

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Dianzhou Zhang

C. N. Yang a současná matematika

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 39 (1994), No. 6, 305--317

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139547>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1994

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

C. N. Yang a současná matematika

D. Z. Zhang

C. N. YANG je jedním z velkých teoretických fyziků dvacátého století, který v roce 1957 získal spolu s T. D. Leem Nobelovu cenu za fyziku za společný příspěvek k objevu nezachování parity. Matematikům je však nejvíce znám díky Yangově-Millsově teorii a Yangově-Barterově rovnici. Spolu s Einsteinem a Diracem patří Yang k těm fyzikům, kteří měli pravděpodobně největší vliv na rozvoj matematiky ve 20. století. V roce 1991 jsem měl příležitost s Dr. Yangem hovořit; tento článek je založen na mých poznámkách z těchto rozhovorů a také na Yangových článcích a knihách.

Yangovo setkání s S. S. Chernem

C. N. Yang se narodil v roce 1922 ve městě Hefei ve východní Číně. Jeho otec, K. C. Yang (Jang Kuo-Čchien, známý též jako W. C. Yang), byl profesorem matematiky na univerzitě Qinghua v Peking¹⁾ a později na Fudanské univerzitě v Šanghaji. Yang senior získal doktorát v oboru teorie čísel na Chicagské univerzitě v roce 1928 pod vedením L. E. Dicksona. K. C. Yang byl v Číně jedním z průkopníků výuky moderní matematiky; vychoval řadu talentovaných studentů. Z nich se později stali známými např. Loo-Keng Hwa²⁾ a S. S. Chern³⁾.

ZHANG: Kdy jste se poprvé setkal s profesorem Chernem?

YANG: *Nepamatuji se, zda jsem se s ním setkal v letech 1930 až 1934, když byl doktorandem na Qinghuaské univerzitě v Bejingu, kde byl můj otec profesorem matematiky. Pamatuji si však, kdy a jak jsem se poprvé setkal s paní Chernovou. Bylo to na začátku října 1929. Její otec, profesor Tsen, byl profesorem matematiky na Qinghuaské univerzitě řadu let a naše rodina se právě přistěhovala. Bylo mi tenkrát 7 let a chodil jsem do základní školy. Tsenovi nás pozvali do svého domu na večeři a tenkrát jsem se poprvé seznámil s „velkou Tsenovou sestrou“. Rodiny Tsenů a Yangů se velmi spřátelily a pro mé rodiče bylo velkým potěšením patřit mezi „uavaděče“ na svatbě Chernových v Kunmingu v roce 1939.*

¹⁾ Čínský oficiální přepis Bejijing, výslovnost Pejčing.

²⁾ Čti Chua Luo-Keng.

³⁾ Čti Čchen Šeng-Šen.

ZHANG: Když jste byl v letech 1938–1942 studentem fyziky na Qinghuaské univerzitě, učil vás matematiku Chern?

YANG: *Chern se vrátil do Číny v době japonské invaze. Tehdy se Qinghuaská univerzita sloučila s Beijingskou a Nankaiskou univerzitou a vytvořila na dobu války Národní jihozápadní spojenou univerzitu (National Southwest Associated University) v Kunmingu. Chern učil na této univerzitě 6 let, 1937–1943. Byl skvělým a oblíbeným profesorem. Nejprve jsem byl studentem a později doktorandem na této univerzitě. Mám velice krásné vzpomínky na svá studentská léta a jsem hluboce vděčný za vynikající vzdělání, které jsem zde získal.*

Pravděpodobně jsem si zapsal několik přednášek profesora Cherna, avšak moje dochované poznámky ukazují, že jsem chodil pouze na jednu jeho přednášku, totiž na diferenciální geometrii. To bylo na podzim roku 1940, když jsem byl ještě mladík.

ZHANG: Byl pro vás tento kurz užitečný?

YANG: *Samozřejmě. Ale dnes si na tuto přednášku příliš nevzpomínám. Pouze jedna věc mi utkvěla v mysli: jak dokázat, že každá dvojrozměrná plocha je konformně ekvivalentní s rovinnou oblastí. Dovedl jsem upravit metriku na tvar $A^2 du^2 + B^2 dv^2$, avšak po dlouhou dobu jsem nebyl schopen pokročit dál. Když mi Chern řekl, abych použil komplexní proměnné a napsal $C dz = Adu + iBdv$, bylo to pro mne jako úder blesku, na který nikdy nezapomenu.*

ZHANG: Kdy jste přijel do Spojených států?

YANG: *V listopadu 1945. Doufal jsem, že ve Spojených státech budu studovat u Fermiho nebo u Wignera. Nezastihl jsem však Fermiho na Kolumbijské univerzitě, kde ještě před rokem 1942 působil. Podobně jsem v Princetonu ke své hluboké lítosti zjistil, že ani Wigner nebude po celý příští rok k zastížení. Naštěstí jsem se dozvěděl, že Fermi přešel do nově založeného vědeckého ústavu v Chicagu. Proto jsem se začal ucházet o doktorát na univerzitě v Chicagu.*

ZHANG: Chern tam byl dlouhou dobu profesorem.

YANG: *Ano, ale až po tom, co jsem v roce 1949 z Chicaga odešel. Po Chernově návratu do Spojených států na počátku roku 1949 jsme se stýkali velice často v Princetonu, Chicagu a Berkeley.*

ZHANG: Hovořili jste o fibrovaných bandlech?

YANG: *Až do sedmdesátých let ne. Naše dřívější kontakty byly jen společenské. Mluvili jsme spíše o matematicích, ne o matematice.*

Yangův-Millsův článek z roku 1954

Během doktorandského studia v Kunmingu a Chicagu učinila na Yanga silný dojem skutečnost, že kalibrační invariance určuje všechny elektromagnetické interakce. To bylo známo z prací, které v letech 1918–1929 publikovali Weyl, Fock a London, a také z pozdějšího Pauliho přehledového článku. Avšak tato skutečnost hrála ve čtyřicátých a na počátku padesátých let ve fyzice jen malou a technickou roli. V Chicagu se Yang

pokoušel zobecnit pojem kalibrační invariance na neabelovské grupy [kalibrační grupa v teorii elektromagnetického pole je abelovská grupa $U(1)$]. Nejdříve začal zkoumat analogie Maxwellových rovnic ve tvaru

$$(1) \quad F^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial B^{\alpha}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial B^{\alpha}_{\nu}}{\partial x_{\mu}},$$

což se mu zdálo být přirozeným zobecněním Maxwellových rovnic. „Vedlo to ke zmatku a já se musel vzdát.“ [1], str. 19.

V roce 1954, při svém pobytu v Brookhavenské národní laboratoři na Long Islandu v New Yorku, se Yang vrátil ještě jednou k myšlence zobecnit pojem kalibrační invariance. Místnost s ním sdílel R. L. Mills, který právě dokončoval své Ph. D. na Kolumbijské univerzitě. Yang zasvětil Millsa do svých úvah o neabelovském kalibračním poli a oba se rozhodli přidat kvadratický člen na pravou stranu (1). Tento člen odstranil „zmatek“ a vedl k nové a krásné teorii pole. V létě 1954 pak poslali článek do Physical Review; byl publikován v říjnu téhož roku pod názvem *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance* [2]. Mills později o tomto období napsal:

Během školního roku 1953–1954 byl Yang hostem Brookhavenské národní laboratoře... byl jsem rovněž v Brookhavenu... a byl jsem přidělen do stejné místnosti jako Yang. Yang, který v řadě případů prokázal svou šlechtnost k mladým fyzikům, začínajícím svou kariéru, mi řekl o své myšlence zobecnit pojem kalibrační invariance a nějakou dobu jsme tento problém probírali... podařilo se mi něčím přispět do těchto diskusí, zvláště se to týkalo procedury kvantování a trochu také práce na formalismu, avšak klíčové myšlenky byly Yangovy. [3], str. 495.

ZHANG: Četl jsem, že Mills byl v Anglii:

V roce 1954, Yang ve Spojených státech a Mills v Anglii zkonstruovali nelineární verzi Maxwellových rovnic založenou na neabelovské grupě. [4], str. 463.

YANG: *To není pravda. Mills byl v roce 1954 ve Spojených státech. Později mnohokrát navštívil Anglii, avšak ne roku 1954.*

ZHANG: M. E. Mayer v roce 1977 řekl:

„Čtení Yangova a Millsova článku ukazuje, že geometrický význam kalibračního potenciálu musel být autorům jasný, poněvadž používají kalibračně invariantní derivování a formu křivosti příslušné konexe a základní rovnice v tomto článku jsou skutečně shodné s rovnicemi, odvozovanými při geometričtějším přístupu...“ [5], str. 2.

Je to pravda?

YANG: *Vůbec ne. To, co jsme Mills a já dělati v roce 1954, bylo zobecnění Maxwellovy teorie. Nevěděli jsme o žádném geometrickém významu Maxwellovy teorie a nezačínali jsme se touto problematikou. Kalibrační potenciál je pro fyziky pojmem, který má původ v našem popisu elektromagnetického pole. Konexe je geometrický pojem, o němž jsem se dočetl teprve kolem roku 1970. To, že Maxwellovy rovnice mají hluboký geometrický význam, bylo pro fyziky překvapujícím zjištěním.*

ZHANG: Zajímavou otázkou je, zda jste si v roce 1954 uvědomil ohromnou důležitost svého článku o neabelovské kalibrační teorii.

YANG: *Ne. V padesátých letech jsme cítili, že naše práce je elegantní. Její význam jsem si uvědomil v šedesátých a její velkou důležitost pro fyziku v sedmdesátých letech. Její souvislost s hlubokou matematikou se stala pro mne jasnou až po roce 1974.*

ZHANG: Jak je dobře známo, H. Weyl stál u zrodu myšlenky abelovské kalibrační teorie. Proč jste se o Weylově práci ve svém článku nezmínili?

YANG: *Ve čtyřicátých a padesátých letech fyzikové věděli, že Weyl zavedl ideu Abelovy kalibrace, ale pokaždé odkazovali na Pauliho přehledové články [6], [7]. Ve skutečnosti jsem v té době nečetl žádný Weylův článek.*

ZHANG: Setkal jste se s Weylem v Princetonu?

YANG: *Zajisté. Ukážu vám, co jsem o této události řekl ve své přednášce v Curychu v roce 1985 na oslavě stého výročí Weylova narození:*

Seznámil jsem se s Weylem v roce 1949, když jsem přišel do Ústavu pro pokročilá studia (Institute for Advanced Study) v Princetonu, jako mladý „člen“. Vídal jsem ho čas od času během následujících let 1949–1955. Byl velmi přístupný, ale nevzpomínám si, zda jsem s ním někdy mluvil o fyzice a matematice. Jeho neustálý zájem o myšlenku kalibračních polí nebyl fyzikům příliš znám. Ani Oppenheimer nebo Pauli se o tom nikdy nezmiňovali. Pochybuji také, že Weylovi řekli o mém a Millsově článku z roku 1954. Kdyby to udělali nebo kdyby sám Weyl na náš článek nějak narazil, dokážu si představit, jak by byl potěšen a nadšen, neboť jsme dali dohromady dvě věci, které byly jeho srdci velice blízké: kalibrační invarianci a neabelovské Lieovy grupy. [8], str. 19–20.

ZHANG: Dočetl jsem se v tom vašem překrásném článku o Weylovi, že byl autorem dvoukomponentové teorie neutrina.

YANG: *To je pravda. Napsal o této teorii v roce 1929 a upozornil, že nezachovává pravo-levou symetrii, a proto by se neměla v přírodě realizovat. Přibližně 30 let poté, v letech 1956–1957, kdy se zjistilo, že pravo-levá symetrie se zcela přesně nerealizuje, byla Weylova teorie rehabilitována. Je to dodnes správná teorie neutrina.*

Mimochodem, koupili jsme dům Weylových v Princetonu dva roky po Weylově smrti. Žili jsme v něm 9 let: 1957–1966.

ZHANG: Jak Weyl reagoval na zprávu, že jeho neutrinová teorie se potvrdila?

YANG: *Weyl naneštěstí zemřel roku 1957, 2 roky před touto velkou událostí ve fyzice. Na počátku toho roku bylo oznámeno, že pravo-levá symetrie neplatí zcela přesně, tj. že zákon zachování parity může být porušen. Potom byla Weylova teorie vzkříšena. Krásně vystihovala experimenty s mionovým rozpadem. Následovalo 6 měsíců velkého zmatku okolo rozpadu beta, který se týkal otázky, zda Weylovo neutrino má pravou nebo levou orientaci. Na podzim již existovala V-A teorie beta rozpadu. V prosinci byl uskutečněn důmyslný experiment, který vše vyjasnil, včetně zjištění, že Weylovo neutrino má levou orientaci.*

Weyl byl o 37 let starší než Yang. Oba patřili do různých akademických generací, pocházeli z různých zemí, působili v rozdílných oborech. Lze říci, že Weyl byl matematik, který si hluboce vážil fyziky, a Yang je fyzik, který si velmi cenil matematiky?

Yangova-Millsova teorie a geometrie

Po původním článku napsaném Yangem a Millsem byla kvantování a renormalizaci kalibračních teorií a hledání řešení Yang-Millových rovnic věnována celá řada článků. Poměrně málo lidí věnovalo pozornost geometrickým a topologickým aspektům kalibračních teorií. Z těch, kteří tak učinili, lze jmenovat S. Mandelstama (1962), E. Lubkina (1963) a H. G. Loose (1967). Dále R. Hermann publikoval řadu matematických knih pro fyziky, z nichž některé se tímto předmětem zabývaly. Žádná z nich, jak se zdá, neměla velký vliv. Zeptal jsem se Yanga na jeho vlastní zkušenost s uvědomováním si vztahu mezi kalibrační teorií a geometrií.

ZHANG: Studoval jste po roce 1954 kalibrační teorii neustále?

YANG: *Ano, studoval. Ačkoli v padesátých a šedesátých letech neabelovská kalibrační teorie neměla žádné praktické použití ve fyzice, jak čas plynul, byla její elegance stále více a více oceňována. Například v roce 1964 D. Ivaněnko publikoval dvanáct do ruštiny přeložených článků týkajících se kalibrační teorie, které napsali Yang a Mills, Lee a Yang, Sakurai, Gell-Mann a další. Já sám jsem během padesátých let pokračoval v práci na různých aspektech kalibračních polí, ale neobdržel jsem mnoho užitečných výsledků.*

Na konci šedesátých let jsem začal s novou formulací kalibračních polí prostřednictvím neintegrabilních fázových faktorů. Náhodou jsem jeden semestr přednášel obecnou relativitu a všiml jsem si, že výraz

$$(2) \quad F^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial B^{\alpha}_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial B^{\alpha}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + i(B^{\alpha}_{\mu} B^{\alpha}_{\nu} - B^{\alpha}_{\nu} B^{\alpha}_{\mu})$$

v kalibrační teorii a formule

$$(3) \quad R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ mj \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ mk \end{matrix} \right\}$$

v Riemannově geometrii nejsou pouze podobné — jsou ve skutečnosti stejné, pokud provedeme správné přiřazení jednotlivých symbolů! Je těžké popsat vzrušení, které jsem cítil, když jsem si uvědomil tuto podstatnou skutečnost.

ZHANG: Byl to onen první okamžik, kdy jste si uvědomil vztah mezi kalibrační teorií a diferenciální geometrií?

YANG: *Už dříve jsem si všiml podobnosti mezi Levi-Civitovým paralelním přenosem a neintegrabilními fázovými faktory v kalibračních polích. Avšak přímou souvislost jsem ocenil teprve tehdy, když jsem si uvědomil, že výrazy (2) a (3) jsou stejné.*

Jisté hodnocení geometrického významu kalibrační teorie jsem konzultoval s Jimem Simonsem, vynikajícím geometrem, který byl tenkrát vedoucím katedry matematiky na

Stony Brooku. Prohlásil, že kalibrační teorie určitě souvisí s konexemi na fibrovaných bundlech. Pokusil jsem se pak porozumět teorii fibrovaných bundlů z takových knih, jakou je Steenrodova „The Topology of Fibre Bundles“, ale nic jsem se nedozvěděl. Jazyk moderní matematiky je pro fyzika velice chladný a abstraktní.

ZHANG: Myslím, že pouze matematikové oceňují jazyk dnešní matematiky.

YANG: *Mohu vám vyprávět jednu historku, která sem zapadá. Asi před desíti léty jsem měl přednášku o fyzice v Soulu v Jižní Koreji. Zvtipkoval jsem si: „Existují pouze dva druhy moderních matematických knih: jedny, které nemůžete číst po první stránce, a druhé, které nemůžete číst už po první větě...“. Časopis „Mathematical Intelligencer“ později tento můj vtip otiskl. Podezřívám však řadu samotných matematiků, že se mnou souhlasí.*

ZHANG: Kdy jste porozuměl teorii bundlů?

YANG: *Na počátku roku 1975 jsem pozval Jima Simonse, aby nám v poledních přednáškách pověděl o diferenciálních formách a teorii bundlů. Laskavě přijal pozvání a my jsme se dozvěděli o de Rhamově teorému, diferenciálních formách, slepování okolí a tak dále. Bylo to velmi užitečné a umožnilo nám to pochopit matematický smysl Aharonovova-Bohmova experimentu i Diracových pravidel kvantování elektrických a magnetických monopolů. H. S. Tsao a já jsme později také pochopili hlubokou a velice obecnou Chernovu-Weilovu větu. Když se ohlédnu zpět, právě tyto přednášky mě naučily pojmu variety, jež jsem do té doby chápal jen velice mlhavě.*

Yang-Singer-Atiyah

Simonsovy přednášky pomohly T. T. Wuovi a Yangovi napsat slavný článek *Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields* [9]. Rozebírají v něm geometrický elektromagnetismus, zdůrazňující zejména jeho obecné topologické souvislosti. Pojednávají o matematickém významu Aharonovova-Bohmova experimentu a Diracova magnetického monopolu. Sestavili slovník, který je uveden v tabulce I.

O půl roku později, v létě 1976, I. M. Singer z MIT navštívil Stony Brook a ze široka probíral tyto věci s Yangem. Singer studoval fyziku a ve čtyřicátých letech získal doktorát z matematiky. V roce 1985 napsal:

O třicet let později jsem v Oxfordu přednášel o kalibračních teoriích. Začínal jsem s Wuovým a Yangovým slovníkem a končil s instantony, tj. samoduálními konexemi. Byl bych nepřesný, kdybych řekl, že poté, co jsem studoval třicet let matematiku, jsem se cítil připraven vrátit se k fyzice. [10], str. 200.

Aby se vyjádřil k vývoji uplynulého desetiletí, Singer v tomto článku z roku 1985 reprodukoval Wuův-Yangův slovník.

V dubnu až květnu 1977 byl dán do oběhu jistý preprint napsaný M. F. Atiyahem (Oxford), N. J. Hitchinem (Berkeley) a I. M. Singerem (MIT) [11]. Aplikují v něm Atiyahovu-Singerovu větu o indexu k řešení problému samoduálních kalibračních polí. Tak začal zájem mnoha matematiků o kalibrační pole.

Tabulka I. Překlad termínů (podle [9]).

Terminologie teorie kalibračních polí	Terminologie teorie fibrovaných bandlů
kalibrace (nebo globální kalibrace)	hlavní souřadnicový bandl
typ kalibrace	hlavní fibrovaný bandl
kalibrační potenciál B^α_μ	konexe na hlavním fibrovaném bandlu
S_{ab}	přechodová funkce
fázový faktor Φ_{pq}	paralelní přenos
intenzita pole $F^{\alpha\mu\nu}$	křivost
zdroj J^α_μ	?
elektromagnetismus	konexe na $U_1(1)$ fibrovaném bandlu
kalibrační pole izotopického spinu	konexe na SU_2 fibrovaném bandlu
kvantování Diracova monopólu	klasifikace $U_1(1)$ fibrovaných bandlů podle první Chernovy třídy
elektromagnetismus bez monopólu	konexe na triviálním $U_1(1)$ fibrovaném bandlu
elektromagnetismus s monopólem	konexe na netriviálním $U_1(1)$ fibrovaném bandlu

V roce 1979 Atiyah uveřejnil monografii nazvanou *Geometry of Yang-Mills Fields* [12]. Pátý díl jeho *Collected Works* má podtitul *Gauge Theories*. Našel jsem kopii tohoto dílu podepsanou Atiyahem v knihovničce v Yangově pracovně na Stony Brooku. Jakožto úvod tohoto dílu Atiyah napsal:

Od roku 1977 se mé zájmy zaměřily na kalibrační teorie a interakce mezi geometrií a fyzikou. Po mnoho let jsem se trochu zajímal o teoretickou fyziku a tento zájem byl podporován při mnoha příležitostech v podobě dlouhých diskusí s Georgem Mackeyem. Avšak v roce 1977 tyto podněty pocházely ze dvou jiných zdrojů. Na jedné straně mi Singer řekl o Yangových-Millsových rovnicích, které díky Yangově autoritě začínaly prosakovat do matematických kruhů. Během jeho pobytu v Oxfordu na počátku roku 1977 jsme se Singer, Hitchin a já vážně zabývali rovnicemi self-duality. Zjistili jsme, že jednoduchá aplikace věty o indexu dává vzorec pro počet instantonových parametrů . . . Druhý podnět byl způsoben přítomností Rogera Penrose a jeho skupiny v Oxfordu. [13].

ZHANG: Proč jste ponechal otazník uprostřed svého slovníku?

YANG: *Protože matematické nezkoumali tento pojem, tak známý a důležitý pro fyziky, nazývaný zdroj a obvykle značený J . Byl to klíčový pojem v Maxwellově formulaci Coulombova a Ampèrova zákona. V moderním matematickém značení zní:*

$$(4) \quad * D * f = J = \text{zdroj.}$$

Případ bez zdrojů dává

$$(5) \quad D * f = 0,$$

*což je splněno, jestliže $f = \pm * f$, a to je důvod, který přivedl fyziky i matematiky ke studiu samoduálních kalibračních polí.*

ZHANG: To je velice zajímavý příběh. Studium samoduálních kalibračních polí vedlo později k mnohem krásnější matematice, včetně Donaldsonova výsledku, za který získal Fieldsovu medaili [viz níže].

YANG: *Ano. Tato příhoda poskytuje novodobý příklad toho, jak matematikové mohou odvozovat pojmy z fyziky, což převládalo v předešlých stoletích, avšak nyní je to naneštěstí vzácné.*

ZHANG: A co myšlenky matematiky stávající se důležité pro fyziku? Můžeme připomenout, jak Einsteinovi doporučovali věnovat pozornost tenzorové analýze. Není to podobné tomu, jak se vám dostalo pomoci od Simonse?

YANG: *Einsteinova nesmírná hloubka a ohromující vhled byly takové, že žádného smrtelníka s ním nelze žádným způsobem srovnávat. Pokud jde o vstup matematiky do obecné relativity a do kalibrační teorie, byly oba procesy zcela rozdílné. Co se týče toho prvního, Einstein by nemohl vyjádřit své myšlenky bez Riemannovy geometrie, zatímco v druhém případě byly rovnice známy, avšak jejich hlubší celkové pochopení bylo později získáno za přispění matematiky.*

ZHANG: Existovala řada badatelů, kteří už dříve poukazovali na to, že kalibrační teorie souvisí s teorií bandlů. Proč jejich články neměly stejný vliv na matematické kruhy jako váš článek?

YANG: *Mohlo zde být mnoho důvodů. Práce mohly být natolik formální, že fyzikové nebyli schopni porozumět jejich obsahu. Nebo se možná matematikům zdály triviální, neboť fyzikální obsah nebyl jasný. Co se týče článku, který jsme Wu a já napsali v roce 1975, náš rozbor Aharonovova-Bohmova experimentu a Diracova monopólu pomohl přivábit pozornost lidí k tomuto tématu. Rovněž pomohl náš slovník.*

ZHANG: Dopisoval jste si o vědeckých problémech se Singerem a Atiyahem?

YANG: *Čas od času jsem se s nimi setkával, ale neexistovala žádná vědecká spolupráce.*

Yangova-Baxterova rovnice

Jinou matematickou strukturou, kterou Yang přispěl do matematiky, je Yangova-Baxterova rovnice, která vznikla z jeho práce v oboru statistické mechaniky.

V roce 1967 se Yang pokoušel nalézt vlnové funkce fermionového plynu s interakcí ve tvaru delta funkce pro jednorozměrný případ [14]. Byl to dost obtížný problém. Yang jej vyřešil a ukázal, že klíčovým vztahem v jednotlivých krocích byla maticová rovnice:

$$(6) \quad A(u)B(u+v)A(v) = B(v)A(u+v)B(u).$$

O několik let později R. J. Baxter při svém řešení jiného fyzikálního problému, tzv. osmivrcholového modelu [15], rovněž použil rovnici (6).

Obě vývojové cesty byly později sledovány v několika výzkumných centrech, zejména v SSSR, kde bylo soustředěno největší úsilí. V roce 1980 Faddějev razil termín „Yangův-Baxterův vztah“ nebo „Yangova-Baxterova rovnice“ a ten se stal dnes obecně

přijímaným názvem. V posledních šesti nebo sedmi letech vedla řada povzbudivých výsledků ve fyzice a matematice k závěru, že Yangova-Baxterova rovnice je fundamentální matematickou strukturou mající souvislosti s různými obory matematiky, jako jsou teorie uzlů a copánková teorie, teorie Hopfových algeber, teorie kvantových grup, topologie třírozměrných variet, monodromie diferenciálních rovnic a tak dále. Došlo k explozi literatury věnované těmto problémům [10], [11], [12].

ZHANG: YBE (Yangova-Baxterova rovnice) je pouze jednoduchá maticová rovnice. Proč má tak velký význam?

YANG: *V nejjednodušším případě má YBE tvar*

$$(7) \quad ABA = BAB.$$

To je Artinova fundamentální rovnice pro copánkovou grupu. Copánek je, samozřejmě, záznam historie po sobě jdoucích permutací. Není těžké pochopit, že historie po sobě jdoucích permutací má vztah k mnoha problémům v matematice a fyzice.

Když se dívám na vývoj v posledních šesti sedmi letech, mám pocit, že YBE je po Jacobiho identitě

$$(8) \quad C_{ab}{}^i C_{ic}{}^j + C_{ca}{}^i C_{ib}{}^j + C_{bc}{}^i C_{ia}{}^j = 0$$

další obecně významnou algebraickou rovnicí. Studium Jacobiho identity je samozřejmě hlavním tématem celé problematiky Lieových algeber a jejich vztahu k Lieovým grupám.

ZHANG: Vliv YBE na matematiku se zdá být větší než na fyziku.

YANG: *To je pravda pouze v současné době. Někteří fyzikové si skutečně myslí, že YBE představuje jen čistou matematiku. Já si ale myslím, že se to změní. YBE je fundamentální struktura. I když ji někteří fyzikové nemají rádi, mohou být v některých případech nuceni ji použít. Ve dvacátých letech mnoho fyziků nazývalo teorii grup „grupovým morem“. Tento postoj přetrval do třicátých let, ale později se vytratil.*

Fieldsovy medaile z let 1986 a 1990

Jak Yangova-Millssova teorie, tak i Yangova-Baxterova rovnice význačně vystupují v jádru dnešní matematiky. Lze to vidět z Fieldsových medailí, udělených v letech 1986 a 1990.

Simon Donaldson byl vyznamenán Fieldsovou medailí na Mezinárodním matematickém kongresu v Berkeley v roce 1986. M. F. Atiyah o Donaldsonově práci řekl:

Spolu s důležitou prací Michaela Freedmana (jiný držitel Fieldsovy medaile z roku 1986), Donaldsonův výsledek implikuje, že existují „exotické“ čtyřrozměrné prostory, které jsou topologicky, avšak ne diferenciálně ekvivalentní standardnímu euklidovskému čtyřprostoru R^4 ... Donaldsonovy závěry jsou odvozeny z Yangových-Millsových rovnic teoretické fyziky, které jsou nelineárním zobecněním Maxwellových rovnic. V euklidovském případě jsou ta řešení Yangových-Millsových rovnic,

kteřá dávají absolutní minimum akce, zvláště významná a nazývají se instan-
tony. [19].

V roce 1990 byly uděleny čtyři Fieldsovy medaile: V. Drinfeldovi, V. F. R. Jonesovi,
S. Morimu a E. Wittenovi. Práce tří z nich se týká Yangovy-Millsovy teorie nebo
Yangovy-Baxterovy rovnice. Následující citáty jsou z příspěvků kongresu v Kyotu:

*Je třeba se zmínit o Drinfeldově průkopnické práci s Maninem o konstrukci in-
stantonů. Ty jsou řešenými Yangových-Millsových rovnic s částicovými vlastnostmi
lokalizace a velikosti... Drinfeldův zájem o fyziku pokračoval jeho zkoumáním
Yangovy-Baxterovy rovnice. [20], str. 1210.*

*Jones otevřel zcela nový směr, když si uvědomil, že za určitých podmínek lze
řešení Yangovy-Baxterovy rovnice použít ke konstrukci invariantů uzlů... Teorie
kvantových grup — nekomutativních Hopfových algeber byla vynalezena Jimbem a
Drinfeldem k získávání řešení Yangových-Baxterových rovnic. [21], str. 1210.*

*Witten popsal v tomto pojetí Donaldsonův a Floerův invariant (Donaldson a Floer
rozšířili dřívější myšlenky Atiyahovy) a zobecnil Jonesovy uzlové polynomy na
případ uzlů v libovolné 3-varietě. [22], str. 1214.*

Je zábavné pozorovat vyskytující se stížnosti na to, že plenární přednášky na
ICM-1990 (Kyoto) se silně přikláněly k tématům matematické fyziky:

Všude jsme slyšeli kvantová grupa, kvantová grupa, kvantová grupa! [23]

Matematika a fyzika

ZHANG: Proč vaše práce ve fyzice měla tak veliký vliv na matematiku?

YANG: *Na to je ovšem velmi obtížné odpovědět. Náhoda je jedním činitelem. Kromě
ní jsou možné další dva důvody. Za prvé, když si někdo vybere vyšetřování jednoduchých
problémů, má větší šanci přiblížit se fundamentálním strukturám v matematice. Za
druhé, je zapotřebí si vážít matematického přístupu k problémům.*

ZHANG: Řekněte, prosím, více o prvním důvodu.

YANG: *Většina článků v teoretické fyzice se tvoří následujícím způsobem: A publiku-
je článek o své teorii. B si řekne, že ji může vylepšit. Pak C ukáže, že se B mýlí, a tak
dále. Většinou se ukáže, že původní myšlenka A je úplně falešná nebo bezvýznamná.*

ZHANG: V matematice je také možná taková situace.

YANG: *Ne, ne. To je velký rozdíl. Matematické věty se dokazují, nebo se předpoklá-
dá, že jsou dokázány. V teoretické fyzice si místo toho hrajeme na hádání a většinou
hádáme špatně.*

ZHANG: Je však nutno číst nejnovější publikace.

YANG: *Ovšem. Je důležité vědět, co si myslí jiní badatelé v našem oboru. Ale
k docelení skutečného pokroku se musí řešit originální jednoduché problémy, nikoliv
zabývat se domněnkami jiných lidí.*

ZHANG: Bylo to totéž, co jste dělali s Millsem v roce 1954?

YANG: *Ano. Položili jsme si otázku „Mohli bychom zobecnit Marwellovy rovnice tak, abychom obdrželi obecná pravidla pro určení interakcí mezi částicemi?“*

ZHANG: *A co Yangova-Baxterova rovnice? V roce 1967 jste se přece nevěnoval žádnému fundamentálně důležitému problému fyziky.*

YANG: *To je pravda. Věnoval jsem se jednomu z nejjednodušších problémů kvantové mechaniky: jednorozměrnému fermionovému systému s tou nejjednodušší možnou interakcí.*

ZHANG: *Proč zdůrazňujete nejjednodušší?*

YANG: *Poněvadž čím jednodušší je problém, tím více se jeho analýza pravděpodobně přibližuje některé základní matematické struktuře. Mohu to ilustrovat tímto pozorováním: Jestliže existuje matematicky podložená strategie vedoucí k vítězství ve hře šachy, nebo ve hře Wei-qi (známé ve Spojených státech pod pozdějším japonským jménem „go“), pak musí existovat ve hře Wei-qi, protože Wei-qi je prostší, mnohem základnější hra.*

ZHANG: *Pohovořte, prosím, o druhém důvodu.*

YANG: *Mnozí teoretičtí fyzikové jsou, v určitém ohledu, zaujatí proti matematice, nebo dokonce mají tendenci snižovat její hodnotu. Já s těmito postoji nesouhlasím. Napsal jsem:*

Snad díky vlivu svého otce si matematiky více vážím. Oceňuji matematický přístup k problémům a obdivuji krásu a sílu matematiky: obsahuje duchaplnost a složitost taktického manévrování a rozsáhlost strategických tažení, která bere dech. A, zajisté, je zde zázrak zázraků: ukazuje se, že některé pojmy v matematice poskytují fundamentální struktury, které vládou fyzikálnímu vesmíru! [1], str. 74.

ZHANG: *Čím vás váš otec ovlivnil v matematice?*

YANG: *Uvedu jeden příklad: otec mi vykládal základy teorie grup, když jsem byl středoškolským studentem a fascinovaly mě krásné diagramy v knize A. Speisera o konečných grupách, kterou měl ve své knihovně. Když jsem pracoval na bakalářské práci, navrhl mi, abych se poučil o reprezentacích grup z knížky L. E. Dicksona „Modern Algebraic Theory“, která v krátké kapitole o dvaceti stranách obsahovala základy teorie charakterů. Přehlednost a obsažnost této kapitoly mi ukázala neuvěřitelnou krásu a sílu teorie grup.*

ZHANG: *Říká se, že jste učil matematiku a vaše žena byla vaší studentkou.*

YANG: *Ano. Strávil jsem rok 1944–1945 vyučováním matematiky na střední škole v Kunmingu a ona byla v jedné z mých tříd. Ale dobře jsme se neznali. O několik let později jsem se s ní náhodou setkal v Princetonu. Byla to zajímavá zkušenost, učit středoškolskou matematiku. Avšak neměla nic společného s mým postojem k matematice.*

ZHANG: *Je pro fyzika důležité učit se hodně matematiky?*

YANG: *Ne. Jestliže se fyzik učí příliš mnoho matematiky, je lehce sveden matematickým přístupem a může ztratit fyzikální intuici. Kdysi jsem připodobnil vztah mezi fyzikou a matematikou k páru listů. Mají nepatrnou společnou část u stonku, ale z většiny části jsou oddělené:*

Mají své vlastní cíle a zřetelně rozdílné přístupy i různé tradice. Na základní pojmové úrovni mají k našemu úžasu některé pojmy společné, avšak i tam proudí životní síla každého z těchto oborů jeho vlastními žilami. [1]

ZHANG: Pro fyzika je důležitější, aby se dozvídal experimentální výsledky.

YANG: To je pravda.

ZHANG: Vyměňoval jste si často názory s matematiky?

YANG: Někdy. Když jsme T. D. Lee a já pracovali v roce 1951 na tom, co bylo později nazváno „věta o jednotkové kružnici“, von Neumann a Selberg nás upozornili, abychom si přečetli *Inequalities* od Hardyho, Littlewooda a Pólya a H. Witten naučil v roce 1965 mého bratra, C. P. Yanga a mě, topologickému pojmu indexu. Pro metodu řešení Wienerových-Hopfových rovnic nám M. Kac doporučil dlouhý přehledový článek M. G. Kreina, věnovaný tomuto tématu. V sedmdesátých letech jsem spolupracoval s matematickou skupinou pod vedením C. N. Gu na Fudanské univerzitě v Šanghaji v Číně. Kromě těchto a Simonsových přednášek byl pro mě užitečný kontakt s A. Borelem v Princetonu a s mými kolegy matematiky ve Stony Brooku: R. Douglasem, M. Gromovem, I. Kraem, B. Lawsonem, C. H. Sahem a dalšími.

ZHANG: Diskutoval jste často s Chernem?

YANG: Jak jsem se dříve zmínil, absolvoval jsem jeho kurz diferenciální geometrie na začátku studia v Číně a pravděpodobně jsem navštěvoval některé jeho další kurzy. Mluvili jsme spolu často v roce 1949 a v letech následujících, ale nezacházeli jsme do žádné skutečné matematiky. Slyšel jsem o velké důležitosti pojmu Chernovy třídy, myslím v padesátých letech, ale nevěděl jsem, oč jde.

Bylo to teprve v roce 1975, kdy nám Simons poskytl sérii přednášek v Institutu teoretické fyziky ve Stony Brooku a kdy jsem konečně pochopil základní myšlenky fibrovaných bandlů a konexí na fibrovaných bandlech. Po jisté námaze jsem porozuměl velmi obecné Chernově-Weilově větě. Je těžké popsat radost, jakou jsem měl, když jsem začal chápat tuto hluboce překrásnou větu. Řekl bych, že tato radost dokonce překonala tu, kterou jsem pocítil v šedesátých letech, když jsem se učil účinné Weylově metodě pro výpočet charakterů reprezentací klasických grup, nebo Peterovu-Weylovu větu. Proč? Snad proto, že Chernova-Weilova věta je geometričtější.

Ale nebyla to jen radost. Bylo to něco víc, cosi hlubšího: Koneckonců, co by mohlo být záhadnějšího, co by mohlo více naplňovat inspiraci než zjištění, že základní struktura fyzikálního světa je těsně spojena s hlubokými matematickými pojmy, pojmy, které vznikly z úvah majících kořeny pouze v logice a kráse formy? O tomto pocitu jsem napsal:

V roce 1975, pod dojmem faktu, že kalibrační pole jsou konexemi na fibrovaných bandlech, přijel jsem do domu S. S. Cherna v El Cerrito blízko Berkeley... Řekl jsem mu o svém ohromujícím zjištění, že kalibrační teorie jsou přesně konexemi na fibrovaných bandlech, které byly matematiky vyvinuty bez vztahu k fyzikálnímu světu. Dodal jsem: „vzrušuje mě to a zároveň uvádí do rozpaků, poněvadž vy, matematikové, jste si vysnili tyto pojmy z ničeho“. On ihned zaprotestoval: „Ne, ne. Tyto pojmy nejsou vysněné. Jsou přirozené a skutečné.“ [1], str. 567.

Literatura

- [1] C. N. YANG: *Selected papers, 1945–1980, with Commentary*. W. H. Freedman and Company, San Francisco 1983.
- [2] C. N. YANG and R. L. MILLS: *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*. Phys. Rev. *96* (1954), str. 191–195.
- [3] R. MILLS: *Gauge fields*. Am. J. Phys. *57* (1989), str. 493–507.
- [4] P. A. GRIFFITH: *Mathematical sciences: A unifying and dynamical resource — Report of the Panel on Mathematic Sciences, initiated by the National Research Council*. Notices AMS *33* (1986), str. 463.
- [5] M. E. MAYER: *Fibre Bundle Techniques in Gauge Theories*. Lecture Notes in Physics Vol. 67, Springer-Verlag, Berlin 1977, str. 2.
- [6] W. PAULI: *Handbuch der Physik*. 2. vydání (Geiger und Scheel, 1933), *24* (1), str. 83.
- [7] W. PAULI: Rev. Mod. Phys. *13* (1941), str. 203.
- [8] C. N. YANG: *Hermann Weyl's contributions to physics*. In *Hermann Weyl (1885–1955)*, Springer-Verlag, Berlin 1985.
- [9] T. T. WU and C. N. YANG: *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*. Phys. Rev. *D 12* (1975), str. 3845–3857.
- [10] I. M. SINGER: *Some problems in the quantization of gauge theories and string theories*. Proc. Symposia in Pure Math. *48* (1985), str. 198–216.
- [11] M. F. ATIYAH, N. J. HITCHIN and I. M. SINGER: *Self-duality in four-dimensional Riemann geometry*. Proc. Roy. Soc. London Ser. A, *362* (1978), str. 425–461.
- [12] M. F. ATIYAH: *Geometry of Yang-Mills Fields*. Scuola Normale Superiore, Pisa 1977.
- [13] M. F. ATIYAH: *Collected Works, Vol. 5. Gauge Theories*. Cambridge University Press, Cambridge 1988, str. 1.
- [14] C. N. YANG: *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*. Phys. Rev. Lett. *19* (1967), str. 1312–1315.
- [15] R. J. BAXTER: *Partition Function of the eight-vertex lattice model*. Ann. Phys. *70* (1972), str. 193–228.
- [16] M. BARBER and P. PEARCE, eds.: *Yang-Baxter Equations, Conformal Invariance and Integrability in Statistical Mechanics and Field Theory*. World Scientific, Singapore 1990.
- [17] M. JIMBO, ed.: *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*. World Scientific, Singapore 1990.
- [18] C. N. YANG and M. L. GE, eds.: *Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics*. World Scientific, Singapore 1989.
- [19] M. F. ATIYAH: *The Work of Donaldson*. Notices AMS *33* (1986), str. 900.
- [20] A. JAFFE and B. MAZUR: *Vladimir Drinfeld*. Notices AMS *37* (1990), str. 1210.
- [21] R. H. HERMANN: *Vaughan F. R. Jones*. Notices AMS *37* (1990), str. 1211.
- [22] K. GALWEDZKI and C. SOULE: *Edward Witten*. Notices AMS *37* (1990), str. 1214.
- [23] *Mathematical Intelligencer*, *9* (1991), č. 2, 7.

O autorovi

DIANZHOU ZHANG [čti Čang] (Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai, 200062 China) se narodil 21. května 1933 v Zhejiangu v Číně. Studoval na Východočínské normální univerzitě (East China Normal University) v letech 1954 až 1956, v době, kdy v Číně neexistoval žádný systém akademických hodností. Potom se stal na téže univerzitě profesorem matematiky. Pracoval v oboru spektrální teorie lineárních operátorů. Od roku 1980 se zabývá výučováním matematiky a její historií. Tento článek vznikl během jeho návštěvy Spojených států v letech 1990–91, kdy se setkal s C. N. Yangem.