

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Karla Kratochvílová; Jan Tichý; Jiří Zelenka

Význam pojmu rezonanční frekvence piezoelektrického výbrusu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 5, 563--570

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139406>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

VÝZNAM POJMU REZONANČNÍ FREKVENCE PIEZOELEKTRICKÉHO VÝBRUSU

KARLA KRATOCHVÍLOVÁ a JAN TICHÝ, *Katedra matematiky a fyziky Vysoké školy strojní v Liberci*, JIŘÍ ZELENKA, *Výzkumný ústav elektrotechnické keramiky v Hradci Králové*

1. Úvod

V poslední době se ve vysokofrekvenční elektrotechnice stále více uplatňují jako elektromechanické prvky piezoelektrické výbrusy [4, 18, 19]. Pro jejich použití ke stabilisaci kmitočtu oscilátorů nebo ve vysokofrekvenčních filtrech je nezbytné znát jejich elektrické vlastnosti. Tyto se dají, jak známo, v okolí určité rezonanční frekvence znázornit jednoduchým oscilačním obvodem znázorněným na obr. 1, který nazýváme elektrickým náhradním schématem¹⁾. Jedna jeho větev je tvořena sériově zapojeným ohmickým odporem R , indukčností L a kapacitou C , druhá paralelní statickou kapacitou C_0 , danou rozměry výbrusu a hodnotou dielektrické konstanty piezoelektrické látky, z níž je výbrus zhotoven²⁾.

Elektrické náhradní schéma kmitajícího piezoelektrického výbrusu představuje tedy v podstatě dvoupól. Povážíme-li si závislosti impedance tohoto dvoupólu na frekvenci, můžeme stanovit několik významných, pro daný dvoupól charakteristických frekvencí [1, 3, 8]. Vyjádření těchto frekvencí pomocí parametrů elektrického náhradního schématu je velmi užitečné jednak při rozboru funkce výbrusu v oscilátorech a filtrech, jednak při samém měření hodnot elektrického náhradního schématu.

V dalším odvodíme příslušné vztahy za poněkud zjednodušujících, avšak v praxi vesměs splněných předpokladů, a na jejich podkladě rozebereme fyzikální význam jednotlivých významných frekvencí. Zejména budeme mít na zřeteli souvislost těchto frekvencí s funkcí piezoelektrického výbrusu v oscilátorech a všimneme si jejich ovlivnění paralelně a sériově připojenou kapacitou. Z toho vyvodíme určité zhodnocení oscilátorů, budících výbrus v sériově či paralelní rezonanční frekvenci. Odvozených vztahů užijeme též ke zpřesnění způsobu stanovování hodnot elektrického náhradního schématu z rozladění, způsobeného sériově připojenou kapacitou za předpokladu velkého tlumení výbrusu. Konečně pak si všimneme platnosti všech předchozích úvah s ohledem na mimořádně silně tlumené výbrusy a vyjádříme všechny významné frekvence ve formě nekonečných řad.

2. Významné frekvence náhradního obvodu

Pro impedanci Z náhradního obvodu, zakresleného v obr. 1, a sestávající z reálné a imaginární složky, lze při kruhové frekvenci ω odvodit tyto vztahy:

$$Z = R_Z + jX_Z, \quad (1)$$

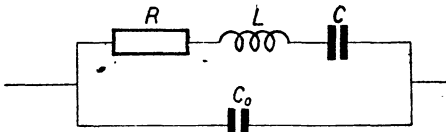
¹⁾ Podrobněji se lze s elektrickým náhradním obvodem kmitajících piezoelektrických výbrusů seznámit např. v knihách Cadyho [5], Heisinga [7], Masona [9, 10] a Petrážky [12]. Tam čtenář nalezne také odkazy na další literaturu. Prameny z poslední doby jsou částečně zachyceny v článcích [14, 15, 17].

²⁾ Veličiny R , L , C se vztahují k h -té harmonické rezonanční frekvenci určitého kmitu. Tato okolnost se zpravidla zdůrazňuje připojením příslušného indexu h , takže veličiny, vztahující se např. k základnímu kmitu, označujeme R_1 , L_1 , C_1 . V tomto článku jsme pro zjednodušení výrazů od připojování indexu h upustili.

$$R_z = \frac{R}{\omega^2 C_0^2 \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega C_0} \right)^2 \right\}}, \quad (2)$$

$$X_z = \frac{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega C_0} \right)}{\omega C_0 \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega C_0} \right)^2 \right\}} \quad (3)$$

V okolí rezonanční frekvence udávají závislost impedance, resistance i reaktance rezonátoru na kmitočtu. Abychom si usnadnili rozbor této závislosti,



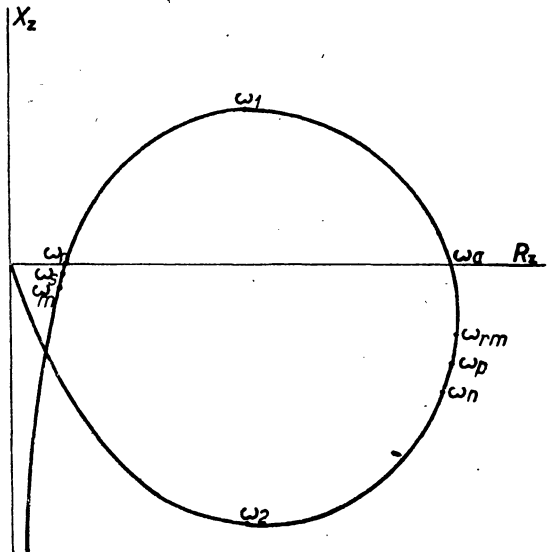
Obr. 1.

znázorníme průběh impedance v komplexní rovině (obr. 2). Na reálnou osu při tom vynášíme hodnoty resistance R_z , kdežto na imaginární osu hodnoty reaktance X_z . Z grafického znázornění je patrné, že po řadě s rostoucí frekvencí můžeme definovat tyto význačné frekvence: ω_m , pro kterou absolutní

hodnota impedance je minimální; ω_r (tzv. rezonanční frekvenci), pro kterou je po prvé reaktance rovna nule a tedy impedance čistě reálná; ω_1 , pro kte-

rou reaktance nabývá maximální kladné hodnoty; ω_a (tzv. antirezonanční frekvence), pro kterou je reaktance po druhé rovna nule a tedy impedance opět čistě reálná; ω_{rn} , pro kterou je resistance maximální; ω_n , pro kterou absolutní hodnota impedance nabývá maximální hodnoty a konečně ω_2 , pro kterou reaktance nabývá maximální záporné hodnoty.

Kromě zmíněných frekvencí se však velmi hojně uvádějí ještě dvě další význačné frekvence, které se označují jako ω_s a ω_p . Tyto frekvence jsou odvozeny za předpokladu zanedbání tlumení. V takovém případě impedance obvodu se stane čistě reaktivní a bude dána vztahem



Obr. 2.

$$Z_0 = jX_0 = -j \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\omega C_0 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega C_0} \right)} \quad (4)$$

Závislost impedance Z_0 (plně) a její převrácené hodnoty $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ admitance (čárkovaně) na kmitočtu ω je pro tento zjednodušený případ náhradního obvodu zobrazena na obr. 3 a vyznačuje se dvěma význačnými frekvencemi. Frekvenci

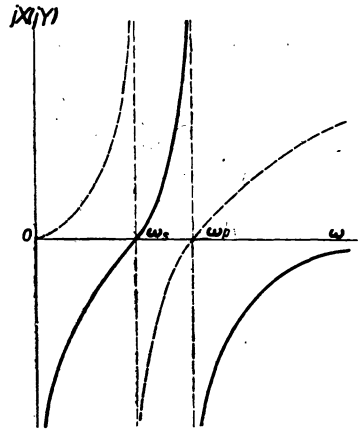
$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (5)$$

při které je reaktance větve se sériově zapojenou kapacitou a indukčností, a tedy v uvažovaném případě bezztrátového obvodu, i reaktance celého obvodu rovna nule, nazýváme sériovou rezonanční frekvencí. Frekvenci

$$\omega_p = \sqrt{\frac{C + C_0}{LCC_0}} = \omega_s \sqrt{1 + \frac{C}{C_0}}, \quad (6)$$

při níž reaktance obvodu je nekonečně velká, nazýváme paralelní rezonanční frekvenci.

Vztahy (5) a (6) považujeme za definice sériové a paralelní rezonanční frekvence i pro skutečný případ náhradního obvodu, kdy nezanedbáváme tlumení a $R \neq 0$. Ze zakreslení obou frekvencí do diagramu na obr. 2 vyplývá, že ani jedna z nich však nezaujímá při sledování průběhu závislosti impedance náhradního obvodu na frekvenci žádné význačné postavení. Jak ukážeme později, prvá z nich ω_s padne mezi frekvence ω_m a ω_r , druhá ω_p mezi frekvence ω_{rn} a ω_n . Obě jsou nezávislé na hodnotě ohmického odporu R a tedy i na vnitřním a vnějším tlumení výbrusu. V dalších našich úvahách budou mít úlohu referenčních frekvencí, odvozených z idealisovaného případu při zanedbání tlumení a definovaných, jak již bylo řečeno, rovnicemi (5) a (6).



Obr. 3.

Vyjádření ostatních frekvencí pomocí parametrů elektrického náhradního obvodu mohli bychom získati ze vztahů (1), (2) a (3). Tohoto způsobu skutečně užijeme v závěru našeho článku, abychom odvodili vztahy, kterých by bylo možno použít i pro extrémně tlumené výbrusy. V převážné většině praktických případů vystačíme však s určitou aproximací, která umožní, aby naše další úvahy byly jednodušší a mnohem přehlednější. Je to podmíněno tím, že koeficient jakosti, definovaný vztahem

$$Q = \frac{\omega_s L}{R},$$

bývá u piezoelektrických výbrusů zpravidla velmi vysoký. Za tohoto předpokladu výrazy (2) a (3) podstatně zjednodušíme zavedením nové proměnné tímto postupem: Nejprve frekvenci ω nahradíme novou pomocnou proměnnou q , rovnou reaktanci sériové větve náhradního obvodu a určenou tedy vztahem

$$q = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (8)$$

Pro ω z něho bezprostředně s přihlédnutím k rovnici (5) a (7) plyne

$$\omega = \frac{\varrho}{2L} + \omega_s \sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{4R^2Q^2}}. \quad (9)$$

V okolí resonance frekvence, na které se především soustředujeme, jsme oprávněni výraz $\frac{\varrho^2}{4R^2Q^2}$ vůči jedničce zanedbat a tak pro rozladění vůči sériové rezonanční frekvenci ω_s dostaneme

$$\omega - \omega_s = \frac{\varrho}{2L}. \quad (10)$$

V uvažovaném kmitočtovém oboru kolem rezonanční frekvence ω_s jsme rovněž oprávněni reaktanci paralelní větve se statickou kapacitou C_0 považovat za konstantní (nezávislou na kmitočtu) a označit ji

$$\varrho_0 = \frac{1}{\omega_s C_0}. \quad (11)$$

Položíme-li dále

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = x, \quad (12)$$

získali jsme novou proměnou, která je úměrná odchylce uvažované frekvence ω od frekvence ω_s .

Pro posouzení tlumení piezoelektrického výbrusu zavádíme koeficient paralelního útlumu α , definovaný vztahem

$$\alpha = \frac{r}{Q} = \omega_s C_0 R, \quad (13)$$

ve kterém

$$r = \frac{C_0}{C}. \quad (14)$$

značí pro celkové chování výbrusu velmi důležitý kapacitní poměr paralelní statické a sériové dynamické kapacity výbrusu.

V závislosti na nové proměnné x , definované rovnicí (12), a za pomoci koeficientu paralelního útlumu α , definovaného rovnicí (13), lze resistenci a reaktanci kmitajícího výbrusu v okolí rezonanční frekvence vyjádřit na místo vztahů (2) a (3) vztahy

$$R_z = \frac{\varrho_0 \alpha}{\alpha^2 + (x - 1)^2}, \quad (15)$$

$$X_z = \frac{-\varrho_0 [\alpha^2 + x(x - 1)]}{\alpha^2 + (x - 1)^2}. \quad (16)$$

Tyto vztahy vzhledem k své jednoduchosti jsou mnohem příhodnějším východiskem našich dalších úvah, než vztahy (2) a (3). Chceme-li opět znázornit jimi určenou impedanci v komplexní rovině tak, že na jednu osu pravoúhlého souřadnicového systému nanášíme resistenci R_z a na druhou reaktanci X_z , zjistíme, že rovnice (15) a (16) jsou parametrickými rovnicemi kružnice, jejíž obecný tvar v souřadnicích R_z a X_z je

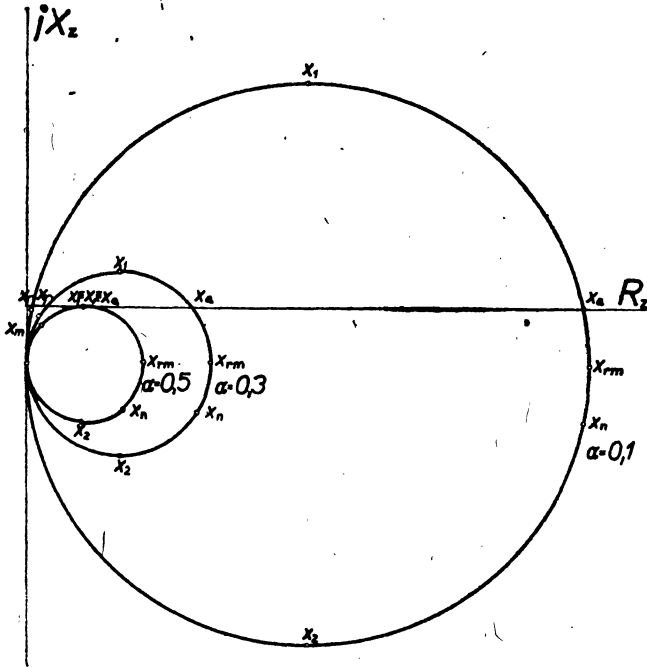
$$\left(R_z - \frac{\varrho_0}{2\alpha}\right)^2 + (X_z + \varrho_0)^2 = \left(\frac{\varrho_0}{2\alpha}\right)^2. \quad (17)$$

Na obr. 4 jsou zakresleny tři takovéto kruhové impedanční diagramy s význačnými frekvencemi pro případ $\alpha = 0,1$; $\alpha = 0,3$, a $\alpha = 0,5$. Referenčním frekvencím sériové ω_s a paralelní ω_p resonance definovaným vztahy (5) a (6) odpovídají hodnoty nové proměnné

$$x_s = 0, \quad x_p = 1. \quad (18) \quad (19)$$

Z obr. 4 je také snadno patrné, že pro rezonanční a antirezonanční frekvenci dostaneme reálné hodnoty, které nás výlučně zajímají, pokud

$$\alpha = \frac{r}{Q} = \omega_s C_0 R \leq \frac{1}{2}. \quad (20)$$



Obr. 4.

Tato podmínka, která v případě rovnosti obou stran by znamenala splnění rezonanční a antirezonanční frekvence, je v praxi vždy splněna, neboť hodnota α bývá zpravidla (řádově) mnohem menší, než jsme z důvodu názornosti zvolili v našem obrázku.

Za předpokladu platnosti vztahu (20) dostaneme vztahy pro rezonanční a antirezonanční kmitočty, položíme-li reaktanci X_z , udanou rovnicí (16), rovnu nule. Vyjádříme je nejprve v proměnné

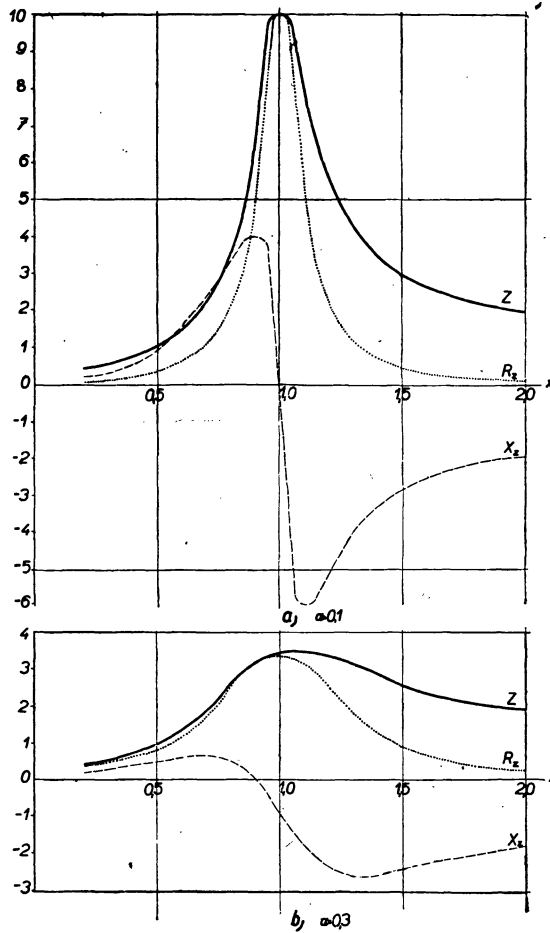
$$x_r = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} \doteq \alpha^2, \quad (21)$$

$$x_a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} \doteq 1 - \alpha^2. \quad (22)$$

Z těchto vztahů, pak již snadno přejdeme ke vztahům pro frekvenci

$$\omega_r \doteq \omega_s \left(1 + \frac{C_0 R^2}{2L} \right), \quad (23)$$

$$\omega_a \doteq \omega_s \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C}{C_0} - \frac{C_0 R^2}{2L} \right). \quad (24)$$



Obr. 5.

Frekvence ω_m a ω_n , odpovídající minimální a maximální impedanci, lze určit na příklad z extrémů impedance $|Z|$ jako funkce frekvence. Pokud α je značně malé (viz poznámka za rovnicí (20)), platí přibližně

$$x_m \doteq -\alpha^2, \quad x_n \doteq 1 + \alpha^2, \quad (25) \quad (26)$$

a odtud teprve

$$\omega_m \doteq \omega_s \left(1 - \frac{C_0 R^2}{2L} \right), \quad (27)$$

$$\omega_n \doteq \omega_s \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C}{C_0} + \frac{C_0 R^2}{2L} \right). \quad (28)$$

Obdobně vyhledáním extrémů reaktance získáme

$$x_1 \doteq 1 - \alpha, \quad x_2 \doteq 1 + \alpha, \quad (29) \quad (30)$$

a tedy

$$\omega_1 \doteq \omega_s \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C}{C_0} - \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \right), \quad (31)$$

$$\omega_2 \doteq \omega_s \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C}{C_0} + \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \right), \quad (32)$$

a vyhledáním extrémů resistance

$$x_{rn} = x_p \doteq 1, \quad (33)$$

a

$$\omega_{rn} = \omega_p \doteq \omega_s \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C}{C_0} \right). \quad (34)$$

Je samozřejmé, že rovnice (21) až (34) jsme mohli též odvodit na základě názoru ze znázornění impedanční kružnice v obr. 4 [5].

Pokud je splněna perovnost (20), vyplývá z obr. 4, že se kmitající piezoelektrický výbrus mezi frekvencemi ω_r a ω_a chová jako obvod s induktivní reaktancí a mimo tuto oblast jako reaktance kápacitní. Pro šířku tohoto intervalu $\Delta\omega_L$ platí

$$\Delta x_L = x_a - x_r = 1 - 2\alpha^2, \quad (35)$$

a tedy

$$\Delta\omega_L = \omega_a - \omega_r = \omega_s \left(\frac{1}{2} \frac{C}{C_0} - \frac{C_0 R^2}{L} \right). \quad (36)$$

Je patrné, že s rostoucím koeficientem útlumu se tento interval zužuje. Za povšimnutí na obr. 4 stojí také okolnost, že reaktance při paralelní rezonanční frekvenci a při frekvenci, vyznačující se maximální impedancí, nezávisí vůbec na tlumení. Z odvozených vztahů rovněž vyplývá již uvedená skutečnost, že seriová rezonanční frekvence ω_s , definovaná vztahem (5) padne mezi frekvence ω_m a ω_r , a paralelní rezonanční frekvence ω_p , definovaná vztahem (6), padne mezi frekvence ω_{rn} a ω_n .

Na obr. 5 je pak pro větší názornost zakreslen ještě pro $\alpha = 0,1$ a $\alpha = 0,3$ průběh impedance, reaktance a resistance v závislosti na proměnné x , tedy na veličině úměrné odchylce uvažované frekvence ω od ω_s . Je zřejmé, že závislosti jsou tím ostřejší a výraznější, čím je hodnota koeficientu paralelního útlumu α menší. Jak z obr. 4, tak z obr. 5 vyplývá, že ω_m a ω_r jsou velmi blízké frekvenci ω_s , a frekvence ω_n , ω_{rn} a ω_a frekvenci ω_p . Z obr. 5 je také ještě jednou bezprostředně patrný fyzikální význam jednotlivých význačných frekvencí.

3. Pojem resonance a kmitočtová stabilita výbrusu v oscilátorech

V radiotechnice jsme zvyklí u určitého seskupení indukčností, kapacit a odporů označovat ze resonanci takový stav, při kterém se celková impedance jeví jako čistý odpor. Takovému pojetí patrně vyhovuje rezonanční frekvence ω_r a antirezonanční frekvence ω_a . V řadě případů je však důležité při konstantní hodnotě vysokofrekvenčního proudu, protékajícího výbrusem,

naléztí takovou frekvenci, při které napětí na výbrusu je maximální. Je to zřejmě frekvence ω_n , odpovídající maximu impedance, a mluvíme pak o napěťové resonanci. Obdobně frekvence ω_m určuje tzv. proudovou resonanci, při které při konstantním napětí vysokofrekvenční proud protékající výbrusem je maximální.

Pro funkci piezoelektrických výbrusů v oscilátorech je rozhodující, že kmity výbrusu se ustálí na takové frekvenci, pro kterou fázové posunutí proudu u výbrusu je stejné, jako v budicím obvodu [3]. V zájmu požadované vysoké kmitočtové stability je žádoucí tedy budít výbrus v takové frekvenci, která se co nejméně změnou fáze ovlivní. Pro fázový úhel φ plyne z rovnic (15) a (16)

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\alpha^2 + x(x-1)}{\alpha} \quad (37)$$

Pro posouzení stability bude tedy ve smyslu předchozího rozhodující poměr $\frac{d\varphi}{dx}$, pro který z rovnice (37) plyne

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1-2x}{\alpha \left\{ 1 + \left[\frac{\alpha^2 + x(x-1)}{\alpha} \right]^2 \right\}} \quad (38)$$

Matematickým rozбором lze zjistit, že uvedené optimální podmínce stability vyhovují dvě hodnoty

$$x'_s = -\alpha^4, \quad x'_p = 1 + \alpha^4, \quad (39) \quad (40)$$

odpovídající frekvencím

$$\omega'_s = \omega_s \left(1 - \frac{C_0^2 R^4}{4L^2} \right), \quad (41)$$

$$\omega'_p = \omega_s \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C}{C_0} + \frac{C_0^2 R^4}{4L^2} \right). \quad (42)$$

Prvá z nich ω'_s je jen nepatrně menší, než sériová resonanční frekvence ω_s , druhá ω'_p nepatrně větší, než paralelní resonanční frekvence ω_p .

V případě, že výbrus kmitá v resonanční či antiresonanční frekvenci, je stabilita menší. Dosazením x_r či x_a do rovnice (38) pro tento případ dostaneme

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{\omega_r} = \pm \frac{\sqrt{1-2\alpha^2}}{\alpha} \quad (43)$$

Kladné znaménko při tom platí pro resonanční, záporné pro antiresonanční frekvenci. Pro relativní změnu frekvence $\Delta\omega$, odpovídající změně fázového úhlu $\Delta\varphi$ s přihlédnutím k rovnici (10), dále ze vztahu (43), plyne

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm \frac{1}{2Q\sqrt{1-4\omega_s^2 C_0^2 R^2}} \Delta\varphi \quad (44)$$

Velikost paralelní kapacity tedy nebláže snižuje frekvenční stabilitu výbrusu.

(Dokončení)