednoho z nejvýznamnějších českých matematiků — Eduarda Čecha. Není tedy divu, že jeho první dvě práce se týkají topologie, a to teorie dimenze. Nejznámějším Vopěnkovým výsledkem v topologii je konstrukce kompaktních Hausdorffových prostorů $X_{m,n}$ a $Y_{m,n}$ pro $0 < m \leqq n \leqq \infty$ takových, že $\dim X_{m,n} = m$, $\operatorname{ind} X_{m,n} = n$, $\dim Y_{m,n} = m$, $\operatorname{Ind} Y_{m,n} = n$. Tím definitivně zodpověděl otázku o chování dimenzních funkcí na kompaktních prostorech [1]. Další článek z obecné topologie [36] publikoval teprve po letech. Avšak Vopěnkovo topologické vzdělání poznamenalo jeho přístup k metodě forcingu, jak uvidíme dále.

Po ukončení studia se pozornost P. Vopěnky stále více obrací k teorii množin. Je účastníkem semináře L. S. Riegra. Tohoto matematika je nutno pokládat za prů-

RNDr. Antonín Sochor, DrSc. (1942), vedoucí vědecký pracovník, Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, Praha 1. Pracuje v matematické logice a teorii množin.

kopníka české (i československé) matematické logiky. Rieger žil v letech 1916–1962 a publikoval práce z teorie grup a svazů, Booleových a Heytingových algeber, intuicionistické a klasické logiky a teorie množin. Ve svém přehledném článku [R] z r. 1956 konstatuje, že v bádání v matematické logice je československá matematika absolutně i relativně pozadu; formuluje předmět logiky (jako studium vlastností pojmu důsledku) a diskutuje roli infinitních metod a teorie množin v matematické logice. Nejenže publikoval významné práce, ale založil seminář a inspiroval řadu spolupracovníků. Osobní kontakty Riegra měly také vliv na pozdější plodnou spolupráci československých a polských logiků. Na počátku šedesátých let v době Riegrovy nemoci přebírá Vopěnka stále více roli vůdčí osobnosti v české matematické logice. Po Riegrově smrti se ujal vedení semináře z teorie množin, ale z původního semináře již pokračují jen dva studenti. Seminář je vytvářen zcela novými tvůrčími osobnostmi. Právě podchycení mladých matematiků a to, že P. Vopěnka byl schopen na ně přenést své uchvácení teorií množin, umožnilo vznik skupiny, která se ve své době na české poměry zcela neobvyklou měrou podílela na rozvoji světové matematiky. Mezi význačné členy této skupiny je třeba počítat zejména B. Balcara, L. Bukovského, P. Hájka, K. Hrbáčka, T. Jecha, K. Příkrého, A. Sochora a P. Štěpánka.

Na počátku této etapy Vopěnkova matematického života byly jeho práce o nestandardních interpretacích Gödelovy-Bernaysovy teorie množin GB, založené zejména na metodě ultraproduktu ([5, 6, 7], 1962!). Je zajímavé, že přibližně ve stejné době vedou nestandardní metody rozvíjené A. Robinsonem ke vzniku nestandardní analýzy. Vopěnkova orientace na GB byla ovlivněna Gödelovou prací [G], svou roli zde sehrála konečnost axiomatiky. Té se v pojetí GB dosahuje zavedením pojmu tříd. Ve Vopěnkových pracích tohoto počátečního období se jeví rozdíl mezi množinami a třídami jako technická záležitost, ústředním tématem Vopěnkových úvah se stává vztah množin a tříd teprve na počátku sedmdesátých let.

Habilitační práce P. Vopěnky z roku 1964 [15] se zabývá relací splňování uvnitř teorie množin a ukazuje bezespornost předpokladu, že v GB existují přirozená čísla, pro která již nelze relaci splňování smysluplně definovat (tedy existenci přirozených čísel, o jejichž nestandardnosti se můžeme přesvědčit vnitřními prostředky). Tato práce nebyla publikována.

Nejdůležitějším impulzem pro rozvoj pražské množinové školy je však Cohenův forcing [C], což je metoda, kterou se P. J. Cohenovi podařilo prokázat (prostředky teorie modelů) relativní bezespornost negace hypotézy kontinua s Zermelovou-Fraenkelovou teorií množin a také relativní bezespornost negace axiomu výběru se ZF. (To znamená: je-li ZF bezesporná, pak zůstane bezesporná i po přidání tohoto axiomu.) Na základě Cohenovy metody konstruuje Vopěnka relativní (syntaktickou) interpretaci teorie GB s přidanou negací hypotézy kontinua v GB a také interpretaci GB s negací axiomu výběru v GB. To byl významný přínos, neboť ačkoli ZF a GB dokazují tytéž věty o množinách a Cohenova metoda dává, jak on sám ukázal, interpretaci ZF s přidanou negací hypotézy kontinua (či axiomu výběru) v ZF, je známo, že interpretovatelnost $\mathrm{ZF} \cup \{\varphi\}$ v ZF (kde φ je nějaký přidaný axiom) obecně neimplikuje interpretovatelnost $\mathrm{GB} \cup \{\varphi\}$ v GB (viz [H, HH]).

Ovšem sestrojení uvedené interpretace byl pouhý začátek využití Cohenových metod pražským množinovým seminářem. A opět rozhodujícím impulzem byla Vopěnkova idea.

Zprůhlednění a zjednodušení Cohenovy metody přináší postupně Vopěnkovo topologické pojetí [21, 30] a práce o ∇-modelech[1]). Vopěnka rozpracovává teorii svazků nad topologickými prostory a jejich limit přes ultrafiltry pro konstrukci syntaktických nestandardních modelů GB. V [30] ukazuje, že jádrem jsou extremálně nesouvislé prostory, jinými slovy, že rozhodující jsou dva parametry, úplná Booleova algebra a ultrafiltr na ní. V [33] vypracovává teorii booleovsky hodnotových modelů a generických rozšíření, zcela nezávisle na téměř shodném Solovayově a Scottově přístupu. To, že Vopěnka udržel kontakt se světovou špičkou v teorii množin, současně s faktem, že metoda objevená Cohenem se ukázala zlatým dolem pro výsledky týkající se nezávislostí dodatečných předpokladů na teorii množin, způsobilo věhlas pražské množinové školy. Z výsledků té doby uveďme alespoň konzistenci existence Σ^1_2-množiny mající mohutnost $\aleph_1$ s negací hypotézy kontinua (Vopěnka–Bukovský [18]), výsledky o mocninách alefů (Bukovský), o hypotéze kontinua pro první měřitelný kardinál (Příkrý), konzistenci tzv. Churchových alternativ pro kontinuum (Hájek), nedokazatelnost Suslinovy hypotézy (Jech), výsledky o rozkladu metrických prostorů na řídké množiny (Vopěnka–Štěpánek [36]), o systémech skoro disjunktních množin v souvislosti s forcingem $([\kappa]^\kappa, \subseteq)$ (Vopěnka–Balcar [42]) a obecnou metodu konstrukce interpretací teorie množin s axiomem fundovanosti v případě, že analogická interpretace bez axiomu fundovanosti byla sestrojena permutačním modelem (Jech–Sochor). Tvrzení P. Vopěnky a K. Hrbáčka [29] doplňuje Scottův výsledek o neslučitelnosti axiomu konstruovatelnosti $V = L$ s existencí měřitelného kardinálu: Silně kompaktní kardinál je neslučitelný s $V = L[a]$, tj. s adjunkcí jakékoliv množiny ke konstruktivnímu universu. Úplná bibliografie Vopěnkova množinového semináře je obsažena v pracích [H2] a [H3].

Jinou historii má Vopěnkův princip, což je následující tvrzení: „Je-li $\mathcal{C}$ vlastní třída modelů téhož jazyka, pak existují dva prvky $A, B \in \mathcal{C}$ tak, že A lze elementárně vnořit do B“ (viz [J] nebo [K]). Důležitý výsledek, že na každé nekonečné množině existuje strnulá relace [20], se jeho autorům nedařilo zesílit na konstrukci vlastní třídy navzájem strnulých relací. Petr Vopěnka, nejprve žertem, vyslovil tehdy jako axiom, že takové zesílení neexistuje, a odvodil z tohoto principu některé důsledky, které považoval za málo plausibilní. Doufal, že někdo jeho princip časem vyvrátí. Avšak další vývoj vzal žert vážně: T. Jech a A. Kanamori zpopularizovali tento problém v zahraničí a nakonec byl Vopěnkův princip zařazen do hierarchie velkých kardinálů, mezi superkompaktní a obří (huge) (viz [J]). Tento princip nalezl široké uplatnění v teorii kategorií [AR].

Výsledky Vopěnkova semináře ocenil jeden z předních logiků A. Tarski v jednom dopise takto: „Nevím, zda v tuto chvíli je na světě jiné místo, kde by byla tak početná a sehraná skupina mladých talentovaných pracovníků v základech matematiky.“

---

[1]) Proč ∇-model: K. Gödel dokázal konzistenci $V = L$ sestrojením Δ-modelu, vynecháním některých množin, písmeno ∇ záměrně indikuje, že jde o opačný směr.

P. Vopěnka se stává autoritou ve vědecké komunitě i mezi studenty, což s sebou přirozeně nese také rostoucí vliv na fakultě. Roku 1966 se stává proděkanem a ze své funkce pomáhá jednak vzniku katedry matematické logiky, jednak nových studijních specializací, algebry, geometrie, topologie a zvláště teoretické kybernetiky, kterou jeho katedra garantuje. Dnes jsou někteří bývalí členové jeho katedry a absolventi specializace Teoretická kybernetika vůdčími osobnostmi české informatiky (M. Chytil, P. Kalášek, R. Kryl, A. Kučera, P. Pudlák, O. Štěpánková), jiní mají významné postavení v zahraničí (F. Franěk a P. Vojtáš).

Koncem šedesátých let zasahuje do Vopěnkova díla poprvé podstatným způsobem politická situace. Mnozí členové jeho semináře se cítí v tehdejším komunistickém Československu nesvobodní a emigrují, zejména do USA. Tento odchod je umocněn zejména po invazi do Československa v r. 1968. Jiní členové semináře se sice rozhodují i v době normalizace v republice zůstat, ale po hlubokém narušení původní zanícené skupiny si začínají hledat vlastní matematickou cestu. V roce 1971 je katedra matematické logiky zrušena a Vopěnka ztrácí vliv na specializaci Teoretická kybernetika.

Mezníkem mezi druhou a třetí etapou matematického díla P. Vopěnky je kniha „Teorie polomnožin“, kterou napsal spolu s P. Hájkem [a]. Že jde o mezník, je zcela nepochybné, zároveň však je tuto knihu možno pokládat jak za završení etapy interpretací klasické teorie množin, tak také za první stupeň Vopěnkova neklasického přístupu k teorii množin. Pro první způsob chápání mluví evidentní vztah k booleovsky hodnotovým modelům, pro druhou zavedení pojmu polomnožiny, tzn. podtřídy množiny, která sama nemusí být množinou. Přitom polomnožiny se stávají nosným pojmem Vopěnkova uchopení teorie množin novým způsobem.

Neklasický přístup P. Vopěnky postupně krystalizuje v první polovině sedmdesátých let do formování alternativní teorie množin AST. Tato teorie již zcela bez ohledu na klasickou teorii množin formuluje znovu základní principy teorie množin. Vůdčí myšlenkou se stává snaha o popis lidského způsobu nazírání. Z filosofického hlediska je možno nahlédnout Vopěnkovo ovlivnění Husserlovou fenomenologií.

Vopěnka hledá kompromis mezi přijetím a nepřijetím aktuálního nekonečna. Na jedné straně pokládá akceptaci aktuálního nekonečna za zaujetí pozice Boží, a tedy za něco, co naprosto přesahuje lidské možnosti. Z tohoto úhlu pohledu se jeví klasická teorie množin jako teorie, která nepopisuje *lidské* chápání světa. Na druhé straně je pro Vopěnku také nepřijatelné prosté omezení na konečné objekty, protože při takovém přístupu by se ztratila celá infinitní matematika, kterou nelze zavrhnout již pro její nespornou aplikovatelnost. Východisko nachází právě v rozvinutí ideje tříd von Neumanna.

AST je postavena na protikladu mezi konečným a nekonečným. Množiny jsou povoleny pouze (formálně) konečné a nekonečno je akceptováno výhradně a pouze ve formě vlastních tříd. AST jde zcela vědomě proti běžnému pojímání Cantorovy teorie množin a navazuje na teorii polomnožin, o které jsme již uvedli, že připouští existenci částí množin, které nejsou množinami samy o sobě. Vopěnkova snaha o popis co nejvíce odpovídající chápání lidské pozice vede rovněž k omezení počtu mohutností. Vopěnka si totiž klade otázku, kolik druhů nekonečna je skutečně bezpodmínečně zapotřebí. Je všeobecně známo, že Cantor přijímá do teorie množin předpoklad, že pro každou množinu existuje systém jejích podmnožin jakožto *množina*. Přijetí tohoto předpokladu (spolu s principem existence alespoň jedné nekonečné množiny) si již vynutí neomezeně mnoho různých nekonečen v důsledku Cantorovy věty. Při Vopěnkově přístupu máme spočetnost reprezentovanou jedním typem tříd. Velice podobně jako v případě klasické teorie množin se ukáže, že musí existovat další typ nekonečna odpovídající kontinuu, tedy mohutnosti reálné přímky. Větší počet nekonečen již však není vynucen, a tedy snaha zastavit tvorbu nekonečna na co nejnižší hladině vede Vopěnku k přijetí předpokladu, že existují právě dva typy nekonečna, totiž spočetno a kontinuum.

Nejdůležitějším principem AST je však princip prodloužení. Z formálního hlediska jde o jistý požadavek saturovanosti, ale podstatná je filosofická motivace tohoto principu. Při pohledu k horizontu si představujeme, že jev blížící se k horizontu musí i za ním alespoň chvíli pokračovat stejným způsobem. Snahou je matematizovat takovouto lidskou představu o možnosti překračování horizontu a právě matematizace tohoto fenoménu zapříčiňuje v AST existenci částí množin, které samy množinami nejsou.

P. Vopěnkovi se podařilo podruhé vytvořit skupinu rozpracovávající tyto jeho ideje. V Praze to byli zejména K. Brázdová-Trlifajová, K. Čuda, B. Kussová-Vojtášková, J. Mlček, J. Sgall, A. Sochor, A. Vencovská-Paris a J. Witzany, na Slovensku zejména J. Guričan, M. Kalina a P. Zlatoš. Tentokrát se však již zapojili i zahraniční spolupracovníci, kteří do Prahy dojížděli tu na kratší, tu na delší pobyty. Byli to zejména N. Prati a C. Markini z Itálie, A. Tzouvaras z Řecka a M. Raškovič z Jugoslávie.

Ucelený popis svých představ o novém pojetí teorie množin publikoval P. Vopěnka v knize [c]. Na ni navazuje série článků dalších členů semináře, publikovaná od r. 1979, zejména v časopise Comment. Math. Univ. Carolinae (Vopěnka je mnohdy spoluautorem). Ucelený přehled výsledků celého semináře byl zpracován v přehledné práci [ČSZ].

V AST byla rozpracována řada témat. Šlo jednak o alternativní přístupy k tématům popisovaným v klasické teorii množin a jednak o problematiku vyvolanou vlastní potřebou rozvíjení AST. Do první skupiny patří zejména konstrukce topologických prostorů pomocí ekvivalencí nerozlišitelnosti (Vopěnka [c, 45]), zkoumání jejich metrizovatelnosti (Mlček) a dimenze (Sgall–Witzany), různá alternativní pojetí míry (Čuda, Kalina–Zlatoš, Tzouvaras) a reformulace nestandardních metod (Vopěnka–Sochor [44]). Do druhé skupiny jest zařadit např. popis pohybu v topologickém prostoru včetně jeho diskretizace (Vopěnka [c]), posunování horizontu (Vopěnka–Sochor [50]), zkoumání vnitřních modelů AST (Vencovská, Tzouvaras), výzkum základních ekvivalencí (Čuda–Vojtášková, Mlček). Navíc byly zkoumány metamatematické problémy AST (Sochor, Vencovská).

V Praze bylo plánováno Logic Colloquium v r. 1980 a mimo jiné byly připravovány přednášky, jejichž cílem bylo seznámit širší matematickou obec s dosaženými výsledky v AST. V tomto okamžiku však podruhé zasáhla do Vopěnkova osudu politická situace. Zatčení neohroženého bojovníka proti komunismu, filosofa a matematika V. Bendy vyvolalo podpisovou protiakci mezi matematiky a komunistická moc ve strachu před protesty zakázala konání této konference krátkou dobu, asi 3 týdny, před jejím zahájením. Prezentace AST v předpokládané mohutné podobě se tedy nikdy nekonala.

Vedle přímé tvůrčí práce v matematice se Vopěnka také věnoval a věnuje historii matematiky. Nejde o běžné pojetí historie, ale spíše o ukazování vůdčích myšlenek určitého období a promýšlení jejich odkazu do doby současné. Pozornost P. Vopěnky se zaměřovala zejména na geometrii a pak na počátky teorie množin, zvláště na odkaz B. Bolzana. Velice podnětným způsobem se mu např. podařilo popsat rozdíly mezi pojetím B. Bolzana a G. Cantora a poukázat na to, že myšlenkový odkaz Bolzanův ještě zdaleka nebyl dostatečně reflektován. Rozpracování této Vopěnkovy myšlenky ještě čeká na naplnění.

Své příspěvky k historii matematiky začal Vopěnka r. 1983 předčítat na tzv. filosofickém semináři konaném na MFF. Velice brzy ale umožnil mnoha dalším osobnostem konat přednášky na jeho semináři. Často šlo o myslitele, kteří nemohli svobodně přednášet na vysokých školách (S. Sousedík, J. Polívka, Z. Neubauer, R. Palouš, P. Rezek), a proto se Vopěnkův filosofický seminář celou dobu až do přelomového roku 1989 pohyboval na hranici povoleného — politickou reprezentací někdy trpěn, jindy omezován. Lze doložit, že byl prostřednictvím studentů-agentů sledován Státní bezpečností.

Kromě historie a filosofie se P. Vopěnka věnoval také otázkám pedagogiky. Mnohokrát konal přednášky pro učitele matematiky. Věřil, že rozšíření obzoru učitelů se nutně promítne do zvýšení úrovně znalostí studentů.

V r. 1996 vydává Analysu [j]. V ní se snaží přiblížit co nejvíce původnímu pojetí analýzy nekonečně malých veličin v pojetí Leibnize a Newtona. Pochopitelně je toto pojetí již hluboce ovlivněno jednak nestandardní analýzou a jednak zkušeností z práce v AST.

Potřetí zasahuje do Vopěnkova života politika koncem r. 1989. Až v roce 1990, po pádu komunismu, je Petr Vopěnka jmenován profesorem. V červnu roku 1990 se stává členem vlády ve funkci ministra školství ČR. Snaží se pozvednout školství z poslušného nástroje komunistické moci na spolutvůrce české vzdělanosti. Za tento svůj přístup je jeděmi oceňován a druhými zcela odmítán.

Po skončení funkčního období ve vládě se Petr Vopěnka věnuje se zvýšenou intenzitou historii matematiky. Publikuje další díly Rozprav s geometrií [f, g, h, i] a přináší objevné postřehy o vlivu katolického baroka na matematiku, zvláště pak na teorii množin [k]. V roce 1998 prezident republiky udělil Petru Vopěnkovi státní vyznamenání, medaili Za zásluhy.

L i t e r a t u r a

[AR] Adámek, J., Rosický, J: *Locally Presentable and Accessible Categories.* London Mathematical Society, Lecture Notes Series 189, Cambridge University Press 1994, 316 pp.

[C] Cohen, P. J.: *The independence of the continuum hypothesis.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. *50* (1963), 1143–1148, *52* (1964), 105–110.

[ČSZ] Čuda, K., Sochor, A., Zlatoš, P.: *Guide to alternative set theory.* Proceedings of the 1$^{\text{st}}$ Symposium Mathematics in the alternative set theory, ed. J. Mlček, M. Benešová and B. Vojtášková, JSMF, Bratislava 1989, 41–138.

[G] Gödel, K.: *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis.* Ann. of Math. Studies, No 3, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1940).

[H] Hájek, P.: *On interpretability in set theories.* Comm. Math. Univ. Carolinae *12* (1971), 73–79.

[H1] Hájek, P.: *Sets, semisets, models.* In (D. Scott, ed.) Axiomatic set theory, AMS 1971, 67–81.

[H2] Hájek, P.: *Bibliography of the Prague seminar on foundations of set theory, Part II.* Czechoslovak Mathematical Journal *23* (1973), 521–523.

[HH] Hájek, P., Hájková, M.: *On interpretability in theories concerning arithmetics.* Fund. Math. *76* (1972), 131–137.

[J] Jech, T.: *Set Theory.* Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1997, 634 pp.

[K] Kanamori, A.: *The Higher Infinite.* Perspectives in Mathematical Logic, Springer Verlag 1994, 536 pp.

[R] Rieger, L. S.: *O některých základních otázkách matematické logiky.* Časopis pro pěstování matematiky *81* (1953), 342–351.

Seznam odborných publikací Petra Vopěnky

Monografie

[a] *The Theory of Semisets* (spoluautor P. Hájek). Academia Praha, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, London 1972, 332 pp.

[b] *Množiny a přirozená čísla* (spoluautoři J. Blažek a B. Kussová). SPN Praha 1977, 220 pp.

[c] *Mathematics in the Alternative Set Theory.* Teubner Texte, Leipzig 1979, 120 pp.

[d] *Matematika v alternativnoj teorii množestv.* Izd. Mir, Moskva 1983, 148 pp. (Překlad práce [c] s dodatky.)

[e] *Úvod do matematiky v alternativnej teórii množín.* Alfa, Bratislava 1989, 443 pp.

[f] *Rozpravy s geometrií.* Panorama, Praha 1989, 519 pp.

[g] *Druhé rozpravy s geometrií.* Práh, Fokus, Praha 1991, 225 pp.

[h] *Geometrizace reálného světa (Třetí rozpravy s geometrií).* Matfyzpress, Praha 1995, 395 pp.

[i] *Rozpravy s geometrií: Otevření neeuklidovských geometrických světů (Čtvrté rozpravy s geometrií).* Vesmír, Praha 1995, 161 pp.

[j] *Calculus infinitesimalis pars prima.* Práh, Praha 1996, 134 pp.

[k] *Podivuhodný květ českého baroka.* Karolinum, Praha 1998, 296 pp.

[l] *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií.* Práh, Praha 2000.

[m] *Meditace o základech vědy* (v přípravě).

Původní vědecké práce

[1] *O razmernosti kompaktnych prostranstv.* Czechoslovak Math. Journal *8* (1958), 319–327.

[2] *Zamečanie o razmernosti metričeskich prostranstv.* Czechoslovak Math. Journal *9* (1959), 519–522.

[3] *Množiny v rovině, které každá algebraická ireducibilní křivka protne v předepsaném počtu bodů.* Acta Univ. Carol., Math. et Phys. (1960), 45–50.

[4] *On the functional equation* $\lambda[f(x)] \cdot \lambda(x) + A(x) \cdot \lambda(x) + B(x) = 0$ (spoluautor M. Kuczma). Ann. Univ. Sci. Budapest *34*, Eötvös Sect. Math. (1960/61), 123–133.

[5] *Odin metod postroenija nestandartnoj modeli aksiomatičeskoj teorii množestv Bernaysa--Gödela.* Dokl. Akad. Nauk SSSR (1962), 11–12.
[6] *Modeli teorii množestv.* Z. Math. Logik Grundlagen Math. *8* (1962), 281–292.
[7] *Postroenie modelej teorii množestv metodom ultraproizveděnija.* Z. Math. Logik Grundlagen Math. *8* (1962), 293–304.
[8] *Postroenie modelej teorii množestv metodom spektra.* Z. Math. Logik Grundlagen Math. *9* (1963), 149–160.
[9] *Elementarnye ponjatija v teorii množestv.* Z. Math. Logik Grundlagen Math. *9* (1963), 161–167.
[10] *Postroenie nestandartnoj nereguljarnoj modeli teorii množestv.* Z. Math. Logik Grundlagen Math. *9* (1963), 229–233.
[11] *Über die Gültigkeit des Fundierungsaxioms in speziellen Systemen der Mengentheorie* (spoluautor P. Hájek). Z. Math. Logik Grundlagen Math., Bd. *9* (1963), 235–241.
[12] *Axiome der Theorie endlicher Mengen.* Časopis Pěst. Mat. *89* (1964), 312–317.
[13] *Podmodeli modelej teorii množestv.* Z. Math. Logik Grundlagen Math., Bd. *10* (1964), 163–172.
[14] *Construction of a model for Gödel-Bernays set theory for which the class of natural numbers is a set of the model and a proper class in the theory.* The theory of models, Proceedings of the 1963 international symposium at Berkeley, ed. by J. W. Addison, L. Henkin, A. Tarski, North-Holland 1970, 436–437.
[15] *Axiomy numerace.* Habilitační práce, MFF UK, Praha 1964, 58 pp.
[16] *Nězavisimosť kontinuum-gipotezy.* Comment. Math. Univ. Carolinae *5* (1964), Supplementum 1, 1–48.
[17] *The independence of Continuum Hypothesis.* Překlad práce [16], American Mathematical Society Translations, Series 2, *57* (2) (1966), 85–112.
[18] *The existence of a PCA-set of cardinal* $\aleph_1$ (spoluautor L. Bukovský). Comment. Math. Univ. Carolinae *5* (1964), 125–128.
[19] *Concerning a proof of* $\aleph_{\alpha+1} \leqq 2^{\aleph_\alpha}$ *without axiom of choice.* Comment. Math. Univ. Carolinae *6* (1965), 111–113.
[20] *A rigid relation exists on any set* (spoluautoři A. Pultr a Z. Hedrlín). Comment. Math. Univ. Carolinae *6* (1965), 149–155.
[21] *The limits of sheaves and applications on construction of models.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *13* (1965), 189–192.
[22] *On* ∇*-model of set theory.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *13* (1965), 267–272.
[23] *Properties of* ∇*-model.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *13* (1965), 441–444.
[24] *The first measurable cardinal and the generalized continuum hypothesis.* Comment. Math. Univ. Carolinae *6* (1965), 367–370.
[25] *Permutation submodels of the model* ∇ (spoluautor P. Hájek). Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *13* (1965), 611–614.
[26] *Some permutation submodels of the model* ∇ (spoluautor P. Hájek). Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *14* (1966), 1–7.
[27] ∇*-models in which the generalized continuum hypothesis does not hold.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *14* (1966), 95–99.
[28] *A new proof of the Gödel's result on non-provability of consistency.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *14* (1966), 111–116.
[29] *On strongly measurable cardinals* (spoluautor K. Hrbáček). Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *14* (1966), 587–591.
[30] *The limits of sheaves over extremally disconnected compact Hausdorff spaces.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *15* (1967), 1–4.

[31] *The consistency of some theorems on real numbers* (spoluautor K. Hrbáček). Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *15* (1967), 107–111.

[32] *Concerning the ∇-models of set theory* (spoluautor P. Hájek). Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *15* (1967), 113–117.

[33] *General theory of ∇-models.* Comment. Math. Univ. Carolinae *8* (1967), 145–170.

[34] *An undecidable theorem concerning full embeddings into categories of algebras* (spoluautor Z. Hedrlín). Comment. Math. Univ. Carolinae *7* (1966), 401–409.

[35] *Generator classes in set theory* (spoluautor B. Balcar). Z. Math. Logik Grundlagen Math., Bd. *13* (1967), 97–98.

[36] *Decomposition of metric spaces into nowhere dense sets* (spoluautor P. Štěpánek). Comment. Math. Univ. Carolinae *8* (1967), 387–404.

[37] *Zerlegung metrischer Räume.* Proc. of the I. International Symp. of Extension Theory of Topol. Structures, Berlin 1967.

[38] *On complete models of the set theory* (spoluautor B. Balcar). Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *15* (1967), 839–841.

[39] *Ultraproduct, submodels and their extensions.* Abstracts of Papers, 3rd International Congress for Logic, ed. by B. van Rootselaar, Amsterdam 1967, 25.

[40] *The notion of effective sets and a new proof of the consistency of the axiom of choice* (spoluautoři B. Balcar a P. Hájek). J. Symbolic Logic *33* (1968), 495–496.

[41] *The Theory of Semisets.* Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), tome 1, Gauthier-Villars, Paris 1971, 255–260.

[42] *On systems of almost disjoint sets* (spoluautor B. Balcar). Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. *20* (1972), 421–424.

[43] *On the axiom of general collapse (contribution to the theory of semisets V.)* (spoluautor A. Sochor). Z. Math. Logik Grundlagen Math. *21* (1975), 289–302.

[44] *Endomorphic universes and their standard extensions* (spoluautor A. Sochor). Comment. Math. Univ. Carolinae *20* (1979), 605–630.

[45] *The lattice of indiscernibility equivalences.* Comment. Math. Univ. Carolinae *20* (1979), 631–638.

[46] *Real and imaginary classes in the alternative set theory* (spoluautor K. Čuda). Comment. Math. Univ. Carolinae *20* (1979), 639–653.

[47] *Revealments* (spoluautor A. Sochor). Comment. Math. Univ. Carolinae *21* (1980), 97–118.

[48] *The axiom of reflection* (spoluautor A. Sochor). Comment. Math. Univ. Carolinae *22* (1981), 87–111.

[49] *Ultrafilters of sets* (spoluautor A. Sochor). Comment. Math. Univ. Carolinae *22* (1981), 689–699.

[50] *Shiftings of the horizon* (spoluautor A. Sochor). Comment. Math. Univ. Carolinae *24* (1983), 127–136.

[51] *Utility theory in the alternative set theory* (spoluautor K. Trlifajová). Comment. Math. Univ. Carolinae *26* (1985), 699–711.

[52] *Metafora o výzkumu multifaktoriálně podmíněných chorob* (spoluautoři D. Pokorný a J. Šimek). ROBUST 86 — Sborník prací zimní školy JČSMF, ed. J. Antoch, J. Jurečková, 94–99.

[53] *Neviditelné reálné tvary.* Sborník symposia Implikátní a explikátní řád živé skutečnosti. Ed. Zd. Neubauer, J. Fiala, ČSVTS, Praha 1986.

[54] *Constructions of classes by transfinite induction in AST* (spoluautor A. Sochor). Comment. Math. Univ. Carolinae *30* (1989), 155–161.

[55] *What is Alternative Set Theory.* General Systems, Philadelphia, Tokyo, Melbourne, Vol. *20,* No. 1 (1991).

[56] *Poznámky o současné matematice.* Filosofický časopis *XIX*, 5 (1971), 731–753.
[57] *O prvním Hilbertově problému.* Pokroky Mat. Fyz. Astronomie *XVI* (1971), 117–129.
[58] *O přirozených číslech* (spoluautoři J. Blažek a B. Kussová). MFŠ *4* (1973/74), 570 až 577.
[59] *Nieskonczonosć, zbiory i możliwosć u B. Bolzana.* Wiadomosci Matematyczne *26* (1985), 171–204.
[60] *Alternative Set Theory All About.* Proceedings of the 1st Symposium Mathematics in the alternative set theory. Ed. J. Mlček, M. Benešová and B. Vojtášková, JSMF, Bratislava 1989, 28–40.

Skripta

[61] *Analytická geometrie.* SPN, Praha 1964.
[62] *Úvod do axiomatické teorie množin* (spoluautoři J. Blažek a B. Kussová). SPN, Praha 1972.
[63] *Úvod do axiomatické teorie množin* (spoluautoři J. Blažek a B. Kussová). KPÚ, České Budějovice 1972.
[64] *Analytická geometrie druhé generace.* Univerzita JEP, Ped. fak., Ústí n/L., 1998.

Obaly a pokrytí v teorii modulů

Jan Trlifaj, Praha

Abstrakt. Teorie modulů zahrnuje několik významných oblastí moderní matematiky. Účinnou metodou popisu modulů jsou aproximace: obaly a pokrytí modulů. Za přispění českých matematiků se v roce 1999 podařilo vyřešit jeden z nejznámějších problémů o aproximacích — hypotézu existence plochých pokrytí modulů (FCC). Článek je věnován nástinu teorie obalů a pokrytí modulů, metodám vyvinutým pro důkaz FCC a jejich aplikacím.

Úvod s trochou historie

Pod pojmem „modul" si většina z nás představí část kosmické lodi. Informatici termínem „modul" rozumějí část většího programového celku s přesně definovaným rozhraním. V klasické matematice slovo „modul" znamenalo číselnou charakteristiku objektu.

Doc. RNDr. Jan Trlifaj, CSc. (1954), katedra algebry MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: trlifaj@karlin.mff.cuni.cz