Rózsa Péter

Matematika je krásná

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 36 (1991), No. 2, 65--72

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139667`

Matematika je krásná

Rózsa Péterová

Maďarská matematička Rózsa Péterová (1905—1977) je považována za jednu z hlavních osobností, které stály u zrodu teorie rekursivních funkcí. Její kniha *Rekursivní funkce* (1951) byla nejen první knihou v tomto oboru, ale stala se i standardní referencí. Od poloviny 50. let se začala zabývat použitím rekursivních funkcí v teorii počítačů. Tato etapa její práce vyvrcholila vydáním její poslední knihy *Rekursivní funkce v teorii počítačů* (1976). Kromě výzkumné práce se věnovala také metodice výuky matematiky. Pracovala na přepracování osnov matematiky na základních i středních školách, psala učebnice. Široké veřejnosti je známa jako autorka knihy *Hra s nekonečnem*, která je populárním úvodem do mnoha oblastí matematiky od analytické geometrie ke Gödelově větě o neúplnosti. Kniha byla přeložena nejméně do 14 jazyků.

Za vědecké úspěchy jí byla v roce 1951 udělena Kossuthova cena, v roce 1952 jako první žena v Maďarsku obhájila doktorskou práci v oboru matematika. V roce 1953 jí byla udělena cena Bolyaiovy matematické společnosti a v roce 1973 se stala členkou korespondentkou Maďarské akademie věd, opět jako první žena v oboru matematika.

Vážení posluchači,

chtěla bych vás svou přednáškou přesvědčit o tom, že matematika je krásná. V době, kdy jsem začínala studovat, jsem si nebyla jistá, zda se na studium matematiky hodím, zda jsem na to dost dobrá. Během studia jsem však pochopila: nejde o to, jakou cenu mám já pro matematiku, ale o to, jakou cenu má matematika samotná a že stojí za to, aby se jí člověk věnoval. Sama o sobě pochybuji často ještě dnes, přes profesuru a všechny ceny, které jsem během života získala. Nikdy jsem však nepochybovala o tom, že bych mohla dělat něco lepšího a krásnějšího, než je matematika.

O tom bych tu však mluvit nechtěla. Všechno, co mohu o matematice říci z hlediska nematematika nebo nehotového matematika, jsem už napsala. Moje kniha byla přeložena do němčiny a tady, v NDR, vychází právě už ve třetím vydání. Musím proto předpokládat, že někteří z vás už ji mohli číst. Ve své přednášce nechci proto opakovat nic z toho, co už jsem napsala. Nebylo však pro mě jednoduché najít něco nového, co by s mým tématem třeba jen volně souviselo. Kdyby se však ukázalo, že nikdo z vás moji knihu nečetl, nemohla bych už na své přednášce změnit vůbec nic. Neumím totiž tak dobře německy, abych mohla improvizovat. Jak vidíte, dělám tady reklamu své knize *Hra s nekonečnem*.*) O tom, jak je matematika krásná, se z ní dozvíte mnohem víc než z mé přednášky.

RÓZSA PÉTER: *Das Spiel mit dem Unendlichen*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955. Anglický překlad *Playing with Infinity* vydalo nakladatelství Dover Publications. Český překlad *Hra s nekonečnem; matematika pro nematematiky*. Přeložila BARBARA KÖPPLOVÁ, MF 1973.

Tento článek byl převzat z časopisu The Mathematical Intelligencer, roč. 12, 1990, č. 1, 58—64. Je to upravený záznam autorčiny přednášky ke středoškolským učitelům a studentům, kterou proslovila v Rostocku v roce 1963. Původní verze byla uveřejněna v Mathematik in der Schule 2 (1964), 81—90. Přeložila HELENA NEŠETŘILOVÁ.

Někteří z vás si už od začátku určitě myslí: jedna plus dvě, to je přece nuda. Jak může někdo tvrdit, že je na tom něco krásného? Chtěla bych vás přesvědčit, že matematika není jedna plus dvě, že to není nuda a že má mnoho společného s uměním.

Abstrakce

Představa, že matematik hlavně počítá, je velké nedorozumění. Vybírám si matematicky založené studenty touto hádankou: máme dvě zcela stejné sklenice. Do jedné z nich nalejeme víno, do druhé vodu. Naplníme je stejně vysoko, ale ne až po okraj. Nabereme lžíci vína z první sklenice, přelejeme ji do sklenice s vodou a zamícháme. Lžici této směsi nalejeme zpátky do sklenice s vínem. Nakonec je tedy trochu vína ve sklenici s vodou a trochu vody ve sklenici s vínem. Čeho je víc, vína ve vodě nebo vody ve víně?

Na této hádance není podstatné to, zda dokážete správně odpovědět. (Je v tom malý háček, na který se mnoho lidí chytí. Myslí si totiž: lžíce vína se dostane do vody, ale směs vína a vody, tedy ne plná lžíce vody, se dostane do vína.) Podstatné je, zda vás vnitřně přesvědčí toto vysvětlení.

Tvrdíme, že ve víně je právě tolik vody jako vína ve vodě. Uvažme totiž třeba sklenici s vínem na začátku a na konci bez ohledu na to, co se s ní dělo mezitím. Kapalina ve sklenici je na začátku i na konci přesně stejně vysoko. Rozdíl je pouze v tom, že ve sklenici ubylo vína (to je teď ve sklenici s vodou) a přibylo vody. Kdyby byl úbytek větší (nebo menší) než přírůstek, pak by kapaliny ve sklenici bylo buď méně (nebo více) než na začátku. Proto je úbytek, tj. množství vína, které je teď ve vodě, přesně stejně velký jako přírůstek, tj. množství vody, které je teď v víně.

Člověk, který uvažuje méně matematicky, dejme tomu fyzik, nebude tímto jasným a logickým vysvětlením stále ještě přesvědčen. Bude spokojen, až když se začne počítat. Jestliže jsou ve lžíci směsi například tři čtvrtiny vody a čtvrtina vína, pak ze lžíce vína, které jsme přemístili do sklenice s vodou, vracíme zpět čtvrtinu lžíce. Do vína jsme tedy přemístili tři čtvrtiny lžíce vody a ve vodě zůstalo tři čtvrtiny lžíce vína.

Pro matematika není charakteristické to, že počítá, ale to, že jasně uvažuje a je schopen odhlédnout od nepodstatných věcí.

A ještě jedna úloha, ve které se neobjeví žádná čísla a která vyžaduje pouze abstraktní myšlení, tedy schopnost neuvažovat věci, které jsou pro danou otázku důležité. (Právě to dělá z této úlohy vhodné matematické cvičení.)

Vlak projíždí tunelem. Otevřeným oknem se do kupé dostane kouř a ušpiní nosy všech tří cestujících. Ti se po sobě podívají a rozesmějí se. Každý z nich si myslí, že právě on měl to štěstí a sedí tak, že se mu nos neumazal. Jak nejchytřejší z těch tří pozná, že i on sám má špinavý nos? Může přitom vycházet jenom z těchto tří předpokladů: 1. žádný jiný důvod k smíchu není; 2. ani jeden ze zbývajících dvou cestujících se nepřestává smát; 3. kdyby někdo věděl, že i on sám má špinavý nos, nesmál by se.

Najít řešení není tak úplně jednoduché. Ani tady však není podstatné, zda úlohu vyřešíte sami. Podstatné je to, že člověk, které není matematicky založen, se neomezí na výše uvedené předpoklady. Často jsem dostávala odpovědi jako „nejchytřejší se podívá do zrcadla" nebo „nejchytřejší si myslí: ostatní mají špinavé nosy, proč já bych měl být výjimkou". Správné řešení umím nejlépe vysvětlit v první osobě. Odpusťte mi tedy, že si vyberu roli toho nejchytřejšího. Zbývajícím dvěma cestujícím budu říkat Zdeněk a Honza. Uvažuji takto: Zdeněk má důvod se smát, protože vidí Honzův nos. Vidí však také, že i Honza se směje. Proč ho tedy nenapadne, že i on sám má špinavý nos? Proto (jinak by na tom z Honzovy strany nebylo nic směšného), že i já mám špinavý nos. Musí to tak být, protože Honza se směje a ani Zdeněk se nepřestává smát.

Základem axiomatického budování matematiky je právě umění držet se daných předpokladů. Důležitost takového přísně logického přístupu k matematice ozřejmila také skutečnost, že se v takzvané „naivní" matematice objevila sporná tvrzení. Vrátím se k tomu později. Na tomto místě bych chtěla zdůraznit jenom to, že axiómy nikdy nevystihují všechny vlastnosti objektů, ale pouze některé z nich. Může se proto stát, že i zcela rozdílné objekty splňují stejné axiómy. V takovém případě říkáme, že existují různé „modely" uvažované soustavy axiómů. Některé příklady jsem uvedla ve své knize, nebudu se k nim proto znovu vracet.

Abstrakce hraje v celé matematice základní roli. Vždyť i naše přirozená čísla vznikla abstrakcí. Je známo, že primitivní národy používaly jiná čísla pro počítání silných předmětů, *jiná* pro počítání plochých předmětů, atd. Dejme tomu, že měly celkem sedm takových číselných soustav. Pro počítání od jedné do deseti bylo tedy třeba vytvořit sedmdesát různých slov! Například ploché mušle představovaly v kmeni platidla a lidé původně počítali ploché předměty (ve svém jazyce) takto: „jednamušle, dvěmušle, atd." Během doby ztratily mušle svoji tehdejší roli, takže dnes „jednamušle" znamená prostě „jedna", „dvěmušle" znamená „dvě", atd.

Všimněte si, jak si pojem čísla vytváří dítě. Jak dlouho to trvá, než pochopí, že společnou vlastností „dvouočí", „dvounohou" a „dvouořechů" je jejich počet. Ta obyčejná značka 2 je jenom symbolem pro všechny skutečné dvojice. Uvidíme-li ji, měli bychom si něco představit, třeba všechny dvojice na světě, jak pochodují na archu Noemovu: dva holubi, dvě jehňata, dva lvi, ale také dvě nohy, dvě slova, atd.

Můžeme to shrnout takto: Lidé se dostali k abstraktnímu pojmu čísla přes živé a krásně barevné věci, ale matematika se už vlastně zabývá jenom tím šedivým pojmem čísla. Co však matematika na jedné straně ubere, to na druhé straně bohatě vynahradí. Obrázek, který ztratil barvy, dokáže obarvit novými, překvapivými tahy štětce. Třeba šest jablek nebo šest králíčků je jistě mnohem zajímavějších než šestka, která z nich vznikla abstrakcí a se kterou počítáme. Jak osobitý a nevšední tah štětcem však tahle šestka získá, když zjistíte, že je to nejmenší perfektní číslo. Možná, že někteří z vás tento pojem neznají: vlastní dělitel čísla je číslo, které je menší než toto dané číslo a které je beze zbytku dělí. Říkáme, že číslo je p e r f e k t n í, jestliže je součtem svých vlastních dělitelů. K našemu příkladu: čísla 1, 2 a 3 představují všechny vlastní dělitele čísla 6 a navíc skutečně platí, že

$$1 + 2 + 3 = 6 .$$

Objevování

Objevovat, to je snad největší lidská radost. Žádná jiná oblast lidského poznání ji nemůže nabídnout v takové míře jako matematika. Školáci, které jsem dříve učila, byli na tohle vždycky vnímaví a já jsem se tím zase naučila mnoho od nich. Nikdy by mě například nenapadlo mluvit ve třídě dvanáctiletých děvčat o Eukleidově algoritmu. Moje žákyně mě však k tomu donutily. Dovolte mi, abych tuhle vyučovací hodinu připomněla.

Hodina probíhala tak, že jsem zadala dvě čísla a děvčata měla najít jejich největšího společného dělitele. Pro malá čísla to šlo rychle. Postupně jsem však vybírala stále větší čísla, protože jsem chtěla, aby to děvčatům dělalo potíže a aby se snažila najít nějakou metodu. Myslela jsem si, že tou metodou bude rozklad na prvočísla.

Největšího společného dělitele čísel 60 a 48 našla ještě snadno: „Dvanáct!" V tom si však jedno děvče všimlo: „Vždyť je to totéž jako rozdíl čísel 60 a 48."

„To je ale náhoda," povídám a chci pokračovat. Děvčata mě však pokračovat nenechala. „Řekněte nám, prosím, nějaký příklad dvou čísel, která tuhle vlastnost nemají."

„Třeba 60 a 36. Jejich největší společný dělitel je také 12, ale jejich rozdíl je roven 24."

Další poznámka: „Teď je však rozdíl dvakrát větší než největší společný dělitel."

„Dobře, chcete-li to vědět, skutečně to není náhoda. Rozdíl i součet dvou čísel jsou vždycky dělitelné jejich největším společným dělitelem." Tohle všechno jsem jim říci musela. Potom jsem však skutečně chtěla pokračovat. Avšak nepodařilo se mi to. Jedna dívka se zeptala: „Nedala by se takhle najít metoda k určení největšího společného dělitele?"

Samozřejmě, dala! Vždyť právě tohle je hlavní myšlenka Eukleidova algoritmu! A tak jsem opustila svůj plán a nechala se vést tam, kam chtěly moje žákyně.

Uvědomte si, proč je například těžké najít největšího společného dělitele čísel 116 a 36. Proto, že číslo 116 je nepříjemně velké. Teď už však víme, že největší společný dělitel dvou čísel dělí také jejich rozdíl. Dělí tedy číslo 80, které už je menší než 116. Na druhé straně víme, že jakékoli číslo, které dělí čísla 80 a 36, dělí také jejich součet, tedy 116. To znamená, že stačí hledat největšího společného dělitele čísel 80 a 36. Pokud by se někomu zdálo, že jsou tato dvě čísla ještě pořád příliš velká, může zase vzít jejich rozdíl, tedy číslo 44, místo 80. Největší společný dělitel čísel 44 a 36 se už hledá mnohem lépe. Chce-li si to někdo však ještě více usnadnit, může vzít zase rozdíl, tj. 8, místo 44. Potom rozdíl mezi 36 a 8, tj. 28, místo 36; rozdíl mezi 28 a 8, tj. 20, místo 20 a nakonec rozdíl mezi 12 a 8, tj. 4, místo 12. Tím jsme hotovi, protože je na první pohled zřejmé, že 4 je největší společný dělitel čísel 4 a 8.

Požadovanou metodu měla tedy děvčata k dispozici: stačí zmenšovat čísla odčítáním tak dlouho, až se nalezení největšího společného dělitele stane hračkou.

Všechno to odčítání začalo žákyně brzy nudit. Všimly si navíc, že je to zbytečné. V našem příkladě jsme třeba od čísla 116 postupně třikrát odečetli číslo 36, až zbyla 8. Tuto 8 jsme pak postupně čtyřikrát odečetli od 36, až zbyla 4. To proto, že 36 je ve 116 obsaženo třikrát se zbytkem 8 a 8 je v 36 obsaženo čtyřikrát se zbytkem 4. Místo postupného odčítání stačí tedy jednou dělit a větší číslo okamžitě nahradit zbytkem tohoto dělení. A tím je metoda na světě.

Chtěla bych k tomu ještě poznamenat, že inteligentní děti ve školním věku nemusí v matematice jen znovu objevovat známé výsledky. Znám dítě, kterému bylo dvanáct let, když mu matematický časopis uveřejnil jeho původní matematický výsledek. Takový výsledek, který už do školy nepatří. V jiné vědní disciplíně by se něco takového asi přihodit nemohlo.

Lidé vytvořili přirozená čísla, aby mohli počítat. Jednou jsou však tady a mají svá vlastní pravidla, která nikdo nevymýšlel a která už se nedají změnit. Matematici je mohou pouze postupně objevovat. Dokonce i moji studenti objevili často něco, co mě samotnou vůbec nenapadlo. Chtěla bych vám povědět ještě jeden takový příklad.

Řekla jsem své oblíbené třídě, že matematik, který počítá pomalu, může často předhonit i moderní kalkulačky, které tak neuvěřitelně rychle řeší komplikované aritmetické úlohy. Musí však znát jisté matematické vztahy. Chtěla jsem jim mimo jiné ukázat, jak se dá rychle vypočítat součet

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\frac{1}{4\,.\,5}+\frac{1}{5\,.\,6}$$

i každý jiný součet, který vznikne přidáním dalších podobných členů. Požádala jsem studenty, aby si tato čísla pozorně prohlédli. Domnívala jsem se, že si třeba někdo všimne, že

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\,.$$

Potom lze uvedený součet zapsat takto

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\,.$$

V tomto výraze se kromě prvního a posledního členu všechny ostatní členy ruší. Lze tedy okamžitě odpovědět, že

$$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\,.$$

Jedna dívka si však všimla něčeho úplně jiného. S rychlým sčítáním to sice nemělo nic společného, bylo to však samo o sobě zajímavé. Všimla si totiž, že jmenovatelé zlomků v uvedeném příkladě (bez ohledu na to, k čemu mají být vlastně použity) obsahují členy

$$1\,.\,2,\ 2\,.\,3,\ 3\,.\,4,\ 4\,.\,5,\ 5\,.\,6,\ 6\,.\,7,\ 7\,.\,8,\ 8\,.\,9,\ 9\,.\,10,\ \ldots$$

a uvědomila si, že provádíme-li libovolně dlouho naznačené násobení, dostáváme čísla, jejichž poslední číslice se pravidelně opakují

$$2\ 6\ 2\ 0\ 0\ 2\ 6\ 2\ 0\ \ldots$$

Platí to skutečně vždycky a obecný důkaz není těžký. Možná, že si ho někdo z vás bude chtít po přednášce rozmyslet.

Sporná tvrzení a axiomatika

O sporných tvrzeních jsem se už zmínila. Chtěla bych se teď zastavit u jednoho z nich, které má v sobě cosi hravého a kterému se říká Richardův paradox.

Představte si psací stroj s českou klávesnicí. Předpokládejme, že je na něm třeba 95 různých znaků. Mezi tyto znaky zahrneme i mezeru. Představte si, že se ke stroji dostane opice a začne psát. Většina textů (třeba se 100 znaky), které opice napíše, nebude mít smysl. Náhodně však může vzniknout i smysluplný text. Mezi takovými texty s délkou 100 znaků budou například všechna (pravdivá i nepravdivá) svatební oznámení, protože ta mají vždy mnohem méně než 100 znaků a oddělující mezery (až do 100 znaků) lze do textu také zapsat. Různých textů se 100 znaky je velice mnoho, jejich celkový počet je však konečný: pro volbu prvního znaku je 95 možností, pro každou z těchto voleb lze druhý znak vybrat 95 způsoby, takže pro volbu prvních dvou znaků je celkem 95 krát 95 možností, atd. Z toho je zřejmé, že celkový počet různých textů se 100 znaky je roven číslu 95^{100}. To je sice veliké, ale konečné číslo. Mezi takovými texty se 100 znaky jsou i definice přirozených čísel. Číslo 3 lze například definovat textem: „Nejmenší liché prvočíslo". (A doplnit příslušným počtem mezer.) Každé přirozené číslo se však nedá definovat textem se 100 znaky, protože přirozených čísel je nekonečně mnoho. Uvažme nejmenší přirozené číslo, které není možné definovat pomocí 100 znaků. Definuji: „Nejmenší přirozené číslo, které není možné definovat pomocí 100 znaků." Chcete-li, můžete se přesvědčit, že tato definice má 70 znaků, takže zapíšeme-li po ní 30 mezer, má celý text přesně 100 znaků. To však znamená, že číslo, které nelze definovat pomocí 100 znaků, se pomocí 100 znaků definovat dá. V tom spočívá Richardův paradox.

Snad vás tohle sporné tvrzení přesvědčí, že matematika není tak nudná, jak si mnozí myslí.

Přesnou axiomatickou výstavbou matematiky chceme především vyloučit možnost takových sporných tvrzení. Pojmy, o kterých se v axiómech hovoří, neznamenají nic konkrétního. Může to být cokoli, co má vlastnosti, které se v axiómech požadují. Přitom však každý, kdo s nimi pracuje, si tajně představuje něco konkrétního. Už jsem se tu zmínila o tom, že stejnou soustavu axiómů mohou splňovat různé konkrétní modely.

Forma (tedy formální pravidla) matematice často pomáhá nalézt nový obsah. Budu teď například předpokládat, že lidé znají jenom reálná čísla. Lidé však také odvodili obecné vzorce, tzv. Cardanovy vzorce, pro řešení kubických rovnic. Použijeme-li je třeba na rovnici

$$x^3 - 6x - 4 = 0\,,$$

dostaneme

$$x = {}^3\sqrt{(2 + \sqrt{(-4)})} + {}^3\sqrt{(2 - \sqrt{(-4)})}\,.$$

Objevila se tu (dokonce dvakrát) $\sqrt{(-4)}$, která nemá smysl, protože druhou odmocninu ze záporného čísla spočítat neumíme. Asi bychom se v tomto případě přikláněli k názoru, že daná rovnice nemá řešení.

Vyzkoušíme-li však několik malých celých čísel, přijdeme na to, že $x = -2$ je řešením naší rovnice; zkuste si to, prosím, sami ověřit.

Není možné dostat toto řešení z Cardanových vzorců?

Podíváme-li se pozorně na výsledek, který jsme z těchto vzorců dostali, zjistíme, že výraz $\sqrt{(-4)}$ se tu jednou objeví se znaménkem plus a jednou se znaménkem minus. Kdyby se naznačené operace provedly, měli bychom naději, že se obě nesmyslné hodnoty zruší. Jak však provádět operace s něčím, co nemá smysl? Zkusme je provést podle původních formulních pravidel. Pro naši rovnici tím dostaneme řešení, které jsme očekávali ($x = -2$) a ještě dvě další řešení. Formální pravidla nám v tomto případě pomohla pochopit, že je užitečné rozšířit pojem čísla o tzv. imaginární čísla (jako je třeba $\sqrt{(-4)}$) a pomohla tím na svět nové matematické disciplíně.

Nekonečno

Z mnoha styčných bodů mezi uměním a matematikou bych chtěla připomenout alespoň jeden – střetávání se s nekonečnem. Patří k těm, které nás nejvíce přitahují a vzrušují.

Začnu příkladem z literatury. Thomas Mann v knize *Josef a bratří jeho* píše:

Studnice minulosti jest hluboká. Neměli bychom o ní říkati, že vůbec nemá dna? A to tím spíše tehdy a snad právě tehdy, je-li to jen a výhradně lidská bytost, o jejíž minulosti mluvíme a na niž se ptáme... A tu se právě stává, čím hlouběji kutáme, čím dále pronikáme dolů do podsvětí minulosti a v něm tápáme, že se nám prapříčiny lidství, jeho dějin a jeho mravů jeví naprosto nezbadatelnými a že vždy opět a dále unikají do bezedna před naší olovnicí, ať již rozvinujeme motouz do jakýchkoli dobrodružných časových dálek. Věru, slov „opět a dále" jest zde použito správně; neboť věci nezbadatelné provádějí s naší badatelskou zvídavostí jakousi škádlivou hru: ukazují jí zdánlivé opory a mety, za kterými, dosáhneme-li jich, se otvírají nové cesty do minulosti.*)

A jak je to v matematice? Moje kniha, kterou se tady bráním citovat, je věnována právě záležitostem, které s nekonečném souvisí. Uvedu tady alespoň jeden příklad, který v mé knize není. Chtěla bych vám na něm ukázat, jak se s úzkostí, kterou v nás nekonečno vzbuzuje, dokáže vypořádat matematika.

Představte si, že se vás někdo zeptá: „Cihla váží 1 kilogram a polovinu cihly. Jaká je váha cihly v kilogramech?"

Jedna z možností, jak začít, je tato: Cihla tedy váží 1 kilogram a polovinu cihly. Polovina cihly však váží $\frac{1}{2}$ kilogramu a poloviny své váhy, to je čtvrt cihly. Čtvrtina cihly váží $\frac{1}{4}$ kilogramu a polovinu své váhy, to je osminu cihly, atd. Cihla tedy váží

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}$$

kilogramu a osminu cihly. Tak lze pokračovat

---

*) Uvedený výňatek z knihy T. Manna, *Josef a bratří jeho*, byl převzat z překladu I. Olbrachta a H. Malířové, SNKLHU 1959.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \dots \text{ ad infinitum}.$$

Na druhé straně je však jasné, že položíme-li na jednu misku vah cihlu a na druhou misku kilogramové závaží a půl cihly, bude váha v rovnováze. Polovina cihly vpravo vyvažuje polovinu celé cihly vlevo. Kilogramové závaží vpravo musí tedy vyvažovat druhou polovinu celé cihly vlevo. To znamená, že polovina cihly váží 1 kilogram a celá cihla musí tedy vážit 2 kilogramy. To nás zbaví strachu ze sčítání nekonečné řady. Je vidět, že součet

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \dots \text{ ad infinitum}$$

je roven přesně 2.

Čistá(?) matematika

Měla bych možná skončit tak, jak se to dělává v hudbě: návratem k hlavní melodii. Někdo by mi však mohl vyčítat, že hovořím o matematice a vůbec jsme se nezmínila o jejím praktickém použití. Myslím však, že v tomto směru matematika žádnou slovní obranu nepotřebuje. Každý dobře ví, že matematika je nerozlučně spjata s každou lidskou činností, o vědě to pak platí dvojnásobně. Ty, kteří sice uznávají, že je matematika užitečná, ale připadá jim nezábavná, prostě takové nutné zlo, bych chtěla přesvědčit následujícím příkladem. Já sama se zabývám tzv. teorií rekursivních funkcí. To je oblast, která vznikla pro vnitřní potřebu matematiky. Nikdy mě ani nenapadlo, že by se tato teorie dala prakticky použít. A dnes? Moje kniha o rekursivních funkcích byla druhá maďarská matematická kniha, která byla vydána v Sovětském svazu. Důvody, které k tomu vedly, byly čistě praktické. Teorie rekursivních funkcí se totiž stala velice důležitá v teorii počítačů. S každou oblastí takzvané čisté matematiky se dříve nebo později stane totéž. Chtěla jsem ve své přednášce ukázat, že do matematiky se člověk může zamilovat. Chtěla bych tedy na závěr dodat: a nemusí se přitom bát, že dělá něco neužitečného.