Pavol Brunovský; Pavol Meravý

Ako riešiť algebraické rovnice pomocou rovnic diferenciálnych

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 32 (1987), No. 5, 273--286

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139838

Ako riešiť algebraické rovnice pomocou rovníc diferenciálnych

Pavol Brunovský, Pavol Meravý, Bratislava

Čože je to za nezmysel riešiť jednoduchšie rovnice pomocou zložitejších? Neunáhlime sa však a počkajme s definitívnym záverom na koniec príbehu. Príbehu, ktorý je poučný a nepostráda prekvapujúce zvraty.

Začnime teda pekne po poriadku – keď už nie od Adama, tak aspoň od starých Egypťanov. Oni sa totiž podľa našich vedomostí prví začali systematickejšie zaoberať vedou či skôr umením, ako riešiť rovnice. Čo pod tým presne rozumieť, nad tým si vtedy hádam hlavu veľmi nelámali – pre nich bolo toto umenie v podstate súhrnom návodov ako jednotlivé druhy rovníc riešiť.

Používaním a zdokonaľovaním týchto návodov sa postupne vyhranili triedy rovníc, pre ktoré existovali návody zaručujúce ich rozriešenie a také pre ktoré existujúce návody nemuseli byť vždy úspešné. Od čias Galoisa vieme, že keď sa nám nedarí vyjadriť riešenie konečnou formulkou z dát rovníc (čo je vlastne veľmi jednoduchým návodom na riešenie), nemusí to byť znakom našej hlúposti, ale môže to byť v povahe veci. Ba čo viac, s výnimkou sústav lineárnych a ešte zopár typov ďalších rovníc to spravidla v povahe veci je. Prinajmenej od tých čias je teda zrejmé, že treba rozlišovať medzi vedomosťou o tom, že riešenie existuje a schopnosťou ho nájsť. Odráža sa to aj v náuke o rovniciach, v ktorej možno sledovať dva smery. V *prvom* ide o to matematicky precíznym, hoci aj nekonštruktívnym, spôsobom dokázať existenciu alebo neexistenciu riešenia, prípadne odhadnúť počet riešení. V *druhom* ide o to navrhnúť metódu, hoci aj presne matematicky nezdôvodnenú, ako riešenie približne vypočítať. Vychádzajúc z analógií s prístupmi rôznych škôl starovekej matematiky nazveme prvý smer gréckym a druhý babylónskym.

Veľmi prirodzená myšlienka, ktorá sa asi najprv (zhruba začiatkom nášho storočia) objavila v svojej gréckej verzii je táto: K rovnici, ktorej riešenie nepoznáme, si vytvoríme pomocnú rovnicu rovnakého typu, ktorej riešenie poznáme. Keď budeme postupne deformovať pomocnú rovnicu do rovnice pôvodnej, je nádej, že nás tomu zodpovedajúca deformácia (zmena) riešenia pomocnej rovnice privedie k hľadanému riešeniu tej pôvodnej.

V tejto myšlienke je veľa vecí, ktoré treba spresniť, a to: čo znamená „rovnica rovnakého typu", „deformovať", „privedie".... Obmedzíme sa pritom na rovnice o konečnom počte reálnych alebo komplexných neznámych. Nech teda $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (alebo $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) je spojité zobrazenie. Pôjde nám o riešenie rovnice

$$F(x) = 0\,. \tag{1}$$

Pre určitosť budeme predbežne hovoriť o rovniciach v $\mathbb{R}^n$, avšak všetky úvahy sú rovnako platné pre $\mathbb{C}^n$. Za pomocnú rovnicu môžeme vziať ľuvoboľnú rovnicu

$$(2) \qquad G(x) = 0\,,$$

kde $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie, ktorého všetky nulové body (t.j. riešenia rovnice (2)) poznáme; napr.

$$G(x) = x - a\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}^n$ je dané. Deformáciou G do F alebo, ako budeme ďalej hovoriť, homotópiou F a G budeme rozumieť spojité zobrazenie $H\colon \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ také, že

$$H(x, 0) = G(x)\,,$$

$$H(x, 1) = F(x)\,.$$

Môže to byť napríklad

$$H(x, t) = t\,F(x) + (1 - t)\,G(x)\,.$$

Poznamenávame, že „homotopická premenná" t je reálna aj pre prípad komplexného zobrazenia F. Čo značí „privedie", o tom by bolo treba pohovoriť obšírnejšie. Keďže H závisí spojite od t, intuitívne si môžeme predstaviť, že riešenia rovnice

$$(3) \qquad H(x, t) = 0$$

budú ležať na (homotopických) krivkách, vychádzajúcich zo (známych) riešení rovnice (2) pre $t = 0$ a končiacich v riešeniach rovnice (1) pre $t = 1$.

Otázkou babylónskeho typu je teraz: ako je možné krivku riešení rovnice (3) začínajúcu v $t = 0$ sledovať; otázkou gréckeho typu je: kedy je možné túto intuitívnu myšlienku nájdenia riešenia rovnice (1) matematicky zdôvodniť.

Grécky prístup

Historicky je grécky prístup starší, pretože jeho korene siahajú až k Brouwerovi, ktorý v r. 1912 [1] publikoval svoju známu vetu o pevnom bode (spojité zobrazenie F konvexnej kompaktnej množiny K do seba má pevný bod). Pôvodná myšlienka jeho dôkazu sa zakladala na jeho teórii simplexových aproximácií spojitých zobrazení a pojme „globálneho" stupňa definovanom v duchu kombinatorickej topológie. Brouwerove výsledky boli motiváciou búrlivého rozvoja teórie (Brouwerovho) stupňa, ktorá bola neskôr alternatívne systematicky vybudovaná analytickými metódami (Nagumo 1951 [2]), resp. pomocou integrálu (Heinz 1959 [3]). Podľa [4] bol Heinz prvý, kto urobil dôkaz Brouwerovej vety o pevnom bode s použitím homotópie $H(x, t) = x - t\,F(x)$ (pozri tiež [6, str. 161, 163]). Na rozdiel od Kroneckerovho lokálneho prístupu k stupňu ako indexu izolovaného riešenia rovnice (1) [6], ide v teórii Brouwerovho stupňa o globálny prístup, ktorý by sme mohli intuitívne opísať takto: Pre dané spojite diferencovateľné zobrazenie $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ (kde otvorená množina U obsahuje uzáver $\mathrm{cl}\,K$ otvorenej ohraničenej množiny $K \subset \mathbb{R}^n$) vyjadruje stupeň zobrazenia F na množine K v hodnote y (z oboru hodnôt $\mathbb{R}^n$) počet riešení rovnice $F(x) = y$ v K so zreteľom na ich „orientáciu".

Presnejšia definícia vyžaduje niekoľko označení. Nech N_F je množina všetkých singulárnych bodov zobrazenia F, t.j. množina tých $x \in U$, že Jacobiho matica $DF(x)$ je singulárna. Hodnotu $y \in \mathbb{R}^n$ nazveme singulárnou, ak existuje singulárny bod x zobrazenia F taký, že platí $F(x) = y$. V opačnom prípade (t.j. ak pre všetky $x \in F^{-1}(y)$ platí, že $DF(x)$ je regulárna) hovoríme, že hodnota y je regulárna.

Ak $y \notin F(\partial K \cup N_F)$, t.j. y nepatrí do obrazu hranice ∂K množiny K a nie je singulárnou hodnotou, potom

$$\deg(F, K, y) = \sum_{x \in F^{-1}(y)} \operatorname{sign} \det DF(x)\,. \tag{4}$$

Podľa Sardovej vety [14] je množina regulárnych hodnôt zobrazenia hustá (a naviac plnej miery v $\mathbb{R}^n$), a teda ku každej (aj singulárnej) hodnote y existuje postupnosť regulárnych hodnôt y_k, ktoré konvergujú k y. Keďže sa dá dokázať, že ku každému $y \notin F(\partial K)$ a pre každú postupnosť regulárnych hodnôt $y_k \notin F(\partial K \cup N_F)$ konvergujúcu ku y je stupeň $\deg(F, K, y_k)$ od určitého indexu k_0 počnúc konštantný, môžeme pomocou (4) definovať stupeň spojite diferencovateľného zobrazenia pre všetky $y \notin F(\partial K)$. Rozšírenie pojmu stupňa zobrazenia F na množine K v hodnote y aj pre spojité zobrazenia na $\operatorname{cl} K$ je založené na rovnomernej aproximácii (s ľubovoľnou presnosťou) spojitého zobrazenia definovaného na kompakte $\operatorname{cl} K$ spojite diferencovateľným zobrazením definovaným na $\mathbb{R}^n$. Takýmto spôsobom môžeme stupeň zobrazenia považovať za definovaný pre spojité zobrazenia $F: \operatorname{cl} K \to \mathbb{R}^n$ a pre hodnoty $y \notin F(\partial K)$. Teraz spomenieme stručne najdôležitejšie vlastnosti využívané v gréckom prístupe:

- pre dané K, y je stupeň jednoznačne určený správaním sa zobrazenia F na hranici ∂K: Nech $y \notin F(\partial K)$, kde F, G sú spojité zobrazenia $\operatorname{cl} K \to \mathbb{R}^n$. Ak

  $$\max_{x \in \partial K} \|F(x) - G(x)\|$$

  je dostatočne malé, potom $\deg(F, K, y) = \deg(G, K, y)$,
- ak $\deg(F, K, y) \neq 0$, potom existuje riešenie $x \in K$ rovnice $F(x) = y$ (ak však $\deg(F, K, y) = 0$, môže mať ešte rovnica $F(x) = y$ riešenie; napr. rovnaký počet riešení s kladným a záporným znamenkom determinantu $DF(x)$),
- homotopická invariancia stupňa: ak $H: \operatorname{cl} K \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie a $y \notin H(\partial K \times [0, 1])$, potom $\deg(H(.,t), K, y)$ je konštantná funkcia pre $t \in [0, 1]$.

Základná idea existenčných dôkazov pomocou teórie stupňa je nasledovná: Pôvodnú rovnicu (1) spojiť homotópiou s takou rovnicou, o ktorej vieme ukázať, že má nenulový stupeň. Potom použitím homotopickej invariancie stupňa má nenulový stupeň aj rovnica (1), a teda existuje riešenie. Všimnime si, že táto idea dôkazu nedáva návod, ako riešenie nájsť. Preto teória stupňa často slúžila ako typický príklad nekonštruktívnosti.

Babylónsky prístup

Babylónskym protipólom teórie stupňa sú numerické metódy, ktoré majú veľa názvov: metóda vneseného parametra, kontinuačná metóda, Davidenkova metóda (continuation method, imbedding method). Tieto numerické metódy (nazvime ich spoločne kontinuačné) sú založené na predpoklade, že $H^{-1}(0)$ je množina tvorená z kriviek, ktoré nás, vyjdúc zo známeho riešenia rovnice (2), privedú k hľadanému riešeniu rovnice (1).

Kontinuačné metódy vychádzajú z toho, že numerika má vypracovaný bohatý register účinných metód (nazvime ich lokálnymi) ako zo začiatočnej (nedostatočnej) aproximácie riešenia získať jeho dostatočne presnú aproximáciu (ako príklad spomeňme iba Newtonovu metódu). Pôvodný babylónsky návod teda znie: pre postupnosť hodnôt $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ počítaj rekurentne použitím vhodnej lokálnej metódy riešenia x^k rovnice

$$H(x, t_k) = 0\,, \tag{5}$$

pričom x^{k-1} slúži ako začiatočná aproximácia riešenia rovnice (5). (Poznamenávame, že hodnoty t_k nemusia byť vopred dané, ale môžu byť volené v priebehu výpočtu).

Podľa [7] bol Lahaye (1934) jedným z priekopníkov takéhoto prístupu k riešeniu rovnice (1) (hľadal dokonca niekoľko riešení). Nasledovali potom ďalší, napr. Ficken (1951). Davidenkovi (1953) sa pripisuje myšlienka interpretácie homotopickej krivky ako trajektórie začiatočnej úlohy pre sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -[D_x H(x(t), t)]^{-1}\, D_t H(x(t), t) \tag{6}$$

$$x(0) = a\,,$$

kde a je známe riešenie rovnice (2). Klopfenstein (1961) bol pravdepodobne prvý, kto nahradil začiatočnú úlohu (6) pre určenie homotopickej krivky úlohou bez explicitnej parametrizácie homotopickou premennou t. V [10] vychádza z predpokladu, že homotopická krivka je parametrizovaná premennou s (s môže označovať napríklad dĺžku homotopickej krivky od bodu $(a, 0)$), a teda

$$H(x(s), t(s)) = 0 \quad \text{pre všetky} \quad s \in J = [0, \hat{s}) \tag{3'}$$

pričom samozrejme $(x(0), t(0)) = (a, 0)$. Diferencovaním (3′) podľa s dostáva potom začiatočnú úlohu

$$D_x H(x(s), t(s))\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + D_t H(x(s), t(s))\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{7}$$

$$(x(0), t(0)) = (a, 0)\,,$$

ktorej trajektóriou je homotopická krivka začínajúca v $(a, 0)$. Začiatočná úloha (6) je vlastne špeciálnym prípadom začiatočnej úlohy (7) (pre $s = t$ a $D_x H(x(s), t(s))$ regulárne). Všimnime si, že ak 0 je regulárna hodnota zobrazenia H v oblasti $t < 1$, vtedy implicitná diferenciálna rovnica v (7) určuje jednoznačne dotykový vektor k homotopickej krivke v bode $(x(s), t(s))$ až na skalárny násobok. Jeho dĺžku môžeme voliť ako jednotkovú (čo zodpovedá parametrizácii dĺžkou krivky), orientácia je určená orientáciou v začiatočnom bode a požiadavkou spojitosti vektorového poľa.

U nás sa použitím homotopických metód zaoberali napr. M. Kubíček a kol. [15].

Heuristika týchto postupov tkvie v tom, že nikde nie je zaručené, že sa s bodmi (x^k, t_k) dostaneme až k bodu $(x, 1)$ z množiny $H^{-1}(0)$ (x^k pre niektoré t_k nemusí existovať, resp. trajektórie začiatočných úloh (6), (7) nemusia pretínať nadrovinu $t = 1$). Skutočne nie je ťažké predstaviť si situácie, za ktorých tento prístup zlyhá — tak ako napokon každá z numerických metód. Na rozdiel od mnohých iných metód však u kontinuačnej metódy neboli známe donedávna nijaké rozumné podmienky, za ktorých by bolo dokázané, že aspoň teoreticky vedie k cieľu.

Syntéza prístupov

Máme tu teda dve vyústenia tej istej myšlienky: prvé do matematicky precízneho výsledku, ktorý nedáva návod na počítanie, a druhé do heuristického návodu na počítanie, ktorý postráda odôvodnenie. Možno ich nejako dať pod jeden klobúk?

Nebola by matematika matematikou, a my by sme článok nepísali, keby sa klobúk nebol našiel. Volá sa teória transverzality a našiel sa nedávno v dosť ďalekej krajine – v diferenciálnej topológii. Prečo sa našiel až tak neskoro? Dôvod je jednoduchý – predtým proste nebol. Veď teória transverzality sa začala rodiť až v 50. rokoch a kým sa matematici naučili, na čo všetko môže byť dobrá, nejaký ten rôčik ubehol.

Vlastne z teórie transverzality treba iba málo – pojem regulárnej hodnoty a „parametrickú" Sardovu vetu [13, str. 48], [14, str. 108]. Regulárnou nazývame takú hodnotu $y \in \mathbb{R}^n$ zobrazenia $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m \geqq n)$, že pre všetky $x \in g^{-1}(y)$ má matica $Dg(x)$ plnú hodnosť n; ak y nie je regulárnou hodnotou, tak ju nazývame singulárnou hodnotou zobrazenia g. Všimnime si, že pre $n = m$ je táto definícia v súlade s definíciou regulárnej hodnoty z predchádzajúcej kapitoly.

Parametrická Sardova veta: *Nech $M \subset \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^s$ sú otvorené a $g\colon M \times U \to \mathbb{R}^n$ je C^r, kde $r >$* max $\{0, m-n\}$. *Ak $y \in \mathbb{R}^n$ je regulárnou hodnotou zobrazenia g, potom*

$$\tilde{U} = \{u \in U \mid y \ \text{ je regulárnou hodnotou zobrazenia } \ g(.\,, u) : M \to \mathbb{R}^n\}$$

je reziduálna (a teda hustá) v U a $U \setminus \tilde{U}$ má nulovú (s-rozmernú) Lebesgueovu mieru.

Poznamenajme, že reziduálnou podmnožinou U rozumieme množinu, ktorá je prienikom spočítateľného počtu otvorených hustých podmnožín U. Ak nejaká vlastnosť platí pre reziduálnu podmnožinu U, budeme v ďalšom hovoriť, že platí genericky v U.

Tí, ktorí sledujú vývoj globálnej analýzy, by mohli namietať, že Sardova veta bola aspoň o desať rokov skôr ako teória transverzality. To je pravda, avšak jej parametrická verzia (s ktorou Sard už nemá nič spoločného) bola inšpirovaná až teóriou transverzality. Aj keď to pre nás nie je dôležité, poznamenajme, že predpoklad na rád diferencovateľnosti r sa nedá oslabiť.

Jednoduchým, ale pre nás dôležitým dôsledkom vety o implicitnej funkcii je, že ak y je regulárnou hodnotou g, potom $g^{-1}(y)$ je C^r podvarieta M dimenzie $m - n$. Špeciálne: ak $m = n + 1$, potom každá komponenta súvislosti $g^{-1}(y)$ je hladká krivka, ktorá sa nevetví ani nepretína s nijakou z komponent súvislosti, teda je homeomorfná buď kružnici, alebo otvorenému intervalu.

Parciálne zobrazenie pri fixovanej premennej x zobrazenia $g\colon (x, y) \mapsto g(x, y)$ budeme značiť g_x (t.j. $g_x\colon y \mapsto g(x, y)$) a analogicky budeme značiť aj diferenciál (Jacobiho maticu) zobrazenia g vzhľadom na časť premenných x, a to takto: $D_x g$. Značiac pri tom bez indexu úplný diferenciál, môžeme teda písať $D_x g = Dg_y$.

Čo nám hovorí parametrická Sardova veta pre homotópie? Uvažujme homotópiu

$$H(x, t, a) = t\,F(x) + (1 - t)(x - a)\,, \tag{8}$$

kde $a \in R^n$ je parameter a predpokladajme, že F je C^2. H je zobrazenie z R^{2n+1} do R^n. Zrejme platí hod DH = hod $D_a H$ = hod $(1 - t)\,E_n = n$, pre $t < 1$ a ľubovoľné x, a. To inak povedané značí, že ľubovoľný bod z R^n, a teda aj 0, je regulárnou hodnotou zobrazenia H v oblasti $t < 1$. Z parametrickej Sardovej vety teda dostávame nasledujúcu vetu:

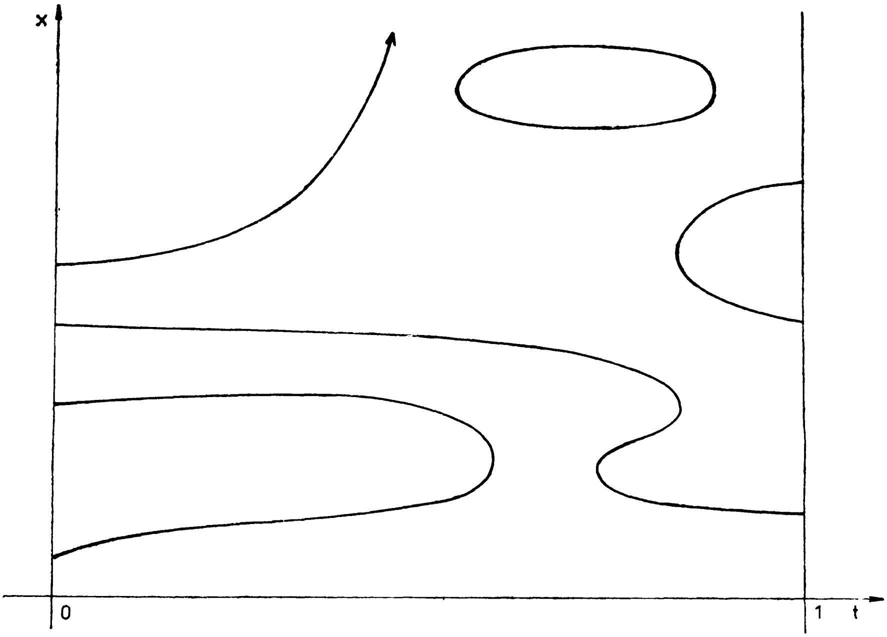
Veta 1. *Nech F je C^2 a nech H je daná formulou* (8). *Potom genericky v množine parametrov a je množina riešení rovnice $H_a(x, t) = 0$ v oblasti $t < 1$ jednorozmernou varietou.*

Prvý raz sa táto myšlienka objavila v práci [12] (autorov Chow, Mallet-Paret a Yorke).

Keďže doplnok reziduálnej množiny (v $U \subset R^n$) má n-rozmernú Lebesgueovu mieru rovnú nule, plynie z vety 1: Ak si náhodne zvolíme parameter a, môžeme si byť istí (t.j. s pravdepodobnosťou 1), že zvolený parameter je „dobrý" v tom zmysle, že riešenia rovnice $H_a(x, t) = 0$ budú pre $t < 1$ ležať na hladkých krivkách, ktoré sa nepretínajú.

Pre numeriku tu teda čosi máme: pri dobrom parametri vychádza z bodu a skutočne krivka riešení, ktorú sa môžeme lokálnymi metódami pokúsiť sledovať. Dovedie nás krivka k riešeniu rovnice (1)? Nie je ťažké si predstaviť, že nemusí, napríklad preto, že unikne do nekonečna alebo že sa vráti späť (obr. 1).

Sú to skutočne všetky „zlé" možnosti pre homotópiu (8)? Odpoveď dáva nasledujúca veta, ktorá je jednoduchou modifikáciou vety 2.4 z [12].



Obr. 1. Čo všetko sa môže stať s krivkami riešení.

Veta 2. *Nech sú splnené podmienky vety* 1. *Predpokladajme naviac, že pre nejaké* a_0 *existuje* $r > \|a_0\|$ *také, že pre* $\|x\| = r$ *a* $0 \leqq t \leqq 1$ *je* $H_{a_0}(x, t) \neq 0$. *Potom existuje okolie* U *bodu* a_0 *a v ňom reziduálna množina* $\tilde{U} \subset U$ *taká, že bodom* $(x, t) = (a, 0)$ *(pre* $a \in \tilde{U}$*) prechádza hladká krivka* Γ *riešení rovnice* (3) *v oblasti* $\|x\| < r$, $t < 1$, *ktorej uzáver* cl Γ *obsahuje bod* $(\bar{x}, 1)$ *taký, že* $F(\bar{x}) = 0$.

Voľne teda možno povedať, že krivka Γ nás „dovedie" do bodu $\bar{x}$, ktorý je riešením rovnice (1).

Tak, a to je ten klobúk! Podmienky vety sú presne tie, ktoré zabezpečujú invariantnosť stupňa vzhľadom na t (pričom $\deg(x - a, \|x\| < r, 0) = 1$) a vlastnosť krivky Γ byť diferencovateľnou podvarietou oblasti $t < 1$, je postačujúcou pre návrh účinných numerických metód jej sledovania. Jediné, čo sme museli pridať, je diferencovateľnosť. Vďaka nej veta 2 dáva stupňu konštruktívny aspekt a súčasne zdôvodnenie heuristickým kontinuačným metódam.

Načrtnime hlavnú myšlienku dôkazu vety 2. Existuje také okolie U bodu a_0, že pre každé $a \in U$ z $\|x\| = r$, $0 \leqq t \leqq 1$ vyplýva $H(x, t, a) \neq 0$. Podľa vety 1 je množina „dobrých" hodnôt parametra a reziduálna v U. Ak parameter a vyberieme z tejto množiny, potom (podľa vety 1) bodom $(a, 0)$ prechádza krivka Γ riešení rovnice $H_a(x, t) = 0$. Sledujme, čo sa s ňou bude diať pre $t > 0$. Táto krivka je zrejme podmnožinou množiny $Q_r = \{(x, t) \mid \|x\| < r, 0 \leqq t < 1\}$ a $\Gamma \cap \operatorname{int} Q_r$ je podvarietou $\operatorname{int} Q_r = \{(x, t) \mid \|x\| < < r, 0 < t < 1\}$. Keďže $D_x H(a, 0, a) = E$ (jednotková matica), tak podľa vety o implicitnej funkcii dostávame, že v bode $(a, 0)$ sa krivka Γ nevetví a nepretína so žiadnou časťou množiny $H_a^{-1}(0)$. To však značí, že varieta $\Gamma \cap \operatorname{int} Q_r$ je homeomorfná otvorenému intervalu. Súčasne je uzavretou podmnožinou $\operatorname{int} Q_r$, a teda nemôže ostať v oblasti $0 < t < \alpha$, $\|x\| < r$ pre nijaké $\alpha < 1$. Cez hranicu $\|x\| = r$ vyjsť nemôže, pretože $H(x, t, a) \neq 0$ pre $\|x\| = r$. Cez hranicu $t = 0$ vyjsť nemôže, lebo pre $t = 0$ má homotópia (8) len jediný bod v $H_a^{-1}(0)$ a v ňom sa Γ nevetví. Krivka nemá teda inú možnosť ako vyjsť z oblasti $0 < t < \alpha$, $\|x\| < r$ cez hranicu $t = \alpha$. Pretože $\alpha < 1$ je ľubovoľné, musí byť prienik cl $\Gamma \cap \{(x, t) \mid t = 1, \|x\| \leqq r\}$ neprázdny. Zo spojitosti H plynie, že pre každé $(\bar{x}, 1)$ z cl $\Gamma \cap \{(x, t) \mid t = 1, \|x\| \leqq r\}$ je splnené $F(\bar{x}) = 0$.

Chybou krásy vety 2 je, že nevylučuje možnosť oscilácie krivky Γ pre $t \to 1$, a teda z nej nevyplýva, že Γ musí mať pre $t \to 1$ limitu. To skutočne vo všeobecnosti nevieme dokázať. Stačí však naviac predpokladať, že H je analytické zobrazenie a to nám stačí na to, aby cl $\Gamma \cap \{t = 1\}$ bola jednobodová množina. Dôkaz si odpustíme, lebo využíva teóriu semianalytických množín a do tej sa púšťať by na tento článok bolo predsa len priveľa.

Je zaujímavé, že homotopický prístup umožňuje ešte aj dnes, v čase keď teória stupňa je už relatívne uzavretá disciplína, dokázať sčasti konštruktívne zaujímavé existenčné tvrdenia. Hádam najznámejšou vetou hovoriacou o existencii riešení sústavy $F(x) = 0$ na guli $\|x\| \leqq r$ je

Veta 3. *Nech* $F: K \subset R^n \to R^n$ *je spojité zobrazenie a* $K = \{\|x\| \leqq r\}$. *Ak pre všetky* $\|x\| = r$ *platí*

$$\langle F(x), x \rangle \geqq 0 ,$$

tak v K *existuje aspoň jedno riešenie sústavy* $F(x) = 0$.

Podľa [6, str. 16] tvrdenie tohoto typu bolo pôvodne formulované (pre Hilbertov priestor) v [19]. V [6, str. 163] je pomocou Leray-Schauderovej vety v $\mathbb{R}^n$ dokázaná všeobecnejšia

Veta 4. *Nech K je otvorená ohraničená množina v $\mathbb{R}^n$ a predpokladajme, že $F: \mathrm{cl}\, K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie spĺňajúce*

$$\langle F(x), x - x^0 \rangle \geqq 0$$

pre nejaké x_0 a všetky $x \in \partial K$. Potom $F(x) = 0$ má riešenie v $\mathrm{cl}\, K$.

V [20] bolo pre špeciálne množiny K (dané konečným počtom nerovností, ktoré spĺňajú určitú podmienku regularity) dokázané pomocou tzv. bariérovej homotópie tvrdenie, ktoré pre prípad $K = \{x \mid \|x\| \leqq r\}$ má slabšie predpoklady než vety 3, 4.

Veta 5. [20]. *Nech $K = \{x \mid \|x\| \leqq r\}$ a $F: K \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie. Ak pre všetky $\|x\| = r$ platí*

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R};\ F(x) = \lambda x) \Rightarrow \langle F(x), x \rangle \geqq 0\,,$$

potom $F(x) = 0$ má aspoň jedno riešenie $\bar{x}$ v K.

Numerická realizácia

Začnime terminologickou poznámkou: Pre jednoparametrické ($t \in \mathbb{R}^1$) metódy založené na deformácii triviálnej úlohy do riešenej netriviálnej používame názov homotopické metódy na zdôraznenie kvalitatívneho rozdielu od globálne heuristických a len lokálne rigoróznych postupov sledovania závislosti riešenia na parametri kontinuácie. Numerickú homotopickú metódu chápeme preto ako metódu založenú jednak na lokálnej analýze (umožňujúcej konštruovať numerické metódy na sledovanie homotopických kriviek), jednak na globálnej analýze otázok súvisiacich s dôkazom jej konvergencie (t.j. existenciou bodu $(\bar{x}, 1)$ v uzávere homotopickej krivky).

Pre numerický výpočet nám veta 2 teda vraví toto: Ak sú splnené jej podmienky a dokážeme krivku Γ numericky s dostatočnou presnostou sledovať, dostaneme sa do ľubovoľne malého okolia riešenia rovnice $F(x) = 0$. Ak presnosť aproximácie riešenia obdržaná z numerického sledovania krivky nestačí, je potom ešte možné získanú aproximáciu ďalej upresňovať vhodnou lokálnou metódou.

Zostáva teda povedať, ako krivku Γ sledovať. Rozlišujeme tieto dve skupiny numerických algoritmov používaných na sledovanie homotopických kriviek:

1. simplexové algoritmy
– sú založené na použití po častiach lineárnej aproximácie H_{PL} homotópie H a predstavujú vlastne sledovanie (po častiach lineárnej) krivky $H_{PL}^{-1}(0)$, ktorá je (po častiach lineárnou) aproximáciou diferencovateľnej krivky $H^{-1}(0)$.
2. kontinuačné algoritmy
– (napr. [11, 17, 18]) sú založené na interpretácii homotopickej krivky ako trajektórie vhodnej začiatočnej úlohy pre sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc, napr. (6), (7).

Historicky sa skúmali skôr simplexové algoritmy a z veľmi obsiahlej literatúry spomenieme len niektoré často citované, resp. prehľadové práce Eaves [30], Scarf [5], Todd [31], Allgower, Georg [4].

Moderné kontinuačné algoritmy sú založené na Klopfensteinovej myšlienke implicitnej parametrizácie homotopickej krivky. Na tomto mieste považujeme za užitočné objasniť vzájomný vzťah kontinuačných algoritmov a numerických metód riešenia začiatočných úloh. Kontinuačný algoritmus môžeme považovať za algoritmus riešenia špeciálnej začiatočnej úlohy, a to v nasledujúcom zmysle: Riešenie (homotopická krivka) spĺňa nielen začiatočnú úlohu (7), ale naviac aj sústavu rovníc

$$H(x(s), t(s)) = 0 \quad \text{pre všetky } s .$$

To sa premieta v tejto základnej štruktúre kontinuačných algoritmov:

0. krok: $k = 0$, $(x^k, t_k) = (a, 0)$, $s_k = 0$ (inicializácia výpočtu), $h_k > 0$ (veľkosť kroku v numerickej metóde riešenia začiatočnej úlohy).

1. krok: $(\tilde{x}^k, \tilde{t}_k) = \mathscr{P}(x^k, t_k, \ldots, x^{k-r+1}, t_{k-r+1}, h_k)$ ($\mathscr{P}$ je nejaký explicitný vzorec – prediktor – pre získanie aproximácie $(\tilde{x}^k, \tilde{t}_k)$ bodu $(x(s_k + h_k), t(s_k + h_k))$ homotopickej krivky pomocou r už vypočítaných bodov na homotopickej krivke.)

2. krok: (x^{k+1}, t_{k+1}) je riešenie (nelineárnej) sústavy

$$(9) \qquad \begin{aligned} H(x, t) &= 0 , \\ N(x, t) &= 0 , \end{aligned}$$

kde funkcia $N: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňa úlohu normalizácie (určuje jednoznačne bod na krivke $H^{-1}(0)$). Sústava (9) sa rieši obyčajne Newtonovou alebo kvázi-Newtonovou metódou (napr. [17]), pričom začiatočná aproximácia je predikovaný bod $(\tilde{x}^k, \tilde{t}_k)$. Efektívnymi voľbami normalizácie sú

$$N(x, t) = \langle w^k, (x, t) - (\tilde{x}^k, \tilde{t}_k) \rangle ,$$

$$N(x, t) = \|(x, t) - (x^k, t_k)\|^2 - (h_k)^2 ,$$

kde w^k je jednotkový vektor spĺňajúci lineárnu homogénnu sústavu $DH(\tilde{x}^k, \tilde{t}_k)\, w^k = 0$ a $\langle .,. \rangle$ je zvyčajný skalárny súčin (v reálnom obore).

3. krok: Ak $t^{k+1} < 1$, tak pokračuj krokom 1. pre $k = k + 1$.
Ak $t^{k+1} = 1$, tak máme aproximáciu $(x^{k+1}, 1)$ koncového bodu homotopickej krivky.
Ak $t^{k+1} > 1$, tak môžeme interpoláciou získať aproximáciu $(z, 1)$ koncového bodu homotopickej krivky.

Ako riešiť polynomické rovnice pomocou rovníc diferenciálnych

V doterajších úvahách sme sa venovali len otázke, ako nájsť jedno riešenie sústavy rovníc. Často by sme však radi vedeli viac – a to nájsť všetky riešenia (pre sústavu n rovníc o n neznámych sú to genericky iba izolované riešenia). Pokiaľ sa na túto náročnejšiu úlohu pozeráme z výpočtového hľadiska, môže mať táto úloha pozitívne riešenie iba v prípade, že riešení je konečne veľa. Odhadnúť počet riešení rovnice nie je vo všeobecnosti tak jednoduché. Našťastie je však široká trieda rovníc, u ktorých to (s jedným háčikom) ide, a to sú rovnice polynomické.

Každý pozná fundamentálnu vetu algebry, podľa ktorej polynóm n-tého stupňa má najviac n rôznych koreňov. Menej je už známa Bézoutova veta, ktorá hovorí o počte riešení systému polynomických rovníc: *Ak $P: C^n \to C^n$ je zobrazenie, ktorého k-tá zložka P_k je polynom stupňa d_k a ak sústava*

$$P(x) = 0 \tag{10}$$

má len izolované riešenia, potom je ich najviac

$$D = d_1 \,.\, d_2 \ldots d_n = \prod_{k=1}^{n} d_k \,.$$

Hneď si všimnime, že pre jednu rovnicu to súhlasí s fundamentálnou vetou algebry. Polynom jednej premennej stupňa d má práve d koreňov so zreteľom na ich násobnosti. Analogicky, v prípade polynomickej sústavy sa dá definovať určitý algebraický pojem násobnosti pre homogenizovanú sústavu (10) a vtedy platí, že počet izolovaných riešení vrátane násobnosti je práve D. Zdôrazňujeme však, že tieto presné počty riešení platia len pre komplexný obor (v reálnom obore sú to vo všeobecnosti iba horné ohraničenia). To je jeden z hlavných dôvodov, ktorý je v povahe veci a ktorý nás núti pri analýze riešení polynomických rovníc (a teda aj pri ich hľadaní) uvažovať o polynomickej sústave v komplexnom obore (t.j. s komplexnými neznámymi a komplexnými koeficientami), čo budeme v ďalšom predpokladať.

Ale prečo zrazu prívlastok „izolovaných"? Nie je to azda tak, že ak polynomické zobrazenie má neizolovaný nulový bod, potom je identicky nulové? V tom je práve ten háčik: pre skalárny prípad (funkciu $P: C \to C$) to platí a pre vektorový prípad (zobrazenie $P: C^n \to C^n$, $n > 1$) už nie. Množina riešení viacrozmernej polynomickej rovnice (polynomickej sústavy) sa nazýva algebraická varieta a vo všeobecnosti je konečným zjednotením plôch rozličnej dimenzie ($<n$ pre P nie identicky rovné nule).

Priznáme sa, že o Bézoutovej vete ani jeden z nás donedávna vôbec nevedel. Vidí sa nám teraz priam neuveriteľným, že tak základná veta úplne vypadla nielen z vysokoškolských kurzov algebry, ale nemohli sme ju (pre $n > 2$) nájsť ani v novších knihách o algebre. Napokon nás zachránilo iba staručké vydanie Van der Waerdenovej algebry z r. 1934, 1937. Pre $n = 2$ je veta dokázaná v [32].

Ale vráťme sa k veci. Ako uvidíme, polynomickými rovnicami sa oplatí zaoberať ešte aj z iného dôvodu: v tomto prípade sa totiž možno zbaviť nepríjemného a ťažko overiteľného predpokladu z vety 2. Hlavný účel tohoto predpokladu je zabezpečiť, aby množina $H_a^{-1}(0)$ bola ohraničená. Pre polynomické sústavy (10) nahradíme tento predpoklad nasledovnou konštrukciou: Využitím štandardnej homogenizácie každej zložky P_k zobrazenia P

$$\overset{+}{P}_k(x, x_0) = x_0^{d_k} \,.\, P_k\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right), \tag{11}$$

t.j.

$$(11') \qquad \overset{+}{P}_k(x, x_0) = \sum_i c_i \cdot x_1^{\alpha_{i1}} \dots x_n^{\alpha_{in}} \cdot x_0^{d_k - |\alpha_i|}$$

$(0 \neq c_i \in \mathbb{C}, |\alpha_i| = \alpha_{i1} + \dots + \alpha_{in})$, prevedieme pôvodnú sústavu (10) na sústavu

$$(12) \qquad \overset{+}{P}(x, x_0) = 0 .$$

Množinu $\overset{+}{P}^{-1}(0)$ môžeme považovať za podmnožinu n-rozmerného komplexného projektívneho priestoru $\mathbb{CP}^n$, pretože s každým riešením (x, x_0) sústavy (12) sú aj všetky body komplexnej priamky $L(x, x_0) = \{(\lambda x, \lambda x_0) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ riešeniami sústavy (12).

Poznamenávame, že opísanou homogenizáciou sme vo všeobecnosti rozšírili množinu riešení pôvodnej sústavy (10). Riešenia x sústavy (10) sú totiž v jednoznačnej korešpondencii s komplexnými priamkami $L(x, 1)$ riešení sústavy (12). Sústava (12) môže mať aj komplexné priamky $L(x, 0)$ riešení, ktorým nezodpovedajú žiadne riešenia sústavy (10). Týmto „dodaným“ riešeniam sústavy (12) (t.j. $(x, x_0) \in \overset{+}{P}^{-1}(0)$, pre ktoré $x_0 = 0$) budeme hovoriť nevlastné riešenia. Pre zdôraznenie budeme hovoriť riešeniam sústavy (10) vlastné riešenia. Je zrejmé, že ak každá rovnica v (10) je homogénna, tak všetky riešenia (10) sú aj nevlastnými riešeniami (zodpovedá im komplexná priamka riešení $L(x, 0)$ v $\overset{+}{P}^{-1}(0)$). Z homogenity P však plynie, že ak $P(x) = 0$, tak $L(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \subset P^{-1}(0)$, t.j. nevlastné riešenie sústavy (10) nie je izolované v $\mathbb{C}^n$. Preto v ďalšom budeme hovoriť o izolovaných riešeniach polynomickej sústavy (10) v tomto zmysle: Uvažujme o komplexnej priamke $L(x, x_0) \subset \overset{+}{P}^{-1}(0)$ ako o bode z $\mathbb{CP}^n$. Ak je tento bod izolovaný (v topológii $\mathbb{CP}^n$) v $\overset{+}{P}^{-1}(0) \subset \mathbb{CP}^n$, tak hovoríme, že riešenie x sústavy (10) je izolované. V topológii priestoru $\mathbb{C}^{n+1}$ to značí, že ku každému $0 \neq (x, x_0) \in \overset{+}{P}^{-1}(0)$ existuje také okolie $O(x, x_0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$, že platí

$$L(x, x_0) \cap O(x, x_0) = \overset{+}{P}^{-1}(0) \cap O(x, x_0) .$$

Čo sa však stane, ak sústava (10) má aj neizolované riešenia? Platí vtedy odhad z Bézoutovej vety? Tu nám prichádza na pomoc teória semialgebraických množín. Podľa nej (Whiteyho veta [13, str. 100]) je algebraická varieta konečným zjednotením súvislých hladkých podvariet. Z toho však plynie, že je konečný počet komponent súvislosti množiny riešení $\overset{+}{P}^{-1}(0)$ sústavy (12), a teda aj konečný počet izolovaných riešení sústavy (10). Naviac je podľa [22] aj vo všeobecnom prípade (t.j. ak existujú aj neizolované riešenia) počet komponent algebraickej variety $\overset{+}{P}^{-1}(0)$ (uvažovanej ako podmnožiny $\mathbb{CP}^n$) ohraničený Bézoutovým číslom D, a teda izolovaných riešení polynomickej sústavy je vždy najviac D.

Jedným z prvých, kto si uvedomil možnosť hľadať všetky riešenia polynomickej sústavy rovníc použitím homotopického prístupu, bol Drexler [23]. Touto otázkou sa aj pre trochu všeobecnejšiu triedu sústav (tzv. polynomicky dominovateľných) zaoberali Garcia a Zangwill [24]. Ich prístup však znamenal v polynomickom prípade sledovať viac než D homotopických kriviek. Ideu parametrických homotópií z [12] použili autori Chow, Mallet-Paret a Yorke aj na tento problém [25], pričom sledovali už práve D homotopických kriviek. Neskôr zjednodušil tvar homotópie z [25] so zachovaním jej predností Li [26]. Všetky tieto prístupy sa zaoberali riešením pôvodnej úlohy (10), t.j. úlohy v C^n. To malo za následok, že sa nemohli vyhnúť situácii, keď niektoré z homotopických kriviek „uniknú do nekonečna" (t.j. $\|x(t)\| \to \infty$ pre $t \to 1$). To nastáva vtedy, ak sústava (10) má nevlastné riešenie. Je zrejmé, že prinajmenej z numerického hľadiska je to nepríjemné, pretože pri zväčšovaní normy $\|x(t)\|$ je treba sa rozhodnúť, či počítať ďalej (ak homotopická krivka vedie k riešeniu s veľkou normou), alebo či sledovanie homotopickej krivky ukončiť (ak sme na divergujúcej krivke). Tento problém sa rieši v [27] práve pomocou homogenizácie, ktorá „zrovnoprávňuje" vlastné a nevlastné riešenia a umožňuje definovať tzv. ohraničenú homotópiu.

Hlavná myšlienka homotopickej metódy na riešenie sústavy (10) je táto: Zostrojiť parametrickú homotópiu, napr. podľa [26]

$$H: C^n \times [0, 1] \times C^{2n} \to C^n ,$$

kde

$$H_k(x, t, a, b) = (1 - t)(a_k x_k^{d_k} - b_k) + t P_k(x) \quad (k = 1, \dots, n) \tag{13}$$

($0 \neq a, b \in C^n$ sú parametre homotópie). Analogicky ako pri riešení sústav v reálnom obore z parametrickej Sardovej vety plynie pre skoro všetky hodnoty parametrov $(a, b) \in C^{2n}$, že $H_{a,b}^{-1}(0)$ je varietou (reálnej) dimenzie 1 v oblasti $t < 1$. Z teórie semianalytických, resp. semialgebraických množín však navyše plynie, že množina vhodných parametrov (a, b) je otvorená a hustá. Pre vhodnú voľbu parametrov (a, b) je $H_{a,b}^{-1}(0)$ tvorená v oblasti $t < 1$ z práve D komponent súvislosti (kriviek). Pozdĺž nich homotopická premenná t monotónne vzrastá. Krivky sú diferencovateľné a vedú z bodov tvaru $(y_1, \dots, y_n, 0)$ (kde y_k je ľubovoľný z d_k koreňov rovnice $(H_{a,b})_k (x, 0) = 0$) z nadroviny $t = 0$ k riešeniam sústavy (10). V prípade, že krivka vedie k nevlastnému riešeniu, vlastne homotopická krivka v určitom zmysle diverguje.

Homogenizáciou homotópie (13)

$$H_k(x, x_0, t, a, b) = (1 - t)(a_k x_k^{d_k} - b_k x_0^{d_k}) + t\overset{+}{P}_k(x, x_0)$$

$(k = 1, \dots, n)$ dosiahneme, že $H_{a,b}^{-1}(0)$ je síce varietou reálnej dimenzie 3, ale počet komponent v oblasti $(x, x_0) \neq 0$ ostáva nezmenený. Navyše vieme v každej komponente definovať homotopickú krivku $(x(t), x_0(t), t)$ vedúcu z bodu $(y, 1, 0)/\|(y, 1)\|$ do nejakého bodu $(z, z_0, 1)$, ktorá pritom leži v kompaktnej množine $\{(x, x_0, t) \mid \|(x, x_0)\| = 1, 0 \leqq t \leqq 1\}$. Nevlastným riešeniam $\tilde{z}$ zodpovedá koncový bod v $L(\tilde{z}, 0) \times \{1\}$, vlastným riešeniam $\tilde{z}$ koncový bod v $L(z, z_0) \times \{1\}$, kde $\tilde{z} = (1/z_0)\, z$.

Poznamenávame, že homotopické krivky sú v tomto prístupe definované pomocou vhodnej začiatočnej úlohy pre sústavu diferenciálnych rovníc (podrobnosti môže čitateľ nájsť napr. v [27], [29]).

Slovo na záver

Vráťme sa k otázke, ktorou sme začali, a s odpoveďou, na ktorú sme čitateľovi odporučili vyčkať. Odpoveď nech si dá čitateľ sám, napovieme mu však ďalšou otázkou: Ako ináč než sledovaním homotopických kriviek (pomocou numerického riešenia diferenciálnej rovnice) nájsť *všetky* riešenia systému polynomických rovníc?

Na mieste je samozrejme otázka, či ide o teoretickú numerickú metódu, alebo, či pomocou nej niekto niekedy aj niečo spočítal. Nuž, na svete je program, ktorý skutočne počíta a vie všetky izolované riešenia systému polynomických rovníc nájsť [27]. Treba si samozrejme uvedomiť, že s počtom rovníc a najmä s ich stupňom počet riešení veľmi rýchle rastie, a preto u systémov väčšieho rozsahu extrémne rastú nároky na výpočtový čas (nie však na pamäť!), ktorý sa už u pomerne malých systémov stáva limitujúcim faktorom použiteľnosti.

Ako to už v numerike býva, veľa možno niekedy ušetriť využitím špecifiky úlohy. V prípade polynomických rovníc sú to symetrie, ktoré umožňujú nájsť všetky riešenia sledovaním často výrazne menšieho počtu kriviek. Napríklad: V [29] sme riešili sústavu $n = 6$ rovníc, pričom rovnice boli stupňa $d_k = 3$ ($k = 1, \ldots, 6$). Táto sústava môže mať najviac $D = 3^6 = 729$ rôznych izolovaných riešení. Využitím symetrie stačilo sledovať 115 homotopických kriviek na nájdenie všetkých 729 riešení (čo je úspora asi 83% proti postupu bez využitia symetrie).

Vidíme teda, že homotopický prístup umožňuje konštruovať numerické metódy na riešenie zložitých nelineárnych úloh. Nie sú to však len polynomické sústavy. V literatúre sa uvádza úspešné použitie homotopických metód na riešenie rôznych iných úloh (napr. parametrické okrajové úlohy, úlohy matematického programovania a.i.). Podľa [25], [28] sa homotopickými metódami podarilo vyriešiť niektoré dovtedy numericky nevyriešiteľné úlohy (napr. parametrická okrajová úloha o pohybe vznášadla).

Vo všeobecnosti však možno použitie homotopických metód na riešenie konkrétnych úloh charakterizovať takto:

- použitie homotopických metód je vo všeobecnosti menej efektívne ako použitie iných (priamych, resp. lokálne rýchlo konvergujúcich) metód (ak také existujú),
- použitie homotopických metód je však niekedy úspešné, aj keď ostatné metódy zlyhali.

Väčšina úspešných aplikácií homotopických metód tkvie v ich použití na riešenie takých úloh, ktoré je možné previesť na riešenie sústavy rovníc (obyčajne nelineárnych).

Ako ukazuje práve príklad využitia symetrií pri riešení systémov polynomických rovníc, netreba sa uspokojiť s relatívne malou efektívnosťou homotopických numerických metód. Pre rôzne konkrétne typy úloh možno totiž vhodnou voľbou homotópie dosiahnuť značné zvýšenie efektívnosti. To isté možno povedať aj o voľbe numerickej metódy na sledovanie homotopických kriviek. Na definitívne závery o efektívnosti homotopických metód treba však počkať až dovtedy, keď objem práce investovanej do ich zdokonaľovania bude porovnateľný s prácou vynaloženou na zefektívnenie zaužívaných metód.

Literatúra

[1] Brouwer, L., Math. Ann., *71* (1912), 97—115.
[2] Nagumo, M., Amer. J. Math., *73* (1951), 485—496.
[3] Heinz, E., J. Math. Mech., *8* (1959), 231—247.

[4] ALLGOWER, E., GEORG, K., SIAM Review, *22* (1980), 28—85.
[5] SCARF, H. E., SIAM Appl. Math. *15* (1967), 1328—1343.
[6] ORTEGA, J. M., RHEINBOLDT, W. C.: *Iterative solution of nonlinear equations in several variables.* Londýn: Acad. Press 1970.
[7] LORY, P.: Numer. Math., *35* (1980), 115—140.
[8] FICKEN, F. A., Comm. Pure Appl. Math., 1951, 435—456.
[9] DAVIDENKO, D. F., DAN ZSSR, *88* (1953), 601—602.
[10] KLOPFENSTEIN, R. W., J. of ACM, *8* (1961), 366—373.
[11] KELLOG, R. B., LI, T. Y., YORKE, J. A., SIAM J. Num. Anal., *13* (1976), 473—483.
[12] CHOW, S. N., MALLET-PARET, J., YORKE, J. A., Math. Comp., *32* (1978), 887—899.
[13] ABRAHAM, R., ROBBIN, J.: *Transversal mappings and flows.* New York: W. A. Benjamin Inc. 1967.
[14] HIRSCH, M. W.: *Differential topology.* Preklad: Moskva, Mir 1979.
[15] KUBÍČEK, M., HOLODNIOK, M., HLAVÁČEK, V., Proc. 5-th Symp. „Computers in Chemical Engineering", Vysoké Tatry (1977), 883—902.
[16] LAHAYE, E., C. R. Acad. Sci. Paris, *198* (1934), 1840—1842.
[17] DUEFLHARD, P., FIEDLER, B., KUNKEL, P., Univ. Heidelberg, SFB 123: Tech. Tep. No. *278* (1984).
[18] KUBÍČEK, M., ACM Trans. Math. Software, *2* (1976), 98—107.
[19] MINTY, G., Bull. Amer. Math. Soc., *69* (1963), 691—692.
[20] MERAVÝ, P., preprint — zaslané do Math. Slovaca.
[21] WAERDEN VAN DER, B. L.: *Moderne Algebra I, II.* Preklad: Moskva 1934, 1937.
[22] VOGEL, W.: *Lectures on results on Bézout's theorem.* Tata Inst. of Fund. Research, Bombay 1984.
[23] DREXLER, F. J., Numer. Math., *29* (1977), 45—58.
[24] GARCIA, C. B., ZANGWILL, W. I., Math. Progr., *16* (1979), 159—176.
[25] CHOW, S. N., MALLET-PARET, J., YORKE, J. A., Lecture Notes in Math., *730* (1979), 77—88.
[26] LI, T. Y.: *On Chow, Mallet-Paret and Yorke homotopy for solving systems of polynomials.* Preprint.
[27] BRUNOVSKÝ, P., MERAVÝ, P., Numer. Math., *43* (1984), 397—418
[28] WATSON, L. T., NATO Conf. Series (Systems Science), *13* (1982), 287—307.
[29] MERAVÝ, P., kandidátska dizertácia, MFF UK Bratislava 1984.
[30] EAVES, B. C., SIAM AMS Proceedings, *9* (1976), 73—143.
[31] TODD, M. J., Lecture Notes in Econ. Math. Systems, *124* (1976), preklad: Moskva 1983.
[32] SCHWARZ, Š.: *Základy náuky o riešení rovníc.* Bratislava: Vyd. SAV (1968).

Z myšlenek obsažených ve spise Vitruvia „Deset knih o architektuře" z 1. stol. před n. l.

Když sokratovský filozof Aristippos byl při ztroskotání lodi vyvržen na rhodské pobřeží a zpozoroval tam geometrické obrazce, zvolal prý na své průvodce: „Buďme dobré mysli! Vždyť vidím stopy lidí!" A pak ihned pospíšil do města Rhodu, odebral se přímo do gymnázia, disputoval tam o filozofii a byl obdarován tolika dary, že mohl nejen sebe zaopatřit, ale i společníkům poskytnout ošacení a ostatní životní potřeby. Když se potom jeho průvodčí chtěli vrátit do vlasti a ptali se ho, co mají vyřídit doma, uložil jim, aby vyřídili, že se má dětem opatřovati takové jmění a cestovné, jež i při ztroskotání lodi může zároveň s nimi plavat a zachránit se.

... Neméně Theofrastos zesiluje onu myšlenku, že lidé by měli být vedeni k tomu, aby byli spíše vzdělaní, než aby se spoléhali na peníze.

... Epikuros pak praví ne nepodobně: Štěstěna prý moudrým lidem přiděluje málo, zato však to, co je největší a nezbytné, tj. řídit se myslivým duchem a rozumem. Tak se vyjádřili i mnozí jiní filozofové. ...