Josef Skotnický
Dráhy kozmickej rakety

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 5, 571--582

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139405

DRÁHY KOZMICKEJ RAKETY

Prof. dr. J. SKOTNICKÝ

Úvod

Úspechy sovietskej raketovej techniky v posledných rokoch udivili svetovú verejnosť. Vyplynuli ony z celkového rozvoja vedy a techniky v Sovietskom sväze a boli dokumentované úspešným vystrelením i presnými zásahmi medzikontinentálnych balistických striel, vytvorením 3 umelých družíc Zeme a najmä vystrelením kozmickej rakety ťažkej temer poldruhej tony, ktorá ako prvé zemské teleso prekonala zemskú príťažlivosť a odpútala sa od Zeme, aby sa stala novou planetou Slnka. K dosiahnutiu týchto výsledkov bolo treba vyvinúť nie len mohutnú raketovú techniku, ale tiež úspešne zvládnuť mnohé problemy radiotechniky na základe posledných pokrokov v elektronickej a polovodičovej technike. Radiotechnické prístroje na rakete sú totiž nutné z dvoch dôvodov: umožňujú dialkové ovládanie rakety — jej smeru a rýchlosti ako aj odpojovanie jej jednotlivých stupňov. Ďalej podávajú tieto prístroje hlásenia na Zem o rýchlosti rakety ako aj o meraniach ktoré prevádzajú na rakete rôzné automatické vedecké prístroje. Vidno teda že problem kozmickej rakety je problem komplexný, realizovatelný len na základe všeobecne vyspelej vedy a techniky.

Keď na počiatku r. 1959 bola poprvé úspešne prekonaná zemská príťažlivosť, možno počítať s tým, že v budúcnosti budú tieto pokusy často opakované a za rôznymi účelmi. Aby sme mohli posúdiť dráhy kozmických rakiet a predpoklady ktoré treba splniť pri ich vystrelení ako aj výhlady pre zásah kozmických cieľov, nutno sa zoznámiť s rovnicami ovládajúcimi planetárny pohyb okolo gravitačného centra. Účelom tohoto článku je podať tieto rovnice vo forme čo najjednoduchšej, všeobecne prístupnej a hlavne názornej, aby za pomoci grafov bolo možné lahko si učiniť predstavu o dráhe rakety a jej prvkoch: rýchlosti, doletu, možnosti a dobe zásahu Mesiaca apod.

Rýchlostné prvky dráh

Pod prvou kozmickou alebo kruhovou rýchlosťou rozumieme takú rýchlosť pri ktorej teleso krúži okolo gravitačného centra po kružnici. K tomuto prípadu dochádza, keď dostredivé gravitačné zrýchlenie (sila) $g = kM/r^2$ sa rovná zrýchleniu (sile) odstredivému v^2/r, takže kruhová rýchlosť je daná vzťahom

$$v_k = \sqrt{kM/r} = \sqrt{kM/r_0 n} = \sqrt{g_0 r_0/n}\,, \tag{1}$$

kde k je gravitačná konštanta, M hmota gravitačného centra, r polomer kruhovej dráhy rovný nr_0, kde r_0 je určitý základný polomer a g_0 gravitačné zrýchlenie vo vzdialenosti r_0.

Tak dostávame pre kruhovú rýchlosť okolo Zeme vo vzdialenosti jej polomeru hodnotu $v_k^2 = 6{,}68 \,.\, 10^{-8} \,.\, 6 \,.\, 10^{27}/6{,}37 \,.\, 10^8 = 62{,}7 \,.\, 10^{10}$ z čoho $v_k = 7{,}9$ km/sec. Vo vzdialenosti Mesiaca, ktorá obnáša $n = 384/6{,}37$ polomerov zemských, je táto rýchlosť $\sqrt{n}$ krát menšia, čiže 1,02 km/s.

Kruhová rýchlosť okolo Mesiaca, ktorého hmota je 81,5krát menšia než Zeme, obnáša vo vzdialenosti jeho polomeru 1740 km $v_k^2 = 6{,}68 \,.\, 10^{-8} \,.\, 6 \,.\, 10^{27}/81{,}5 \,.\, 1{,}74 \,.\, 10^8 = 2{,}82 \,.\, 10^{10}$ takže $v_k = 1{,}68$ km/s.

Kruhová rýchlosť okolo Slnka, ktorého hmota je 333.000krát väčšia než Zeme, obnáša vo vzdialenosti jeho polomeru 700.000 km $v_k^2 = 6{,}68 \,.\, 10^{-8} \,.\, 6 \,.\, 10^{27} \,.\, 3{,}33 \,.\, 10^5/7 \,.\, 10^{10} = 19{,}1 \,.\, 10^{14}$ takže $v_k = 437$ km/s. Vo vzdialenosti Zeme, ktorá obnáša $n = 150/0{,}7$ polomerov Slnka, je táto rýchlosť $\sqrt{n}$krát menšia, činže 29,8 km/s.

Pohyb kruhový predstavuje stabilný stav, nakoľko potenciálna aj kinetická energia krúžiaceho-revolvujúceho telesa sú konstantné a v čase sa nemenia.

Keď ale rýchlosť telesa je väčšia než kruhová, prevláda sila odstredivá nad dostredivou a teleso sa vzdialuje od gravitačného centra po elipse, parabole alebo hyperbole, ale tak že jeho plošná rýchlosť $\frac{1}{2}r^2\, \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ zostáva podľa Keplerovho 2. zákona konstantná a rovná $\frac{1}{2}\sqrt{kMp}$ kde p je parametr kužeľosečky, t. j. prievodič kolmý na jej veľkú os $p = b^2/a = \pm\, a(1 - e^2) = r_n(1 + e)$, kde a, b sú poloosi, e excentricita a r_n minimálny prievodič kužeľosečky. Podľa veľkosti parametra p resp. jemu úmernej plošnej rýchlosti je kužeľosečka kružnicou keď $p = r_n$, elipsou keď $r_n < p < 2r_n$, parabolou keď $p = 2r_n$ a hyperbolou keď $p > 2r_n$. Treba tiež pripomenúť, že u elipsy veľká poloos je aritmetickým priemerom oboch prievodičov $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ a malá poloos geometrickým priemerom maximálneho a minimálneho prievodiča $b = \sqrt{r_m r_n}$. — V perigeu a apogeu sa situácia zjednodušuje, nakoľko plošná rýchlosť je daná súčinom z tangenciálnej rýchlosti a v polovodičného polomeru tj. $\frac{1}{2}rv$ takže pre túto tangenciálnu rýchlosť môžeme písať podľa 2. Keplerovho zákona

$$v_t = \sqrt{kM/r}\sqrt{p/r} = v_k\sqrt{r_m r_n/ar}\,. \tag{2}$$

Keď perigeum volíme na povrchu Zeme, tj. $r_n = r_0$ a keď maximálny prievodič označíme $r_m = Nr_0$, dostaneme pre tangenciálné rýchlosti v perigeu a apogeu vzťahy

$$v_p = v_{kp}\sqrt{2N/(N+1)} = v_{ka}\sqrt{2N^2/(N+1)} \tag{3}$$

$$v_a = v_{ka}\sqrt{2/(N+1)} = v_{kp}\sqrt{2/N(N+1)} = v_p/N\,. \tag{4}$$

kde v_{kp} a v_{ka} znamenajú kruhové rýchlosti, ktoré by teleso malo pri kruhovom pohybe v perigeálnej a apogeálnej vzdialenosti.

Z oboch vzťahov vidno, že v perigeu je tangenciálna rýchlosť väčšia než kruhová $v_p > v_{kp}$ a v apogeu naopak $v_a < v_{ka}$ — v perigeu je tedy odstredivá sila väčšia než dostredivá a v apogeu dostredivá väčšia než odstredivá: preto sa v perigeu teleso od gravitačného centra vzdialuje a v apogeu k nemu približuje.

Eliptický pohyb telesa prejde v parabolický keď parameter kužeľosečky dosiahne hodnotu $p = 2r_n$, čo sa dá realizovať zvýšením perigeálnej rýchlosti podľa vzťahu (2) na $v_p = v_k\sqrt{2}$ alebo podľa vzťahu (3) zvýšením N do nekonečna. Preto sa rýchlosť $v_k\sqrt{2}$ nazýva tiež druhou kozmickou, parabolickou alebo únikovou rýchlosťou v_2. Teleso s touto rýchlosťou sa vymaňuje z pôsobenia zemskej prítažlivosti a jeho rýchlosť po parabolickej dráhe klesá podľa vzťahu (4) v nekonečnu k nule. U Slnka druhá kozmická rýchlosť sa nazýva tiež treťou, lebo umožňuje uniknutie zo slnečnej sústavy.

Mimo maximálnej rýchlosti v perigeu a minimálnej v apogeu možno určiť tiež rýchlosť telesa v ľubovolnej vzdialenosti nr_0 od stredu Zeme keď uvážime, že zvyšovanie potenciálnej energie telesa jeho vzdialovaním sa od Zeme sa deje na úkor jeho energie kinetickej, čiže $d(\frac{1}{2}mv^2) = d(kMm/r)$ alebo

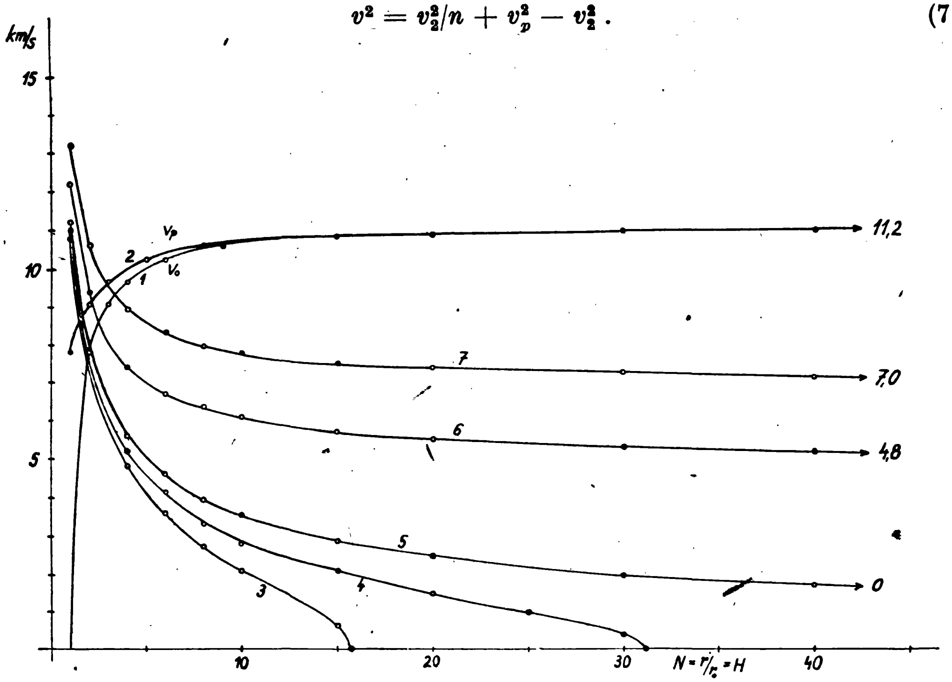
$$v\,dv = -(kM/r^2)\,dr \tag{5}$$

a po integrácii

$$[v^2]_v^{v_p} = 2kM\,[1/r]_{nr_0}^{r} \tag{6}$$

čiže $v_p^2 - v^2 = (2kM/r_0)(1 - 1/n) = v_2^2 - v_2^2/n$ a po úprave

$$v^2 = v_2^2/n + v_p^2 - v_2^2\,. \tag{7}$$



Obr. 1.

Keď počiatočná-perigeálna rýchlosť rakety je väčšia než úniková, $v_p > v_2$, dráha telesa je hyperbolická a rýchlosť telesa v nekonečnu sa určí zo vzťahu (7)

$$v_\infty^2 = v_p^2 - v_2^2\,.$$

U parabolického pohybu $v_\infty = 0$ lebo $v_p = v_2$.

U zvislého vrhu nahor výšku vrhu Hr_0 si určíme, keď položíme vo vzťahu (7) $v = 0$ a $n = H$:

$$H = v_2^2/(v_2^2 - v_p^2)\,. \tag{9}$$

U eliptického pohybu apogeálnu vzdialenosť Nr_0 si určíme zo vzťahu (3)

$$N = v_p^2/(v_2^2 - v_p^2) = H - 1\,, \tag{10}$$

z ktorého vidno, že vo vzdialenosti Nr_0 rýchlosť telesa ešte neklesla na nulu ($N < H$) ale má hodnotu $v_a = v_p/N$ podľa vzťahu (4) a tiež (7—10).

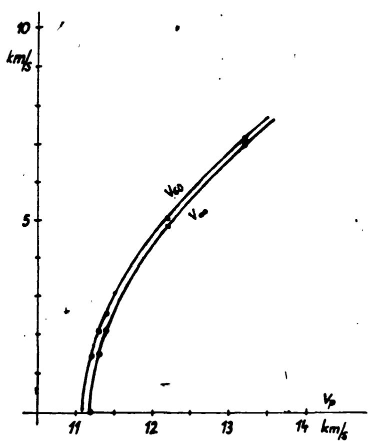
Zo vzťahu (7) tiež vyplýva, že pri eliptickom pohybe rýchlosť rovnú rýchlosti kruhovej v danom mieste má teleso vo vzdialenosti hlavnej poloosi od ohniska: keď $n = a/r_0 = (N + 1)/2$ potom

$$v^2 = v_2^2/n - v_2^2 + v_{kp}^2 \,.\, 2N/(N + 1) = v_2^2/2n \text{ a } v = v_{kp}/\sqrt{n}\,.$$

Uvedené kvantitatívné pomery sú názorne zachytené na obraze 1: krivka *1* znázorňuje počiatočnú rýchlosť $v_0 = v_p$ zvislého vrhu potrebnú pre dosiahnutie výšky Hr_0 podľa vzťahu (9). Krivka *2* zase perigeálnu rýchlosť v_p potrebnú pre dosiahnutie apogeálnej vzdialenosti Nr_0 podľa vzťahu (10). Krivky spočiatku pomerne rýchle stúpajú smerom k únikovej rýchlosti $v_p = 7{,}9\sqrt{2} = 11{,}2$ km/s ale pre H resp. N väčšie než 10 už malé zmeny počiatočnej rýchlosti majú za následok veľké zmeny dostihu, ako to tiež vyplýva z derivácií (9 a 10), ktoré udávajú percentuálné zmeny dostihu rakety v závislosti na percentuálnych zmenách počiatočnej rýchlosti:

$$\mathrm{d}H/H = 2(H - 1)\,\mathrm{d}v/v \quad \text{a} \quad \mathrm{d}N/N = 2(N + 1)\,\mathrm{d}v/v\,.$$

Ďalšie krivky na obraze 1 znázorňujú pokles rýchlosti telesa pri jeho vzdialování sa od Zeme podľa vzťahu (7). Krivky *3—4* znázorňujú zvislý vrh resp. eliptický pohyb pri počiatočnej rýchlosti 10,8 a 11,0 km/s, krivka *5* pohyb parabolický — $v_p = 11{,}2$ km/s a krivky *6—7* pohyb hyperbolický pri $v_p = 12{,}2$ a 13,2 km/s.



Obr. 2.

Na obraze 2 je znázornená rýchlosť rakety vo vzdialenosti Mesiaca ($n = 60$) a v nekonečnu v závislosti na počiatočnej rýchlosti v_p resp. v_0 podľa vzťahu (7) resp. (8). Obe krivky sú rovnostranné hyperboly o poloosách $a = b = v_2 = = 11{,}2$ a $v_2\sqrt{59/60} = 11{,}1$ km/sec. Z toho vidno že Mesiac je dosažitelný už pri počiatočnej rýchlosti pod únikovej 11,1 km/sec.

Na základe jednoduchých vzťahov doteraz uvedených možno zodpovedať niektoré otázky o kozmických cestách.

1. Aká musí byť počiatočná rýchlosť v_p rakety na Zemi, aby vystrelená vo smere pohybu Zeme okolo Slnka, unikla zo slnečnej sostavy?

Druhá kozmická rýchlosť Slnka vo vzdialenosti Zeme obnáša podľa predošlého $v_k\sqrt{2} = 29{,}8\sqrt{2} = 42{,}1$ km/s a nazýva sa tiež treťou kozmickou rýchlosťou nakoľko umožňuje už únik zo slnečnej sústavy. Táto rýchlosť prevyšuje o $42{,}1 - 29{,}8 = 12{,}3$ km/s kruhovú rýchlosť Zeme a preto raketa vymanená z príťažlivosti zemskej, musí mať voči Zemi rýchlosť $v_\infty = 12{,}3$ km/s. Podľa vzorca (8) musí teda raketa byť vystrelená z povrchu Zeme vo smere jej revolúcie okolo Slnka rýchlosťou v_p pre ktorú platí $v_p^2 = v_2^2 + v_\infty^2 = 11{,}2^2 + 12{,}3^2 = 125{,}4 + 152 = 277{,}4$ čiže $v_p = \sqrt{277{,}4} = 16{,}7$ km/sec.

2. Akou rýchlosťou musí byť zo Zeme vo smere jej pohybu vystrelená raketa, aby dosiahla Mars, ktorého „kruhová" dráha má polomer $228 \,.\, 10^6$ km?

Podľa predošlého N udáva pomer medzi maximálnym a minimálnym prievodičom eliptickej dráhy rakety a obnáša preto $N = 228/150 = 1{,}52$. Tak dostávame podľa vzťahu (3) pre rýchlosť rakety na zemskej dráhe, na ktorej sa vytvára perihelium raketovej dráhy, $v_p = v_{kp}\sqrt{\dfrac{2N}{N+1}} = 29{,}8\sqrt{\dfrac{2\,.\,1{,}52}{2{,}52}} = 32{,}8$ km/s z čoho $v_\infty = 32{,}8 - 29{,}8 = 3{,}0$ km/sec a preto $v_p^2 = v_2^2 + v_\infty^2 = 11{,}2^2 + 3^2 = 134{,}4$ čiže $v_p = \sqrt{134{,}4} = 11{,}6$ km/sec.

Na marsovej dráhe kde bude afelium raketovej dráhy klesne rýchlosť rakety na $v_A = v_P/N = 32{,}8/1{,}52 = 21{,}6$ km/sec, čo je ovšem hodnota menšia než rýchlosť Marsu, ktorá obnáša $v_{KA} = v_{KP}/\sqrt{N} = 29{,}8/\sqrt{1{,}52} = 24{,}2$ km/sec.

3. Akou rýchlosťou musí byť zo Zeme proti jej pohybu vystrelená raketa, aby dosiahla Venušu, ktorej dráha má polomer $108 \cdot 10^6$ km?

$N = 150/108 = 1{,}39$ a preto pre rýchlosť rakety v afeliu, t. j. na zemskej dráhe dostávame podľa vzorca (4) hodnotu $v_A = v_{KA}\sqrt{2/(N+1)} = 29{,}8 \cdot \sqrt{2/2{,}39} = 27{,}3$ km/s z čoho $v_\infty = 29{,}8 - 27{,}3 = 2{,}5$ km/sec a preto $v_p^2 = v_2^2 + v_\infty^2 = 11{,}2^2 + 2{,}5^2 = 131{,}7$ čiže $v_p = \sqrt{131{,}7} = 11{,}5$ km/sec.

Na venušinej dráhe stúpne rýchlosť rakety na $v_P = v_A \cdot N = 27{,}3 \cdot 1{,}39 = 38{,}0$ km/s, čo je ovšem rýchlosť väčšia než venušina, ktorá obnáša $v_{KP} = v_{KA}\sqrt{N} = 29{,}8\sqrt{1{,}39} = 35{,}1$ km/sec.

Časové prvky dráh

Vzorce pre časové prvky dráh kozmickej rakety sú už zložitejšie než pre jej rýchlosti. Pomerne najjednoduchší je vzorec pre dobu letu rakety z perigea do apogea, ktorý podľa 3. Keplerovho zákona má tvar $T = T_0(a/r_0)^{3/2}$ kde T_0 znamená polovičnú dobu obehu rakety pri kruhovom pohybe o polomere r_0 okolo Zeme: $T_0 = \pi r_0/v_k = \pi v_k/g_0 = \pi\, 6370/7{,}9 = 2540$ s. Nakoľko $a = \frac{1}{2}(r_0 + N r_0)$ máme ďalej

$$T = (T_0/2\sqrt{2})\,(N+1)^{3/2}\,, \tag{11}$$

kde $T_0/2\sqrt{2} = 898$ s $\doteq 15$ min $= \frac{1}{4}$ hod.

Podstatne zložitejší je už vzorec určujúci dobu letu t rakety pri eliptickej dráhe z perigea r_0 do vzdialenosti nr_0 od stredu Zeme. Táto doba sa určí tak, že plochu výseče elipsy ohraničenú oblúkom elipsy a oboma prievodičmi r_0 i nr_0 delíme plošnou rýchlosťou rakety rovnou $\frac{1}{2}\sqrt{kMp} = \frac{1}{2}v_k\sqrt{pr_0}$ kde $v_k = \pi r_0/T_0$ a $p = r_0(1+e)$.

Plocha výseče elipsy je daná ľahko odvoditeľným vzorcom

$$P = \frac{1}{2} \cdot ab\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{a} - y\,\frac{e}{b}\right), \tag{12}$$

kde x, y sú pravouhlé súradnice polohy rakety po dobe t vzťažené k hlavným osám elipsy.

Jednotlivé prvky elipsy si vyjadríme pomocou prievodičov nr_0 a maximálneho Nr_0:

$$a = \tfrac{1}{2}r_0(N+1)\,; \quad b = r_0\sqrt{N}\,, \quad e = (N-1)/(N+1)\,, \quad y = nr_0 \sin\varphi'$$
$$x = \tfrac{1}{2}r_0(N-1) + nr_0\cos\varphi\,, \quad \cos\varphi = (2N - (N+1)\,n)/n(N-1)$$

kde φ = uhol medzi prievodičmi, a tak dostaneme

$$t_e = \frac{T_0}{2\sqrt{2}}\,\frac{N+1}{\pi}\left[\sqrt{N+1}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2n-N-1}{N-1}\right) - 2\sqrt{\frac{(N-n)\,(n-1)}{N+1}}\,\right]. \tag{13}$$

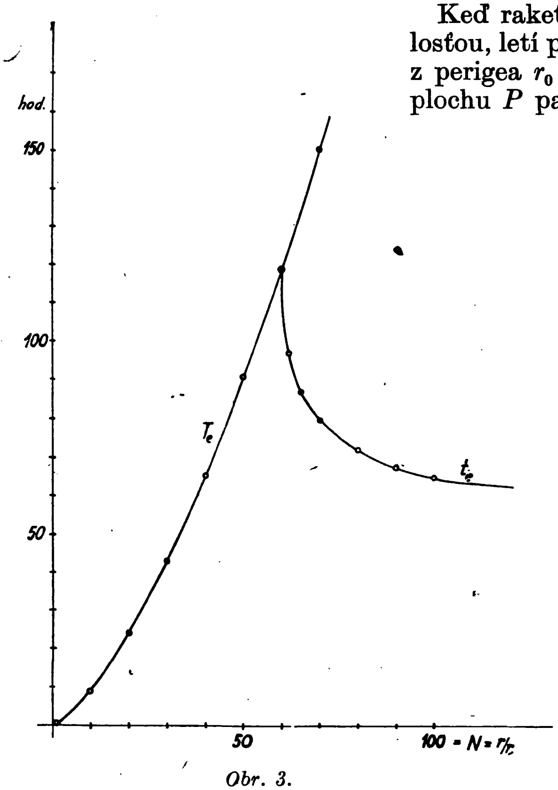
Keď položíme $n = N$ prejde tento vzorec v (11).

Časy T počítané podľa vzorca (11) pre rôzny dolet N rakety sú znázornené krivkou T_e na obraze 3.

Časy t_e počítané podľa vzorca (13) pre vzdialenosť Mesiaca $n = 60$ a pri rôznom dolete N rakety sú obsažené v tabulke 1 a znázornené krivkou t_e na obraze 3 ako aj krivkou t_e na obraze 4.

Tabuľka 1

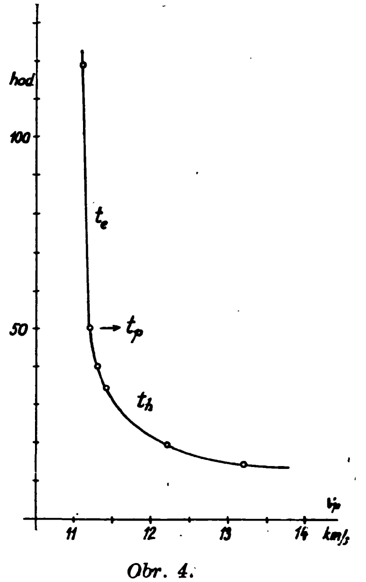
N	60	62	65	70	80	90	100	200
t_e	119,0	97,0	87,0	79,5	72,0	67,2	65,0	55,0 hodín
t_r	116,0	94,0	84,5	77,5	70,5	65,7	63,5	54,0 hodín



Obr. 3.

Keď raketa je vystrelená s únikovou rýchlosťou, letí po parabole a k určeniu doby letu z perigea r_0 do vzdialenosti nr_0 treba určiť plochu P parabolickej výseče

$$P = \tfrac{1}{6} \cdot y(x + 3p/2) \tag{14}$$



Obr. 4.

kde x, y sú pravouhlé súradnice polohy rakety po dobe t vzťažené k vrcholu paraboly:

$$p = 2r_0\,, \quad x = r_0(n - 1)\,, \quad y = 2r_0\sqrt{n - 1}\,,$$

$$t_p = \frac{T_0}{2\sqrt{2}}\,\frac{4}{3\pi}\,(n + 2)\sqrt{n - 1} = 0{,}25 \text{ hod } \frac{4}{3\pi}\, 62\sqrt{59} = 50{,}5 \text{ hod.} \tag{15}$$

K tejto dobe konverguje vzorec (13) pri vzrastajúcom N a preto tiež krivka t_e na obraze 3 — touto dobou tiež končí krivka t_e na obraze 4.

Keď je rýchlosť rakety v perigeu v_p väčšia než úniková v_2, letí raketa po hyperbole a k určeniu doby t za ktorú sa raketa dostane do vzdialenosti nr_0 od stredu Zeme, treba určiť plochu P výseče hyperboly

$$P = \tfrac{1}{2} \, . \, y(a + r_0) - \tfrac{1}{2} \, . \, ab \ln (x/a + y/b) \, . \tag{16}$$

Keď označíme $v_2^2/(v_p^2 - v_2^2) = w$ dostaneme pre prvky hyperboly vzťahy

$$a = r_0 w/2 \, , \quad b = r_0 \sqrt{1 + w} \, , \quad x = r_0 w(2n + w)/2(2 + w) \, ,$$
$$y = (2r_0/(2 + w)) \sqrt{(n - 1)(1 + w)(1 + n + w)}$$

takže

$$t_h = \frac{T_0}{2\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \sqrt{w} \left(\sqrt{(n - 1)(1 + n + w)} - 2{,}3 \, w \log \frac{\sqrt{n - 1} + \sqrt{1 + n + w}}{\sqrt{2 + w}} \right) . \tag{17}$$

Časy t_h počítané pre vzdialenosť Mesiaca $n = 60$ pri rôznom w (tj. v_p) sú obsažené v tabuľke 2 a znázornené krivkou t_h na obraze 4, ktorá začína dobou 50,5 hod. danou vzorcom (15).

Tabuľka 2

v_p	11,3	11,4	12,2	13,2 km/s
w	55,6	27,7	5,35	2,57
t_h	40,1	34,2	19,6	14,3
t_r	39,2	33,7	19,2	14,0 hodín

Keď raketa má zasiahnuť Mesiac, alebo aspoň sa stať jeho umelou družicou, musí byť vystrelená zo Zeme rýchlosťou 11,1 až 11,4 km/s, lebo pri väčšej počiatočnej rýchlosti presiahne jej rýchlosť v blízkosti Mesiaca podľa obrazu 2 únikovú rýchlosť Mesiaca 1,68 $\sqrt{2} = 2{,}37$ km/s a raketa sa okolo Mesiaca len hyperbolicky ohne letiac ďalej do vesmíru. Pri strieľaní na Mesiac nestačí ovšem zaistiť len správny smer rakety, ale treba veľmi presne nariadiť aj rýchlosť rakety, aby sa raketa v stanovenú dobu stretla s Mesiacom — pohyblivá je totiž nie len strela-raketa, ale aj cieľ-Mesiac a doba letu rakety na Mesiac sa podľa obrazu 4 s rýchlosťou rakety veľmi silne mení práve v rozsahu počiatočných rýchlostí 11,1—11,4 km/s, ktoré prichádzajú pri streľbe na Mesiac v úvahu. Keď tedy raketa aj pretne mesačnú dráhu, ale sa pri tom opozdí alebo uskorí, nemôže zasiahnuť Mesiac ani sa stať jeho umelou družicou. A práve toto opozdenie a uskorenie je veľmi ťažko ovládateľné vzhľadom na jeho veľmi značnú závislosť na počiatočnej rýchlosti rakety — v tom tkvejú hlavné ťažkosti pri streľbe na Mesiac najmä keď uvážime že Mesiac sa na svojej dráhe okolo Zeme posúva o svoj priemer asi za 1 hodinu.

Sovietská kozmická raketa vyslaná do oblasti Mesiaca bola vystrelená 1. I. 1959 pred polnocou krátko pred východom Mesiaca, ktorý sa nadcházal v západnej kvadratúre (v poslednej štvrti) a pretínal zemskú dráhu vo smere pohybu Zeme. Raketa bola tedy vystrelená tangenciálne vo smere revolúcie Zeme a tiež vo smere jej rotácie aby aj rotačná rýchlosť prispela k zvýšeniu počiatočnej rýchlosti rakety. Vzhľadom k tomu že raketa dosiahla vzdialenosť Mesiaca za 34 hodín, obnášela jej počiatočná rýchlosť podľa obr. 4 11,4 km/s a raketa sa pohybovala po dráhe hyperbolickej neveľmi odlišnej od parabolickej. Dráha rakety bola lokalizovaná do eliptiky isteže s veľkou presnosťou a keď raketa minula Mesiac o 2 jeho priemery, svedčí to pravdepodobne pre to, že prišla na miesto schôdze s Mesiacom asi o 2 hodiny skôr — toto uskorenie sa dalo skorigovať znížením počiatočnej rýchlosti o 50 m/s, čo zodpovedá presnosti pri riadení rýchlosti asi 0,5%. — Vzhľadom k tomu že raketa bola vystrelená väčšou než únikovou rýchlosťou vo smere revolúcie Zeme a minula Mesiac, stala sa novou planetou Slnka s eliptickou dráhou medzi dráhou Zeme a Marsa (túto by bola dosiahla podľa vyššie uvedeného pri počiatočnej rýchlosti 11,6 km/s).

Treba tiež uviesť, že časy letu rakety na väčšie vzdialenosti či už po dráhe eliptickej, parabolickej alebo hyperbolickej sú veľmi blízke časom počítaným pre zvislý vrh.

Tak napr. pri zvislom vrhu únikovou počiatočnou rýchlosťou obnáša rýchlosť rakety vo vzdialenosti nr_0 od stredu Zeme podľa (7) $v = v_2/\sqrt{n}$, takže pre čas letu rakety na Mesiac dostávame

$$dt = dr/v = r_0\, dn/v_2/\sqrt{n} = (r_0/v_2)\,.\,\sqrt{n}\, dn \tag{18}$$

a po integrácii

$$t_r = (2r_0/3v_2)\,[n^{3/2}]_1^{60} = \frac{T_0}{2\sqrt{2}}\,\frac{4}{3\pi}\,(60^{3/2} - 1) = 49{,}8 \text{ hod} \tag{19}$$

teda hodnotu veľmi blízku (15) a pochopiteľne o niečo kratšiu.

Keď je počiatočná rýchlosť rakety väčšia než úniková, dostávame pre dobu t_r radiálneho letu rakety do vzdialenosti nr_0 od stredu Zeme

$$t_r = \frac{T_0}{2\sqrt{2}}\,\frac{2}{\pi}\sqrt{w}\left(\sqrt{n(n+w)} - \sqrt{1+w} - 2{,}3w \log \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+w}}{1+\sqrt{1+w}}\right) \tag{20}$$

hodnotu, ktorá je pre väčšie vzdialenosti veľmi blízka výrazu (17) a zase len o niečo menšia, ako sa možno presvedčiť z posledného riadka tabuľky 2.

Keď je počiatočná rýchlosť rakety menšia než úniková, dostaneme pre dobu t_r radiálneho letu rakety do vzdialenosti nr_0 od stredu Zeme

$$t_r = \frac{T_0}{2\sqrt{2}}\,\frac{2}{\pi}\sqrt{H}\,[H\,(\operatorname{arctg}\sqrt{H-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{H/n - 1}) + \sqrt{H-1} - \sqrt{n(H-n)}] \tag{21}$$

zase hodnotu, ktorá sa pre väčšie vzdialenosti veľmi blíži výrazu (13), ako sa možno presvedčiť z posledného riadka tabuľky 1.

Keď vo vzorci (21) položíme $n = H$, dostaneme dobu zvislého vrhu nahor

$$T_r = \frac{T_0}{2\sqrt{2}}\,\frac{2}{\pi}\sqrt{H}\,(H \operatorname{arctg}\sqrt{H-1} + \sqrt{H-1}) \tag{22}$$

ktorá sa pre väčšie H veľmi blíži výrazu (11).

Záverom možno riecť, že vzorce pre pohyb kozmickej rakety nie sú zvlášť komplikované a že za pomoci diagramov si môžeme utvoriť názornú predstavu o jej pohybe po stránke rýchlostnej aj časovej. To ovšem platí len za zjednodušených predpokladov, že raketa sama neobsahuje žiadon silový motor ale chová sa pasívne, že už na povrchu Zeme nadobúda maximálnu rýchlosť či už v smere tangenciálnom (perigeum) alebo radiálnom, že sa vylučuje vliv atmosféry a zemskej rotácie a konečne, že sa tiež vylučuje vliv druhého nebeského telesa na pohyb rakety.

Medzikontinentálné balistické strely

Balistické strely sú vlastne tiež kozmické rakety, ale s mysleným perigeom ležiacim vnútri Zeme — ich eliptické dráhy dostaneme, keď predpokladáme hmotu Zeme sústredenú v guli menšej než je ich perigeálna vzdialenosť. Eliptická dráha balistickej strely pretína povrch Zeme v bode výstrelu a dopadu, ktoré spolu so stredom Zeme určujú rovinu elipsy i hlavnej kružnice Zeme, na ktorej sú miesto výstrelu a dopadu vzdialené o stredový uhol 2α. Tento uhol si určíme z geografických súradnic oboch miest — šírok φ_1, φ_2 a dĺžok λ_1, λ_2 pomocou sférického polárneho trojuholníka podľa kosinovej vety

$$\cos 2\alpha = \cos(\mathrm{R} - \varphi_1)\cos(\mathrm{R} - \varphi_2) + \sin(\mathrm{R} - \varphi_1)\sin(\mathrm{R} - \varphi_2) \, . \, \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$

čiže

$$\cos 2\alpha = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \, . \qquad (23)$$

V uvedenej spoločnej rovine je hlavná kružnica zemského povrchu daná polárnou rovnicou $K \equiv r = r_0$ a eliptická dráha balistickej strely $E \equiv r = p/(1 + e\cos\psi)$, kde p znamená parameter, e číselná výstrednosť elipsy a ψ prievodičový uhol počítaný od perigea, čiže $\psi = 2\mathrm{R} - \alpha$ takže rovnica elipsy prejde v tvar

$$E \equiv p = r - re\cos\alpha \, . \qquad (24)$$

Uhol ε, ktorý v mieste výstrelu i dopadu spolu sviera elipsa s kružnicou je vlastne elevačný výstrelový (dopadový) uhol a jeho tangens je daný rovnicou

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon = \mathrm{d}r/r\,\mathrm{d}\psi = e\sin\alpha/(1 - e\cos\alpha) \qquad (25)$$

ktorá jednoducho vyplýva zo zväčšenia polárnych súradníc r a ψ o $\mathrm{d}r$ a $\mathrm{d}\psi$.

V ďalšom si všetky prvky eliptickej dráhy vyjadríme pomocou distančného-dostrelového uhlu 2α a elevačného uhlu ε:

$$e = \mathrm{tg}\,\varepsilon/(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon) \, , \quad p = r_0\sin\alpha/(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon) \, , \qquad (26)$$

$$n = r_0/r_n = (\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon + \mathrm{tg}\,\varepsilon)/\sin\alpha \, , \qquad (27)$$

$$\nu = r_m/r_0 = \sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon - \mathrm{tg}\,\varepsilon) \, , \quad N = r_m/r_n = n\nu \qquad (28)$$

a maximálna výška dráhy $r_m - r_0$:

$$(r_m - r_0)/r_0 = \mathrm{tg}\,\varepsilon\,(1 - \cos\alpha)/(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon - \mathrm{tg}\,\varepsilon) = \\ = \nu\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\alpha/2 \qquad (29)$$

kde r_m a r_n sú maximálny (apogeálny) a minimálny (perigeálny) prievodič eliptickej dráhy strely.

Rýchlosť strely v apogeu je daná rovnicou (4) $v_a^2 = v_{ka}^2 . \, 2/(N + 1) = (v_k^2/\nu)\,2/(N + 1)$ kde v_{ka} je kruhová rýchlosť v apogeálnej vzdialenosti a v_k na povrchu Zeme $v_k = 7{,}9$ km/s takže

$$v_a/v_k = (\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon - \mathrm{tg}\,\varepsilon)/\sqrt{\sin\alpha\,(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon)} \, . \qquad (30)$$

Výstrelová (dopadová) rýchlosť v_v sa určí zo zákona o zachovaní energie podľa rovníc (5—6)

$$[v^2]_{v_a}^{v_v} = 2kM\,[1/r]_{r_m}^{r_0} \, , \quad v_v^2 - v_a^2 = 2v_k^2\,(1 - 1/\nu) \qquad (31)$$

čiže $v_v^2 = v_a^2 + 2v_k^2\,(1 - 1/\nu)$ a po úprave

$$(v_v/v_k)^2 = \sin\alpha\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\varepsilon)/(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon) \, . \qquad (32)$$

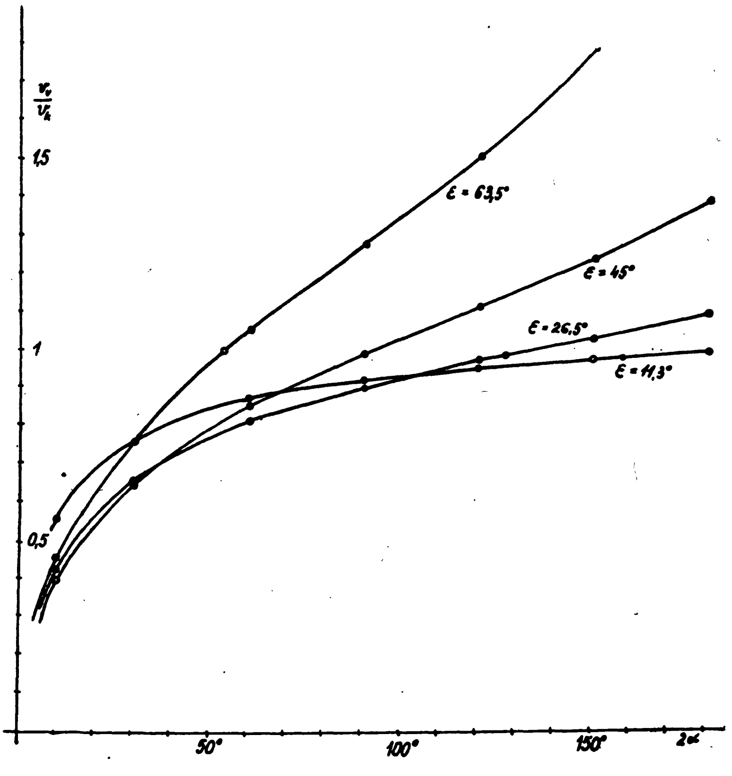
Zo vzťahu (32) si môžeme určiť maximálny elevačný uhol ε_m pre danú dostrelovú vzdialenosť 2α tým, že položíme $v_v/v_k = \sqrt{2}$, čím dostaneme $\varepsilon_m = R - \alpha/2 = R - 2\alpha/4$.

Podobne môžeme z tohoto vzťahu určiť elevačný uhol ε_1 pri ktorom pre danú dostrelovú vzdialenosť 2α $v_v = v_k = 7{,}9$ km/s tým, že položíme $v_v/v_k = 1$, čím dostaneme $\varepsilon_1 = R - \alpha = R - 2\alpha/2 = \varepsilon_m - \alpha/2$.

Hodnoty ε_m i ε_1 sú udané v tabuľke 3.

Tabuľka 3

2α	30	60	90	120	150	180°
ε_m	82,5	75	67,5	60	52,5	45°
ε_1	75	60	45	30	15	0°



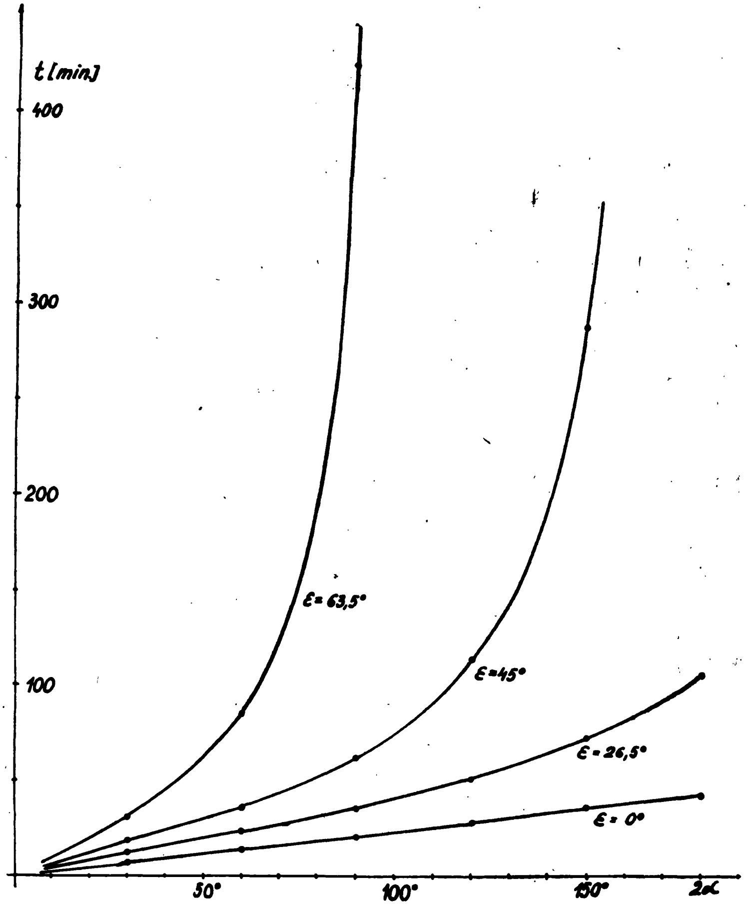
Obr. 5.

Hodnoty v_v/v_k podľa vzťahu (32) sú udané v tabuľke 4 a zobrazené graficky na obraze 5 pre rôzné dostrelové 2α aj elevačné uhly ε.

Z obrazu 5 vidno, že pre malé distančné uhly $2\alpha < 60°$ výstrelová rýchlosť závisí len málo na elevačnom uhle, ale so vztastajúcou vzdialenosťou s elevačným uhlom stúpa aj potrebná výstrelová rýchlosť strely.

Tabulka 4

tg ε	ε	2α = 10°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0,2	11,3°	56	78	88	93	96,5	99,5	102 %
0,5	26,5°	43	66	82	91	99	105	112 %
1	45°	40	65	86	100	113	126	141,4 %
2	63,5°	46	77	106	129	152	181 %	



Obr. 6.

Doba t letu balistickej strely z miesta výstrelu po cieľ je daná dvojnásobným rozdielom časov určených rovnicami (11) a (13), tedy $t = 2[(11) - (13)]$ čiže

$$t = \frac{T_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{N+1}{n}\right)^{3/2}\left(0,5 + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{N+1-2n}{n-1} + \frac{2}{\pi(N+1)}\sqrt{(n-1)(N-n)}\right) \tag{33}$$

kde ovšem kruhová oběžná doby $2T_0$ na povrchu Zeme bola nahradená kruhovou obežnou dobou $2T_0/n\sqrt{n}$ v perigeálnej vzdialenosti balistickej strely.

Časy tieto pre rôzné vzdialenosti 2α a elevačné uhly ε sú obsažené v tabuľke 5 a graficky znázornené na obraze 6.

Tabuľka 5

tg ε	ε	$2\alpha = 30°$	60°	90°	120°	150°	180°
0	0°	7,1	14,1	21,2	28,2	35,3	42,3 minút
0,5	26,5°	13,2	23,3	35,3	50,3	71,4	105 minút
1	45°	18,4	35,9	61,3	113	288	∞
2	63,5°	30,6	85	424	—	—	—

Z kriviek vidno, že doby letu balistických striel s elevačným uhlom prudko stúpajú najmä pri väčších dostrelových uhloch. Na väčšie vzdialenosti je preto výhodné voliť menšie elevačné uhly už aj preto, aby výstrelová rýchlosť nemusela byť príliš veľká. Treba ovšem pamätať aj na to, že let balistických striel najmä pri menších elevačných uhloch trvá v zemskej atmosfére omnoho dlhšie než u kozmických rakiet a preto treba tiež zavádzať do rovníc rýchlostí aj časov omnoho väčšie korekcie pre odpor vzduchu, ktoré pozmeňujú dráhy eliptické na balistický tvar.

O MOŽNOSTI VYUŽITÍ TERMOEMISE K ENERGETICKÝM ÚČELŮM

V poslední době se ve spojitosti s rozvojem atomových elektráren stává stále aktuálnější otázka přímé přeměny tepelné energie v elektrickou. Jednou možnou cestou, které je věnováno nejvíce pozornosti, je využití termoelektrického zjevu u polovodičů. V literatuře se však vyskytuje i několik zmínek o jiné cestě, zakládající se na využití termoemise. V principu jde o to, využít tepla k vyvolání termoemisního proudu bez zapojení vnějšího zdroje anodového napětí. Práce se většinou zabývají energetickou bilancí procesu a rozborem podmínek, nutných k dosažení maximální účinnosti takového „vakuového termočlánku“ [1], [2], [3], [4].

Jestliže i_e je hustota proudu emitovaných termoelektronů, v_0 potenciální rozdíl, odpovídající jejich střední rychlosti (a rovnající se $2kT/e$), a W_k příkon katody, pak účinnost je dána výrazem

$$\eta = \frac{i_e v_0}{W_k} \,. \tag{1}$$

Dosadíme-li příslušné hodnoty, dostaneme, že teoreticky by bylo možno tímto způsobem dosáhnout účinnosti $\geq 5\%$. Prakticky ovšem bez vložení anodového napětí takové hodnoty dosáhnout nelze, protože okolo katody vzniká prostorový náboj, který brání vylétávání dalších elektronů. Jeho účinek se zmenšuje se zkracováním vzdálenosti katody od sběrné elektrody. Moss vypočítal, že rozumné účinnosti by bylo možno dosáhnout při vzdálenosti elektrod asi 0,01 mm. Takový systém je však velmi těžko realisovatelný.