

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Marie Benešová; Milan Cirjak; Vladimír Jodas; Václav Medek; Bohumír Parížek  
Diskuse o užitečnosti matematiky

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 25 (1980), No. 4, 217--222

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139753>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1980

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Literatura

- [1] BOYD, C. A.: *A note on complementation in lattices of convergence functions*. Proc. Royal Irish Acad. Sci A (1974), 2, 7—10.
- [2] ČECH, E.: *Topological spaces* (revidováno M. KATĚTOVEM a Z. FROLÍKEM). Academia Prague 1966.
- [3] ERDÖS, P., HAJNAL, A.: *On chromatic number of graphs and set systems*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966) 1—2, 61—99.
- [4] KUNEN, K.: *Some points in  $\beta N$* . Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 80 (1976), 385—398.
- [5] LARSON, R. E., ANDIMA, S. J.: *The lattice of topologies: a survey*. Rocky Mountains J. Math. 5 (1975), 177—198.
- [6] LOVÁSZ, L.: *On chromatic number of finite set systems*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 19 (1968), 1—2, 59—67.
- [7] NEŠETŘIL, J., RÖDL, V.: *Selective graphs and hypergraphs*. Annals of Discrete Math. 3 (1978), 181—189.
- [8] PELANT, J., REITERMAN, J.: *Atoms and proximal fineness*. Seminar Uniform Spaces 1975—76, Praha 1976, 37—41.
- [9] PELANT, J., REITERMAN, J.: *Atoms in uniformities*. Seminar Uniform Spaces 1973—74, Praha 1975, 73—81.
- [10] PELANT, J., REITERMAN, J.: *Atoms in uniformities and proximities*. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Part B, Praha 1977, 353—356.
- [11] REITERMAN, J., RÖDL, V.: *A non-zero dimensional atom*. Seminar Uniform Spaces 1976—77, Praha 1977, 65—73.
- [12] REITERMAN, J., RÖDL, V.: *On non-zero dimensional atoms*. Seventh Winter School on Abstract Analysis, MÚ ČSAV, Praha 1979, 67—68.
- [13] SIMON, P.: *Uniform atoms on  $\omega$* . Seminar Uniform Spaces 1975—76, Praha 1976, 7—35.
- [14] SIMON, P.: *Uniform atoms on  $\omega$* . General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Part B, Praha 1977, 430—433.

---

## diskuse

### Diskuse o užitečnosti matematiky\*)

Mária Benešová, Bratislava

Táto poznámka se týka jediného, no dôležitého miesta v článku A. Sivošovej.

---

\*)Diskusní příspěvky k článku A. Sivošové *Několko úvah o užitočnosti matematiky*, který jsme otiskli v minulém čísle. (Pozn. red.)

Jedná se o moment pochopenia nového pojmu. Pochopenie pojmu pozostáva z dvoch častí. Prvá je vlastné pochopenie pojmu, ktoré sa väčšinou udeje v krátkej dobe, a druhá, náročnejšia, aj keď sa na ňu niekedy zabúda, je začlenenie nového pojmu do pojmovej zásoby žiaka. Týmto začlenením rozumieme postupné vytváranie vzťahov k iným pojmom a aj prehodnocovanie obsahu pojmov vybudovaných skôr. Tento proces je náročný a je mu potrebné pri vyučovaní venovať veľkú pozornosť. Ako je uvedené v článku, pri sprostredkovaní pojmov žiakom je nutnou podmienkou dialóg medzi učiteľom

a žiakom a ešte cennejší dialóg medzi žiakmi navzájom. Pre zdarný priebeh dialógu je potrebné vytvoriť preň vhodné podmienky a toto nežiada od učiteľa len dobrú odbornú fundovanosť, ale aj zvládnutie psychologickú stránku vyučovacieho procesu. Je nutné vytvoriť v triede ovzdušie, v ktorom nie je cítiť napätie a strach.

Faktorom, ktorý môže narúšať ovzdušie v triede, môže byť známkovanie. Ak učiteľ už veľmi krátku dobu po tom, ako začal učiť nový pojem, bude jeho znalosť u žiakov známkovať, spomalí tým priebeh druhej fázy osvojovania. Žiak totiž zo strachu pred prípadnou zlou známkom, nebude klásť otázky. Pretože druhá fáza osvojovania si pojmu je dlhšia a u každého žiaka iná, je potrebné citlivo zvoliť dobu, odkedy od žiakov budeme znalosť pojmu vyžadovať komplexne. Pravdepodobne to má byť až vtedy, keď učiteľ vidí, že u väčšiny žiakov začalo už obdobie označené v článku ako budovanie pamäti a zručností.

Nakoniec by bolo snáď vhodné dodať ešte to, že známky v rukách učiteľov sú silným nástrojom, ktorý máme využívať skôr ako prostriedok na povzbudenie žiaka a nie na jeho znechutenie.

*Milan Cirjak, Prešov*

Učitelia matematiky bez toho, aby si nejako hlbšie uvedomovali požiadavku viacerých didaktikov o tom, že je potrebné organizovať učebný proces tak, ako ho organizuje tisíce rokov najlepší učiteľ – sám život, intuitívne cítia, že najefektívnejším prostriedkom rozvoja matematických činností, matematického myslenia žiakov, je vyučovanie prostredníctvom riešenia úloh.

Podľa Sawyera matematika je nástroj a nemá zmyslu zmocniť sa tohto nástroja,

ak ho nevieme pritom používať. G. Polya hovorí, že ovládnutie matematiky žiakmi je oveľa dôležitejšie ako osvojenie si množstva teoretických vedomostí. Pritom pod ovládnutím matematiky rozumieme umenie riešiť úlohy, a to nielen štandardné, typicky školské, ale aj úlohy vyžadujúce od žiakov samostatnosť myslenia, originalnosť a vynaliezavosť. Tu je treba hľadať odpoveď na otázku o užitočnosti matematiky.

Literatúra uvádza, že žiaci v priebehu štúdia na ZDŠ vyriešia asi 15 000 matematických úloh. Je to slušný počet, ale boli by sme ďaleko od pravdy, keby sme tvrdili, že väčšina žiakov po príchode na strednú školu má rozvinuté zbehlosti a zručnosti v riešení aritmetických, algebraických a geometrických úloh. Nie je naším cieľom hlbšie skúmať túto problematiku. Uspokojíme sa s konštatovaním, že pred didaktikmi, autormi učebníc aj samotnými učiteľmi existuje celý rad aktuálnych problémov ponúkajúcich sa na riešenie. Ide napr. o tieto problémy:

- Vytvorenie didakticky účelného systému úloh, pomocou ktorého by bolo možné každého žiaka postupne previesť cez všetky komponenty matematickej činnosti (objavovanie problémových situácií, formulácia problému a jeho riešenie, overovanie správnosti riešenia, matematizácia reálnych situácií, riešenie úloh motivujúcich nevyhnutnosť rozšírenia a štúdia novej matematickej teórie a pod.).
- Riešenie postavenia úloh vo vyučovaní matematiky z hľadiska ich obsahu, funkčného určenia, počtu riešených úloh pre splnenie učebných cieľov. Jasná odpoveď na otázku prečo v danom tematickom celku sa riešia práve tie úlohy a nie iné, čo sa ich vyriešením žiaci naučia a čo sa majú naučiť, je nevyhnutná pre učiteľov aj žiakov.

- Štruktúrálna analýza úloh, ktorá umožňuje posúdiť „zložitost“ úlohy a vytvoriť optimálny postup jej riešenia (rozlišujeme „zložitost“ úlohy ako objektívnu vlastnosť každej úlohy a „obtiažnosť“ úlohy, ktorá vyjadruje vzťah medzi úlohou a jej riešiteľom).

K úspešnému a efektívnemu riešeniu nových, neštandardných úloh je nevyhnutné, aby žiaci predošlé skúsenosti z riešenia úloh mali určitým spôsobom zatriedené. V školskej praxi to znamená, aby informácie o matematických činnostiach získané v procese riešenia úloh boli uvedomé, kriticky prehodnocované, aby pri riešení úloh boli tieto činnosti samostatnou poznávacou činnosťou osvojené a upevnené. Osobitný význam sa prikladá riešeniu úloh rôznymi spôsobmi, pretože to vedie k rozvoju schopnosti transferu a originalnosti myslenia.

Záverom chceme poznamenať, že nevyhnutnosť zdokonaľovania obsahu školských matematických úloh a metód ich riešenia prináša sám život, zmeny cieľov, podmienok a prostriedkov našej školy.

*Vladimír Jodas, Bratislava*

Autorka vo svojom článku zdôrazňuje podľa mňa tieto tri myšlienky:

1. Potreba motivácie ako dôležitého predpokladu úspešnosti vyučovacieho procesu.
2. Zdôrazňovanie užitočnosti, t. j. aplikovateľnosti (stredoškolskej) matematiky.
3. Nutnosť ponechania priestoru pre „intuíciu, obrazotvornosť a fantáziu“ žiakov.

Prvé dve myšlienky úzko súvisia. Veď temer každá úspešná motivácia vedie cez potrebu, t. j. cez použiteľnosť. Súhlasím

s autorkou, že žiak, ktorý sa uvedomele chce naučiť matematiku, dosiahne lepšie výsledky ako žiak, ktorého nútime sa učiť proti jeho vôli. Tiež si myslím, že žiak dôjde k snahe naučiť sa matematiku najmä vtedy, ak sa sám presvedčí, že ju potrebuje, t. j., že je pre neho užitočná. Preto by bolo potrebné nielen obohatiť všetku v škole používanú literatúru (učebnice, zbierky úloh, knihy pre samostatnú prácu žiakov – napr. edíciu ŠMM) o vhodné motivačné úlohy, ale aj ich predchnúť duchom aplikovateľnosti, t. j. užitočnosti. Široký priestor pre toto poskytuje a bude poskytovať čoraz viac používanie výpočtovej techniky. (V tejto súvislosti je až zarážajúce, ako sa niekedy autorom školskej matematickej literatúry darí ignorovať jej existenciu.) Myslím si, že je prvoradou povinnosťou autorov všetkých učebných textov z matematiky (v súvislosti s prestavbou stredných škôl je to teraz veľmi aktuálne, pretože množstvo nových textov sa práve rodí) dodržiavať spomenuté zásady. Pritom neslobodno zužovať pole aplikácií matematiky a výpočtovej techniky, ale práve naopak priekopnícky ukazovať možnosti aplikácie matematiky vo všetkých odvetviach ľudskej činnosti, teda nielen vo vedách.

Na rozdiel od autorky nevidím žiaden rozpor medzi akceptovaním „intuície, fantázie a obrazotvornosti“ žiakov v procese zmocňovania sa vedomostí na jednej strane a používania formálnej logiky na strane druhej. Jedno i druhé má svoje miesto vo vyučovacom procese. Intuícia a ostatné spomínané formy žiackej aktivity niekde pri začiatkoch zmocňovania sa danej témy a formalizácia niekde pri konci, pri „žehlení“ výsledkov.

Skôr sa mi zdá, že využívanie intuície, obrazotvornosti a fantázie a aj iných druhov žiackej aktivity, resp. iných progresív-

nych vyučovacích spôsobov je bohužiaľ v rozpore s množstvom času, ktorý máme k dispozícii (resp. v rozpore s množstvom učiva, ktoré musíme prebrať). Práve tento rozpor nás núti hriechne nevyužívať rôzne formy žiackej aktivity a niekedy podávať učivo „ex cathedra“.

*Václav Medek, Bratislava*

Pri čítaní článku dr. Sivošovej mi napadli tieto dve myšlienky:

1. Je už dosť uznávanou skutočnosťou, že ve vyučovaní matematiky by sa mala prvoradá pozornosť venovať motivácii, správnej formulácii a použitiu základných matematických pojmov. Je len samozrejmé, že ak žiak neovláda pojem (napr. nevie, čo to je kruhový valec a nepozná jeho základné vlastnosti), nemôže ho využiť pri riešení konkrétnej reálnej situácie. A iste celé vyučovanie matematiky (ale nielen matematiky) by bolo zbytočné, keby si z neho žiaci neodniesli schopnosti, ktoré môžu použiť pri ďalšom štúdiu alebo v praxi. Hlavnú úlohu treba pritom vidieť v pestovaní takých schopností u žiaka, ktoré mu umožnia konštruovať matematický model reálnej situácie.

Rád by som ale upozornil na to, že tento zámer môže viesť k jednostrannému pohľadu na vyučovanie matematiky. Myslím si, že nestačí iba ovládať pojem, ale treba dostať do pamäti žiaka a v nej udržať niektoré základné faktá. Je triviálne hovoriť napr. o zvládnutí malej násobilky, ale žiak by si mal pamätať aj základné hodnoty trigonometrických funkcií, nejakú približnú hodnotu čísiel  $\pi$  a  $e$ , vzorec pre obsah rovnobežníka, nejakú metódu na riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi a pod. Je pravda, že toto všetko se nájde v príručkách alebo

odpoveď dodá minikalkulačka. Lenže nie vždy máme takéto pomôcky pri sebe a potom tieto vedomosti môžu veľa znamenať. Bolo by treba zvážiť, čo by sa malo od žiakov v tomto smere vyžadovať.

2. Výsledky vyučovacieho procesu podstatne závisia od učiteľa a od učebníc. Ak chceme, aby sa vyučovanie matematiky nieslo v takom duchu, ako je to popísané v článku, je potrebné budúcich učiteľov v tomto duchu vychovávať a potom ich v škole v tomto úsilí podporovať. Existuje dostatok rôznych pedagogických ústavov, ktoré môžu vychovávať učiteľov v tomto duchu. Zároveň je potrebné, aby učitelia dostali konkrétny materiál pre ich novú prácu v škole.

Problematika učebníc je veľmi zložitá. No myslím si, že by stálo za úvahu vyhľadať jedného alebo dvoch skúsených učiteľov matematiky, dať im viacročnú tvorivú dovolenku a poveriť ich vypracovaním učebníc. Veľký autorský kolektív sa nedá ani pri najlepšej vôli skĺbiť tak, aby mohol napísať učebnicu s jednotnou koncepciou, terminológiou a spôsobom výkladu. Ďalej ak má učebnica obsahovať všetky faktá, ktoré sa majú podľa osnov odučiť, a to v predpísanom čase, ťažko žiadať, aby výučba mala taký charakter, ako si to žiada duch tohto článku.

† *Bohumír Parížek*

Otázka aplikovateľnosti a faktickej aplikácie stredoškolského učiva matematiky v ostatných učebných predmetoch strednej školy patrí k najväznejším problémom vyučovania matematiky v súčasnom období. Jeho úspešné riešenie má byť nielen význačným príspevkom k polytechnickej výchove žiakov, ale aj podstatným prínosom pre prípravu absolventov strednej

školy na vysokoškolské technické štúdium (pozri [1], str. 51, 78–79, 97).

Pretože aplikácie matematiky vo všetkých predmetoch technickej povahy vychádzajú prevážne z jej aplikácií vo fyzike, obmedzíme sa v ďalšom na úvahy o aplikácii stredoškolskej matematiky vo fyzike.

Na dosiahnutie uspokojivých výsledkov v tomto smere vplyvajú v súčasnosti najmä dva faktory: dlhotrvajúce zmeny v organizácii vyučovania v súvisi s prechodom na novú výchovno-vzdelávaciu sústavu ako i nerovnomerne postupujúca modernizácia vyučovania matematiky na rôznych typoch stredných škôl a často i na rôznych školách toho istého typu. Obidva tieto dočasné vplyvy, hoci sú nevyhnutné a v podstate pokrokové, pôsobia zatiaľ destabilizačne na vyučovanie matematiky vo všeobecnosti, a tým skôr na úsilie o aplikáciu stredoškolského matematického učiva vo fyzike.

Organizačnou základňou, ale aj katalyzátorom uplatňovania matematických vedomostí žiakov vo fyzike, by mali byť učebné osnovy matematiky a fyziky na jednotlivých typoch stredných škôl. Osnovy môžu direktívne zaistiť správnu nadväznosť jednotlivých tematických celkov a dať učiteľom aspoň heslovité popudy k aplikáciám stredoškolskej matematiky vo fyzike.

V tomto smere, žiaľ, súčasné učebné osnovy spomenutých učebných predmetov nesplňujú svoju úlohu. Tak napríklad žiak prvého ročníka hocktovej našej strednej školy sotva bude môcť riešiť nejakú zložitejšiu úlohu z mechaniky s matematickým aparátom, ktorý má k dispozícii.

No, i keby učebné osnovy stredoškolskej matematiky a fyziky boli z hľadiska aplikácií ideálne zladené, zostane podstatná časť realizácie tejto významnej výchovno-vzdelávacej úlohy na zodpovednosti, eru-

dícii a iniciatíve kolektívov učiteľov matematiky a fyziky. Hovorím tu zámerne o kolektívoch a nie o jednotlivcoch. Učitelia, ktorí vyučujú v tej istej triede matematiku aj fyziku, majú síce v otázke aplikácií istú výhodu, lebo majú trvalý prehľad o prebratom učive v oboch predmetoch a môžu svoju prácu na úseku aplikácií matematických vedomostí žiakov vo fyzike lepšie premýšľať a plánovať. Problém, pred ktorým stojíme, je však príliš vážny a zložitý na to, aby sme jeho riešenie mohli ponechať výlučne na príležitostnú iniciatívu jednotlivcov.

Otázky aplikácií matematických vedomostí žiakov vo fyzike by mali byť pravidelnou súčasťou odborných a metodických seminárov učiteľov matematiky a fyziky aspoň v krajskom meradle. Ak tomu tak dosiaľ nie je, je potrebné riešiť túto otázku v kolektívoch učiteľov matematiky a fyziky aspoň na úrovni školy, a to aj bez zvolávania oficiálnych porád.

Profesor fyziky musí bezpodmienečne vedieť, aký matematický aparát môže používať, aby žiaci porozumeli jeho výkladu. Musí byť teda informovaný o skutočných matematických vedomostiach priemerného žiaka triedy a nespoliehať sa na maximum vedomostí supponované učebnými osnovami.

V kolektíve učiteľov matematiky a fyziky sa treba poradiť, čo a ako na fyzike z matematiky doplniť, čo, ako a v akom rozsahu prebrať z látky, ktorá sa v matematike preberá neskoršie, než to fyzik potrebuje.

Vecne a metodicky dôležité a výchovne významné je, aby pojmy, ktoré sa používajú v oboch predmetoch, boli jednotne definované. Výroky ako „Na matematike ste to mali tak, ale my to budeme brať takto“ alebo opačne, sú hrubé didaktické omyly, a nemali by sa v modernej škole

pri vyučovaní prírodných vied vyskytovať. V tejto súvislosti je napr. závažnou aj otázka vektorovej povahy mnohých fyzikálnych veličín a otázka rozmerov veličín. Ak riešime na hodine matematiky fyzikálne úlohy, nemožno sa nad takéto otázky, ktoré majú pre fyzika alebo technika často podstatný význam, jednoducho bez poznámky veľkomyselne preniesť. (Tak napríklad po stránke rozmerovej nie je ani pohybová úloha v článku [2] v poriadku, ak sa k nej neuvedie komentár. Každý technik sa totiž ohradí, že rovnica  $s = f(t)$  rozmerove „nesedí“.)

Pri odvodzovaní fyzikálnych zákonitostí by sa nemali používať matematické postupy, ktorým žiak nerozumie alebo ktoré sú matematicky nesprávne a predsa vedú k správne fyzikálnemu výsledku. V takých prípadoch, kde sa nevystačí s matematickým aparátom, ktorý sú žiaci schopní pochopiť, je oveľa lepšie povedať „dá sa dokázať“ alebo „možno odvodiť“ a uviesť výsledok. Nemožno, pravda, prejsť ani do druhého extrému a redukovať fyziku iba na popis javov a súbor vzorcov. Treba však mať na pamäti, že napriek snahám, ktoré sú zrejmé z učebných osnôv matematiky pre stredné školy, presunúť do učiva strednej školy časti tradičného vysokoškolského učiva, nie je matematický aparát žiakov vzhľadom na fyzikálne aplikácie nijako rozsiahly. Chýbajú napr. (okrem iného) také potrebné partie ako množné, krivkové a plošné integrály, ako aj elementy vektorovej analýzy.

Pri matematickom riešení úloh s fyzikálnym obsahom by mali profesori fyziky aj matematiky dbať na to, aby žiaci svoje počtárske vedomosti z matematiky používali tak, ako sa to na matematike naučili. Veľmi často ide napr. o riešenie rovníc alebo sústav rovníc, ktoré obsahujú para-

metre nadobúdajúce hodnoty z nejakej číselnej množiny určenej fyzikálnymi podmienkami úlohy. Učiteľ by nemal dopustiť, aby žiak riešil úlohu „po starom“, bez ohľadu na tieto podmienky a z formálneho riešenia, prípadne i viacznačného, si „fyzikálnymi“ úvahami určoval konečný výsledok riešenia úlohy.

Medzi vážne otázky pri aplikáciach matematiky vo fyzike je aj počítanie s t. zv. približnými číslami. Žiaci, ktorí nie sú v tomto smere dôsledne vedení, majú veľmi často sklon nerešpektovať chyby, ktorými bývajú zafaržené vstupné číselné údaje úlohy.

Na záver chcem zdôrazniť, že vzhľadom na prípravu stredoškolača na vysokoškolské technické štúdium patrí otázka dobrej koordinovanosti vyučovania matematiky a fyziky na strednej škole medzi zásadné. Nie je náhoda, že mnohí starí matematici boli dobrými fyzikmi a obrátene, ani to, že vo všetkých vyspelých krajinách existujú matematicko-fyzikálne fakulty alebo im podobné inštitúcie. Tesná súčinnosť týchto dvoch vedných odborov je totiž jedným zo základných predpokladov teoreticky fundovaného technického výskumu, bez ktorého nie sú možné špičkové technické výkony a objavy. Základy k tomuto vednému súručenstvu treba položiť už na strednej škole. Ak sa tu medzi nimi namiesto toho začne kopať priepasť, ťažko sa ju neskôr podarí preklenúť.

#### Literatúra

- [1] *Ďalší rozvoj československej výchovno-vzdelávacej sústavy*. Čiastkové projekty, SPN Bratislava, 1978.
- [2] A. Sivošová: *Niekoľko úvah o užitočnosti matematiky*. Rukopis článku.