

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

V. I. Arnol'd

Matematické trivium

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37 (1992), No. 3, 150--159

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139389>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1992

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

natolik citlivá, že odpadá riskantní katetrizace a pacient je minimálně zatížen zářením i kontrastní látkou.

Nezabývali jsme se zde ani rentgenovou mikroskopií, ani tzv. mikrotomografií, ani řadou dalších zajímavých aplikací synchrotronového záření včetně technických, jako např. rentgenovou litografií. Nezbývá, než zájemce odkázat na literaturu. Zde šlo pouze o to ukázat, že SZ se již stalo běžným nástrojem vědeckého bádání (některé typy experimentů se staly vyloženě rutinní záležitostí) a pronikavě ovlivnilo fyziku, materiálový výzkum a některé další vědecké obory.

L i t e r a t u r a

- [1] *Synchrotron Radiation (Techniques and Applications)*. Red. C. KUNZ. Springer-Verlag 1979.
- [2] *Synchrotron Radiation Research*. Red. H. WINICK a S. DONIACH. Plenum Press 1980.
- [3] *Handbook on Synchrotron Radiation, sv. 1*. Red. E. E. KOCH. North-Holland 1983.
- [4] *Handbook on Synchrotron Radiation, sv. 2*. Red. G. V. MARR. North-Holland 1987.
- [5] *Handbook on Synchrotron Radiation, sv. 3*. Red. D. E. MONCTON. North-Holland 1991.
- [6] *Handbook on Synchrotron Radiation, sv. 4*. Red. S. EBASHI, M. KOCH a E. RUBENSTEIN. North-Holland 1991.

Matematické trivium

V. I. Arnold, Moskva

Úroveň matematické kultury klesá; jak studenti tak i aspiranti našich vysokých škol, včetně mechanicko-matematické fakulty Moskevské státní univerzity (dále MMF MSU), nejsou o nic víc nevzdělaní než jejich profesori a učitelé. V čem spočívá příčina tohoto nenormálního jevu? Za normálních okolností studenti a aspiranti znají svou vědu lépe než profesori v souladu s obecným principem šíření znalostí: nové vítězí nikoliv proto, že se ho starci naučí, ale proto, že přicházejí nová pokolení, která ho znají.

Z řady příčin tohoto nenormálního jevu chtěl bych se omezit na ty příčiny, které závisejí na nás samotných, abychom se mohli pokusit napravit to, co je v našich silách. Jednou z takových příčin, podle mého mínění, je náš systém zkoušek speciálně zaměřený na produkci zmetků, t.j. pseudovědců, kteří se matematiku učí jako marxismus: nazpaměť se naučí tvrzení a odpovědi na otázky, které se nejčastěji zadávají.

V. I. ARNOLD: *Matematičeskij trivium*. Uspechi mat. nauk, Vol. 46, č. 1 (1991), pp. 225–232. Přeložil JOSEF DANĚŠ.

Čím je dána úroveň přípravy matematika? Není to ani seznam přednášek ani sylabů. Jediný způsob k zachování toho, čemu jsme studenty opravdu naučili, je vyjmenovat úlohy, které po takové výuce musejí umět řešit.

Nemám na mysli nějaké obtížné úlohy, ale úlohy jednoduché, které představují zcela nezbytné minimum. I. E. Tamm vyprávěl, že za války, když upadl do zajetí k machnovcům, při výslechu uvedl, že studoval fyzikálně-matematickou fakultu. Na živu zůstal jen díky tomu, že uměl vyřešit úlohu z teorie řad, která mu byla předložena k ověření jeho pravdomluvnosti. Naši studenti musí být na takové zkoušky připraveni!

Zkouška z matematiky na celém světě spočívá v písemném řešení úloh. Písemný charakter zkoušky je všude považován za stejně samozřejmý rys demokratické společnosti, jako volba z několika kandidátů. Při ústní zkoušce je student totiž zcela bezmocný. Při zkouškách na katedře diferenciálních rovnic MMF MSU měl jsem možnost slyšet zkoušející, kteří se u vedlejšího stolu vozili po bezvadně odpovídajících studentech (a kteří věci možná rozuměli lépe než zkoušející). Jsou známy i takové případy, kdy k tomu docházelo úmyslně (tomu se někdy dalo vyhnout, když student chodil včas do posluchárny na přednášku).

Písemná práce je vlastně dokument a zkoušející musí být při její opravě, ať chce nebo ne, objektivnější (zvláště, a tak by tomu mělo být, když práce je pro zkoušejícího anonymní).

Písemné zkoušky mají ještě jednu nezanedbatelnou přednost: úlohy zůstanou a mohou být publikovány nebo předány studentům dalšího ročníku na přípravu k jejich zkoušce. Kromě toho tyto úlohy uchovávají úroveň přednášky i přednášejícího, který je sestavil. Jeho silná i slabá místa jsou hned vidět a odborníci mohou ihned ohodnotit přednášejícího podle toho, co chtěl studenty naučit a co je doopravdy naučil.

Mimochodem, ve Francii úlohy pro celostátní *Concours général* (přibližně odpovídající naší olympiádě) sestavují učitelé, kteří své úlohy posílají do Paříže, kde se z nich vyberou nejlepší. Ministerstvo tak dostane objektivní informace o úrovni svých učitelů: může porovnat na jedné straně úlohy předložené učiteli a na straně druhé výsledky jejich žáků. U nás, jak známo, jsou učitelé oceňováni podle vnějšího zjevu, rychlosti řeči a ideologické „správnosti“.

Není divu, že naše diplomy nikde nechtějí uznávat (domnívám se, že časem to bude platit i o diplomech z matematiky). Hodnocení získaná na základě ústních zkoušek, po nichž nezůstane žádná stopa, nelze objektivně porovnávat, mají krajně neurčitou a relativní váhu a závisejí zcela na skutečné úrovni výuky a požadavcích té které vysoké školy. Při stejných sylabech a známkách se mohou znalosti a schopnosti absolventů lišit (v pochopitelném smyslu) desetkrát i vícekrát. Ústní zkoušku lze navíc zfalšovat (to se stává i u nás na MMF MSU, kde, jak kdysi řekl neprozřetelně jeden učitel, dobrou známku je nutno dát studentovi, který odpovídá téměř podle učebnice a přitom není schopen odpovědět ani na jednu otázku).

Podstatu a nedostatky našeho systému vyučování matematice krásně popsal R. Feynman ve svých vzpomínkách (*To snad nemyslíte vážně!*, MF, Praha 1989, kapitola o výuce fyzice v Brazílii).

Podle Feynmana studenti ničemu nerozumějí, ale nikdy se na nic neptají, a tváří se, jako by všemu rozuměli. A když se někdo začne ptát, chápe se to jako že zbytečně

zdržuje učitele od výkladu a studenty od zapisování. Výsledkem toho je, že nikdo nemůže z naučeného nic použít ani v jednom příkladě. Zkoušky (dogmatické stejně jako naše: vyslovte definici, vyslovte větu) se však skládají úspěšně. Studenti se tak ocitnou ve stavu „samošřící se pseudovzdělanosti“ a mohou později podobným způsobem učit další pokolení. Celá tato činnost je zcela nesmyslná a naše produkce odborníků je ve skutečnosti do značné míry podvodem, diletantstvím a nadhodnocováním; tito takzvaní odborníci nejsou schopni řešit ani ty nejjednodušší úlohy, neovládají svoje řemeslo.

Proto, aby se tomu učinila přítrž, je nutno uchovávat nikoliv soupis vět, ale seznam úloh, které studenti musejí umět řešit. Tyto seznamy je třeba každoročně publikovat (myslím, že takový seznam by měl obsahovat přibližně deset úloh pro každou semestrální přednášku). Pak teprve budeme vidět, co vlastně studenty učíme a nakolik se nám to daří. Proto, aby se studenti naučili svou vědu používat, všechny zkoušky je nutno provádět pouze písemně.

Je samozřejmé, že úlohy se budou měnit podle vysoké školy a rok od roku. Pak bude možné porovnávat úroveň učitelů a absolventů různých ročníků. Student, který k výpočtu střední hodnoty sté mocniny funkce sinus s desetiprocentní přesností potřebuje podstatně více než 5 minut, neovládá matematiku, i kdyby se zabýval nestandardní analýzou, univerzálními algebry, supervarietami nebo větami o vnoření.

Sestavení vzorových úloh je obtížná práce; přesto si myslím, že je třeba ji udělat. Jako pokus předkládám soupis stovky úloh, které představují matematické minimum studenta fyziky. Vzorové úlohy (na rozdíl od sylabů) nejsou dány jednoznačně a mnozí se mnou pravděpodobně souhlasit nebudou. Přesto se domnívám, že je nutné začít uchovávat úroveň matematických požadavků pomocí písemných zkoušek a vzorových úloh. Chtěl bych věřit, že v budoucnu studenti budou dostávat vzorové úlohy ke každé přednášce již na začátku semestru a že ústní zkoušky pro šprty odpadnou.

(1) Nakreslete graf derivace a graf integrálu funkce zadané grafem.

(2) Vypočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}.$$

(3) Nalezněte kritické hodnoty a kritické body zobrazení $z \rightarrow z^2 + 2\bar{z}$ (odpověď nakreslete).

(4) Vypočtete stou derivaci funkce

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}.$$

(5) Vypočtete stou derivaci funkce

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

v bodě 0 s relativní chybou 10%.

(6) V rovině (x, y) nakreslete křivku zadanou parametricky:

$$x = 2t - 4t^3, \quad y = t^2 - 3t^4.$$

- (7) Kolik normál k elipse lze vést daným bodem? Vyšetřete oblast, ve které je počet normál maximální.
- (8) Kolik bodů maxima, bodů minima a sedlových bodů má funkce $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4$ na ploše $x + \dots + v = 0$, $x^2 + \dots + v^2 = 1$, $x^3 + \dots + v^3 = C$?
- (9) Nabývá každý kladný polynom dvou reálných proměnných v rovině minima?
- (10) Vyšetřete asymptotiky řešení y rovnice $x^5 + x^2y^2 = y^6$, konvergujících k 0 pro $x \rightarrow 0$.
- (11) Vyšetřete na konvergenci integrál $\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{1+x^4y^4}$.
- (12) Určete tok vektorového pole \vec{r}/r^3 plochou $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- (13) S relativní přesností 5% vypočtěte $\int_1^{10} x^x dx$.
- (14) S alespoň 10% relativní přesností vypočtěte $\int_{-\infty}^{\infty} (x^4 + 4x + 4)^{-100} dx$.
- (15) S 10% relativní přesností vypočtěte $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(100(x^4 - x)) dx$.
- (16) Jakou část objemu pětirozměrné krychle zaujímá koule do ní vepsaná? A deseti-rozměrné?
- (17) Nalezněte s 10% relativní přesností vzdálenost těžiště 100-rozměrné polokoule o poloměru 1 od středu koule.
- (18) Vypočtěte

$$\int \dots \int e^{-\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j} dx_1 \dots dx_n.$$

- (19) Pomocí Snelliova zákona $n(y) \sin \alpha = \text{const}$, kde α je úhel sevřený paprskem s osou y , vyšetřete dráhu paprsku v prostředí s indexem lomu $n(y) = y^4 - y^2 + 1$.*
- (20) Nalezněte derivaci řešení rovnice $x'' = x + Ax'^2$ vyhovující počáteční podmínce $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, podle parametru A v $A = 0$.
- (21) Nalezněte derivaci řešení rovnice $x'' = x'^2 + x^3$ vyhovující počáteční podmínce $x(0) = 1$, $x'(0) = A$, podle parametru A v $A = 0$.
- (22) V prostoru koeficientů rovnice $x''' + ax'' + bx' + cx = 0$ vyšetřete hranici oblasti stability ($\max \Re \lambda_j < 0$).
- (23) Řešte kvazihomogenní rovnici

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^2}{y}.$$

- (24) Řešte kvazihomogenní rovnici

$$x'' = x^5 + x^2x'.$$

* Pozn. překl.: Tato úloha je totožná s jednou úlohou z Arnoldovy knihy *Obyknovennye differencial'nye uravneniya* s následujícím komentářem. Řešení této úlohy vysvětluje fata morgánu. Index lomu vzduchu nad pouští má v určité výšce maximum, protože ve vyšších a nižších (teplejších) vrstvách vzduchu je vzduch řidší a index lomu je nepřímo úměrný rychlosti. Kmitání paprsku poblíž vrstvy s maximální hodnotou indexu lomu vnímáme jako fatu morgánu. Stejnými kmity paprsku lze vysvětlit i jiný jev — zvukový kanál v oceánu, kterým se zvuk šíří na vzdálenost stovek kilometrů. Příčinou tohoto jevu je souhra teploty a tlaku, která má za následek vznik vrstvy s maximálním indexem lomu (t.j. s minimální rychlostí zvuku) v hloubce 500–1000 m. Zvukový kanál lze využít k varování před tsunami.

- (25) Může se asymptoticky stabilní rovnovážný stav stát po linearizaci nestabilním?
 (26) Vyšetřete chování řešení následujících soustav při $t \rightarrow +\infty$: (a) $x' = y$, $y' = 2 \sin y - y - x$, (b) $x' = y$, $y' = 2x - x^3 - x^2 - \varepsilon y$, pro $\varepsilon \ll 1$.
 (27) Nakreslete tvar řešení rovnice

$$x'' = F(x) - kx', \quad F = -dU/dx,$$

v rovině (x, E) , kde $E = x'^2/2 + U(x)$, v okolí nedegenerovaných kritických bodů potenciálu U .

- (28) Nakreslete fázový portrét a vyšetřete jeho změnu při změně malého komplexního parametru ε :

$$z' = \varepsilon z - (1+t)z|z|^2 + \bar{z}^4.$$

- (29) Náboj se pohybuje s rychlostí 1 v rovině pod vlivem magnetického pole $B(x, y)$ kolmého na tuto rovinu. Na kterou stranu bude unášen střed Larmorovy kružnice? Vypočtěte rychlost unášení (v prvním přiblížení). (Z matematického hlediska jde o křivky křivosti NB , kde $N \rightarrow \infty$.)
 (30) Nalezněte součet indexů nenulových singulárních bodů vektorového pole $z\bar{z}^2 + z^4 + 2\bar{z}^4$.
 (31) Vypočtěte index singulárního bodu 0 vektorového pole o souřadnicích

$$(x^4 + y^4 + z^4, x^3y - xy^3, xyz^2).$$

- (32) Vypočtěte index singulárního bodu 0 vektorového pole

$$\text{grad}(xy + yz + zx).$$

- (33) Vypočtěte koeficient zařetězení fázových trajektorií rovnice malých kmitů $x'' = -4x$, $y'' = -9y$ na plochách stejné energie.
 (34) Vyšetřete singulární body křivky $y = x^3$ v projektivní rovině.
 (35) Nakreslete geodetické křivky na ploše

$$(x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1.$$

- (36) Nakreslete evolventy kubické paraboly $y = x^3$ (evolventa je množina bodů $\vec{r}(s) + (c-s)\vec{r}'(s)$, kde s je obloukový parametr křivky $\vec{r}(s)$ a c je konstanta).
 (37) Dokažte, že plochy

$$((A - \lambda E)^{-1}x, x) = 1$$

v eukleidovském prostoru procházející bodem x a odpovídající různým hodnotám λ jsou vzájemně ortogonální. (A je symetrický operátor s jednoduchými vlastními čísly.)

- (38) Vypočtěte integrál Gaussovy křivosti plochy

$$x^4 + (x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 3y^2 - 1) = 0.$$

(39) Vypočtete Gaussův integrál

$$\oint \oint \frac{(d\vec{A}, d\vec{B}, \vec{A} - \vec{B})}{|\vec{A} - \vec{B}|^3},$$

kde \vec{A} probíhá křivku $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, $z = 0$ a \vec{B} probíhá křivku $x = 2 \cos^2 \beta$, $y = \frac{1}{2} \sin \beta$, $z = \sin 2\beta$.

(40) Přeneste rovnoběžně ze západu na východ vektor směřující v Leningradě (z.š. 60°) na sever podél uzavřené paralely.

(41) Vypočtete geodetickou křivost přímky $y = 1$ v horní polorovině s Lobačevského-Poincarého metrikou

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2.$$

(42) Protínají se těžnice trojúhelníka v Lobačevského geometrii v jednom bodě? A výšky?

(43) Vypočtete Bettiho čísla plochy $x_1^2 + \dots + x_k^2 - y_1^2 - \dots - y_\ell^2 = 1$ a množiny $x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq 1 + y_1^2 + \dots + y_\ell^2$ v $(k + \ell)$ -rozměrném lineárním prostoru.

(44) Vypočtete Bettiho čísla plochy $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ v trojrozměrném projektivním prostoru. Totéž pro plochy $z = xy$, $z = x^2$, $z^2 = x^2 + y^2$.

(45) Vypočtete index samoprotínání plochy $x^4 + y^4 = 1$ v projektivní rovině \mathbf{CP}^2 .

(46) Zobrazte konformně vnitřek jednotkového kruhu na první kvadrant.

(47) Zobrazte konformně vnějšek jednotkového kruhu na vnějšek zadané elipsy.

(48) Zobrazte polorovinu s vyříznutou úsečkou kolmou na hranici poloroviny konformně na polorovinu.

(49) Vypočtete

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{\sqrt{1+z^{10}}}.$$

(50) Vypočtete

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx.$$

(51) Vypočtete integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx.$$

(52) Vypočtete první asymptotický (pro $t \rightarrow \infty$) člen integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} dx}{\sqrt{1+x^{2n}}}.$$

(53) Vyšetřete singulární body diferenciální formy $dt = dx/y$ na kompaktní Riemannově ploše $y^2/2 + U(x) = E$, kde U je polynom a E není kritická hodnota.

(54) $x'' = 3x - x^3 - 1$. V které jámě (mělčí nebo hlubší) je při stejné celkové energii perioda kmitů větší?

(55) Vyšetřete topologicky Riemannovu plochu funkce

$$w = \operatorname{arctg} z.$$

(56) Kolik uch má Riemannova plocha funkce

$$w = \sqrt{(1 + z^n)}?$$

(57) Určete dimenzi prostoru řešení úlohy $\partial u / \partial \bar{z} = \delta(z - i)$ pro $\Im z \geq 0$, $\Re u(z) = 0$ pro $\Im z = 0$, $u \rightarrow 0$ pro $z \rightarrow \infty$.

(58) Určete dimenzi prostoru řešení úlohy $\partial u / \partial \bar{z} = a\delta(z - i) + b\delta(z + i)$ pro $|z| \geq 2$, $\Im u = 0$ pro $|z| = 2$.

(59) Na existenci a jednoznačnost vyšetřete řešení úlohy $yu_x = xu_y$, $u|_{x=1} = \cos y$ v okolí bodu $(1, y_0)$.

(60) Existuje a je jednoznačné řešení Cauchyho úlohy

$$x(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=0} = 1$$

v okolí bodu $(x_0, 0)$ osy x ?

(61) Pro jaké největší t má úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \sin x, \quad u|_{t=0} = 0$$

řešení na intervalu $[0, t)$?

(62) Naleznete všechna řešení rovnice $y \partial u / \partial x - \sin x \partial u / \partial y = u^2$ v okolí bodu $(0, 0)$.

(63) Existuje v celé rovině řešení Cauchyho úlohy $y \partial u / \partial x + \sin x \partial u / \partial y = y$, $u|_{x=0} = y^4$? Je jednoznačné?

(64) Má Cauchyho úloha $u|_{y=x^2} = 1$, $(\nabla u)^2 = 1$ hladké řešení v oblasti $y \geq x^2$? V oblasti $y \leq x^2$?

(65) Určete střední hodnotu funkce $\ln r$ na kružnici $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (funkce $1/r$ na sféře).

(66) Řešte následující Dirichletovu úlohu:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \text{pro } x^2 + y^2 < 1; \\ u &= 1, & \text{pro } x^2 + y^2 = 1, y > 0; \\ u &= -1, & \text{pro } x^2 + y^2 = 1, y < 0. \end{aligned}$$

(67) Čemu je rovna dimenze prostoru řešení úlohy

$$\Delta u = 0 \text{ pro } x^2 + y^2 > 1, \quad \partial u / \partial n = 0 \text{ pro } x^2 + y^2 = 1$$

spojitých v $x^2 + y^2 \geq 1$?

(68) Určete

$$\inf \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$$

ve třídě funkcí u třídy C^∞ rovných 0 v 0 a 1 na $x^2 + y^2 = 1$.

- (69) Dokažte, že velikost prostorového úhlu, pod kterým je vidět danou uzavřenou křivku, je vně křivky harmonickou funkcí vrcholu úhlu.
- (70) Určete střední hodnotu prostorového úhlu, pod kterým je vidět kruh $x^2 + y^2 \leq 1$ ležící v rovině $z = 0$ z bodů sféry $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$.
- (71) Určete hustotu náboje na vodivé hranici dutiny $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, do které je ve vzdálenosti r od středu umístěn náboj $q = 1$.
- (72) V prvním přiblížení vzhledem k ε vypočtete vliv kontrakce Země ($\varepsilon \approx 1/300$) na gravitační pole Země ve vzdálenosti Měsíce. (Předpokládá se, že Země je homogenní.)
- (73) Určete (v prvním přiblížení vzhledem k ε) vliv nedokonalosti skoro sférického kondenzátoru $R = 1 + \varepsilon f(\phi, \theta)$ na jeho kapacitu.
- (74) Nakreslete graf $u(x, 1)$, jestliže $0 \leq x \leq 1$, $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$, $u|_{t=0} = x^2$, $u|_{x^2=x} = x^2$.*
- (75) V důsledku ročních výkyvů teploty v městě N země promrzá do hloubky 2 m. Do jaké hloubky by země promrzla v důsledku měsíčních výkyvů stejné amplitudy?
- (76) Vyšetřete pro $t \rightarrow +\infty$ chování řešení úlohy

$$u_t + (u \sin x)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u|_{t=0} = 1, \quad \varepsilon \ll 1.$$

- (77) Určete vlastní čísla Laplaceova operátoru $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ na sféře poloměru R v eukleidovském prostoru dimenze n a jejich násobnost.
- (78) Řešte Cauchyho úlohu

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2B, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 6 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - 2A,$$

$$A|_{t=0} = \cos x, \quad B|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial B}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

- (79) Kolik řešení má okrajová úloha

$$u_{xx} + \lambda u = \sin x, \quad u(0) = u(\pi) = 0?$$

- (80) Řešte rovnici

$$\int_0^1 (x + y)^2 u(x) dx = \lambda u(y) + 1.$$

- (81) Určete Greenovu funkci operátoru $d^2/dx^2 - 1$ a řešte rovnici

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy = e^{-x^2}.$$

- (82) Při jakých hodnotách rychlosti c rovnice $u_t = u - u^2 + u_{xx}$ má řešení ve tvaru běžící vlny $u = \phi(x - ct)$, $\phi(-\infty) = 1$, $\phi(\infty) = 0$, $0 \leq u \leq 1$?

*) Pozn. překl.: Pokud máte pochybnosti o správnosti okrajové podmínky, pak vezte, že je máte neoprávněně.

- (83) Nalezněte řešení rovnice $u_t = u_{xxx} + uu_x$, která mají tvar běžící vlny $u = \phi(x-ct)$, $\phi(\pm\infty) = 0$.
- (84) Určete počet kladných a záporných čtverců normální formy kvadratické formy $\sum_{i < j} (x_i - x_j)^2$ n proměnných. Totéž pro formu $\sum_{i < j} x_i x_j$.
- (85) Určete délky poloos elipsoidu

$$\sum_{i \leq j} x_i x_j = 1.$$

- (86) Středem krychle (tetraedru, ikosaedru) veďte přímku tak, aby součet čtverců jejich vzdáleností od vrcholů byl (a) minimální; (b) maximální.
- (87) Určete derivace délek poloos elipsoidu $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \varepsilon xy$ podle ε v $\varepsilon = 0$.
- (88) Jaké obrazce můžeme dostat při protnutí nekonečněrozměrné krychle $|x_k| \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$, dvourozměrnou rovinou?
- (89) Vypočtěte součet vektorových součinů: $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$.
- (90) Vypočtěte součet komutátorů matic: $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B]$, kde $[A, B] = AB - BA$.
- (91) Nalezněte Jordanův normální tvar (a) operátoru $e^{d/dt}$ v prostoru kvazipolynomů $\{e^{\lambda t} p(t)\}$, kde stupeň polynomů je menší než 5; (b) operátoru ad_A , $B \rightarrow [A, B]$ v prostoru kvadratických matic B řádu n , kde A je diagonální matice.
- (92) Nalezněte řady podgrup grupy rotací krychle a její normální dělitele.
- (93) Rozložte prostor funkcí definovaných ve vrcholech krychle na invariantní podprostory, které jsou ireducibilní vzhledem ke grupě (a) jeho symetrií; (b) jeho rotací.
- (94) Rozložte pětirozměrný reálný lineární prostor na ireducibilní invariantní podprostory vzhledem ke grupě generované cyklickou permutací prvků jeho báze.
- (95) Rozložte prostor homogenních polynomů pátého stupně v proměnných (x, y, z) na ireducibilní podprostory invariantní vzhledem ke grupě rotací $SO(3)$.
- (96) Každý z 3600 účastníků volá telefonní stanici v průměru každou hodinu. Jaká je pravděpodobnost toho, že během dané sekundy ji bude volat alespoň 5 účastníků? Určete průměrný interval mezi dvěma takovými sekundami $(i, i + 1)$.
- (97) Částice, která se pohybuje po celých bodech polopřímky $x \geq 0$, přeskóčí s pravděpodobností a o 1 vlevo, s pravděpodobností b o 1 vpravo a jinak zůstane na svém místě (pro $x = 0$ místo skoku vlevo zůstane na svém místě). Určete ustálené rozdělení pravděpodobností a středních hodnot x a x^2 za velkou dobu, jestliže částice byla na počátku v bodě 0.
- (98) Hráči hrají hru oko na prstech a stojí v kruhu. Každý hráč ukáže několik prstů pravé ruky, počty prstů se sečtou a od vedoucího hráče se odpočítá příslušný počet hráčů. Při jakém počtu N hráčů je pravděpodobnost výhry alespoň jednoho z $N/10$ vhodných hráčů větší než 0,9? Jak se chová pravděpodobnost výhry vedoucího hráče pro $N \rightarrow \infty$?
- (99) Jeden z hráčů schovává desetihalěr nebo dvacetihalěr a druhý hráč hádá. Uhodněli schovanou minci, může si ji vzít, jinak zaplatí 15 hal. Je tato hra spravedlivá? Jaké jsou optimální smíšené strategie obou hráčů?

(100) Určete střední hodnotu plochy průmětu krychle o straně velikosti 1 na rovinu s izotropní distribucí náhodného směru promítání.

Jízlivá poznámka překladatele (Jo. Da.): Pokud jste byli trpěliví a dočetli seznam úloh až do konce, vydržte, prosím, ještě chvíli. Uvedený seznam je podle Arnolda *matematickým minimem* pro studenty **fyziky**. A teď trochu jízlivosti: doporučoval bych studentům **matematiky**, aby si na tomto seznamu otestovali své znalosti a schopnosti. Neuspějí-li (a tomu tak bude asi často), nechť se obrátí na své učitele. Obávám se, že mnohý učitel nebude mít jaksi hned čas. Některé úlohy jsou zcela jednoduché (např. úloha uvedená v textu před seznamem úloh a úlohy č. 4, 5, 89 a 90) a měly by být zodpovězeny prakticky obratem.

Stručně o autorovi: V.I. Arnold se narodil 12.6.1937 v Oděse. V roce 1957 ještě jako student MMF MSU záporně rozřešil 13. Hilbertův problém, studium ukončil v r. 1959. (Z jeho výsledků plyne, že každá spojitá funkce 3 proměnných je kompozicí funkcí 2 proměnných.) V r. 1963 obhájil vědeckou hodnost doktora fyzikálně matematických věd, od r. 1965 působí jako profesor na MMF MSU. V r. 1990 se stal řádným členem Akademie věd SSSR. Pracuje v teorii diferenciálních rovnic, funkcionální analýze a teorii reálných funkcí a zabývá se m.j. také úspěšně analytickou mechanikou. Uveďme alespoň seznam poct, kterých se V. I. Arnoldovi dostalo: 1) v r. 1958 získal cenu Moskevské matematické společnosti pro mladé matematiky, r. 1965 Leninovu cenu (společně s jeho učitelem A. N. Kolmogorovem) a r. 1983 Crafoordovu cenu (společně s L. Nirenbergem); 2) byly mu uděleny čestné doktoráty následujícími univerzitami: Université P. et M. Curie, Paris (1978), University of Warwick (1988), University of Utrecht (1991) a Università di Bologna (1991); 3) je čestným členem následujících institucí: London Mathematical Society, Académie des Sciences (Paris), Royal Society (London), Accademia dei Lincei (Roma), National Academy of Sciences (USA), Academy of Arts and Sciences (Boston) a American Philosophical Society (Philadelphia) (před zrušením Akademie der Wissenschaften der DDR byl také jejím čestným členem).

V. I. Arnold je také autorem nebo spoluautorem řady úspěšných učebnic a monografií: *Problèmes ergodiques de la mécanique classique* (1967) (spoluautor A. Avez), *Obyknovennyye differencial'nye uravneniya* (1971), *Dopolnitel'nye glavy po teorii obyknovennyyh differencial'nyh uravnenij* (1978), *Matematičeskie metody klassičeskoj mehaniki* (1979, 2.vyd.), *Teorija katastrof* (1990, 2.vyd.), *G'ujgens i Barrou, N'juton i Guk (Pervye šagi matematičeskogo analiza i teorii katastrof ot teorii evol'vent do kvazikristallov)* (1989), *Osobennosti differenciruemyh otobraženij I* (1982), II (1984) (spoluautory posledních dvou monografií jsou A. N. Varčenko a S. M. Gusejn-Zade). Většina Arnoldových knih vyšla v několika vydáních a všechny byly přeloženy do angličtiny.