Jozef Kvasnica

O některých didaktických problémech vzájemného vztahu matematiky a fyziky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 35 (1990), No. 2, 97--108

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139265

neboť toto město je samo překrásným zeměpisným fraktálem v horizontálním i vertikálním směru. (O pestrost a vybarvení tohoto fraktálu se stará sama příroda, procházky kolem četných rozlehlých pláží v centru města byly velkým zážitkem; skromné kousky textilu vcelku nenarušily hladkost žádné křivky.)

Na univerzitě v São Paulu pak proběhla konference o parciálních diferenciálních rovnicích; mnohé přednášky měly vazbu i na naši československou problematiku. Velmi hezká byla přehledná přednáška D. G. Figuereida o nelineárních okrajových úlohách, o problematice, kterou u nás tak významně rozvinul a obohatil Svatopluk Fučík. Fučíkovo spektrum byl jeden z pojmů, se kterým Figuereido hodně operoval.

Zdaleka nevím, co to je Jižní Amerika a Brazílie. Aby to člověk poznal, musí v té části světa prožít svůj život. Poučil jsem se však trochu o významu některých pojmů, které u nás známe jenom z knih, měl jsem hodně času na matematiku, mnohému jsem se přiučil, poznal jsem jiný svět a nyní jsem zahájil proces zapomínání. A abych aspoň něco ze svých dojmů stačil sdělit, byl jsem požádán o napsání tohoto příspěvku.

vyučování

O NĚKTERÝCH DIDAKTICKÝCH PROBLÉMECH VZÁJEMNÉHO VZTAHU MATEMATIKY A FYZIKY

Jozef Kvasnica, Praha

Úvod

Stále častěji, a to u nás i jinde ve světě, se setkáváme s problematikou výuky matematiky pro fyziky, a také obráceně s problematikou výuky fyziky pro matematiky. Rostoucí matematizace většiny věd činí tento problém mnohem širším a netýká se tedy pouze vzájemného vztahu matematiky a fyziky.

Prof. RNDr. Jozef Kvasnica, DrSc. (1930) pracuje na katedře matematické fyziky MFF, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8

Abychom lépe pochopili společné kořeny těchto problémů, uděláme nejdříve malou historickou exkurzi.

Fyzika se hned od počátku vyvíjela jako věda kvantitativní, exaktní, která si vždy kladla za cíl formulovat své poznatky matematickou formou. To je podstatný rozdíl od tzv. deskriptivních věd, které se dlouhou dobu spokojovaly (a většinou dodnes spokojují) registrací a popisem pozorovaných skutečností, objektů a jevů, popř. jejich tříděním, přičemž zpravidla scházejí objektivní kritéria pro tato třídění.

Není žádnou nadsázkou tvrzení, že fyzika dosáhla svého zcela výsadního postavení mezi vědami právě proto, že své poznatky formuluje matematicky. Matematická formulace přírodních zákonů dovoluje předvídat budoucí vývoj systému, popř. teoreticky rekonstruovat jeho minulý stav, a to buď s naprostou jistotou (v případě klasické fyziky) anebo s pravděpodobností odpovídající kvantovým zákonitostem. Uvedeme alespoň dva fascinující příklady plodů tohoto přístupu. Nedávno jsme obdivovali televizní přenos ze setkání kosmické sondy s tajuplnou Halleyovou kometou. Tento úspěch by byl nemyslitelný, kdyby výpočtem přesně naprogramovaná trajektorie sondy nebyla dodržována. Výkon televizního vysílače na sondě nepřesahoval 40 W. Přenesení tohoto slabého signálu (tj. výkon žárovky ve stolní lampě) do anténního systému na vzdálené Zemi kladlo mimořádné nároky na přesný výpočet a orientaci směrových antén. A co říci projektu přistání sondy na miniaturním Marsově měsíčku – Phobosu? Nádherným příkladem matematického pohledu do minulosti systému je rekonstrukce počátečního stadia vývoje vesmíru – big bangu.

Tento vztah matematiky a fyziky byl vzájemný, prospěšný pro obě strany. Některé matematické disciplíny (např. diferenciální a integrální počet) fakticky vznikly na půdě fyziky, z bezprostředních potřeb formulovat fyzikální poznatky odpovídající matematickou formou. Na druhé straně některé matematické disciplíny, které vznikly na půdě matematiky, z vnitřních potřeb rozvoje matematiky, podstatně ovlivnily, popř. přímo umožnily vznik nových fyzikálních disciplín. Stačí připomenout podíl neeuklidovské geometrie na vzniku obecné teorie relativity a široké aplikace teorie grup v mnoha oborech moderní fyziky.

Ještě do konce minulého století byl vztah matematiky a fyziky tak blízký, že o řadě významných představitelů je nesnadné či nemožné říci, zda byli matematiky nebo fyziky.

Tehdejšímu stavu fyziky odpovídala i výuka matematiky pro posluchače fyziky. Ještě na rozhraní našeho století vysokoškolský absolvent fyziky v podstatě vystačil s nepříliš složitými partiemi matematické analýzy.

Pro ilustraci uvedeme, že rigorózní zkouška Maxe Plancka (1879), pozdějšího tvůrce kvantové teorie, obsahovala jako teoreticky nejsložitější problém řešení rovnice pro lineární harmonický oscilátor, což je úkol, jaký dnes musí zvládnout každý posluchač prvního semestru. Fotokopii protokolu uvádíme v [1].

Ještě pikantnější situace nastala při formulaci tzv. maticové (kvantové) mechaniky v roce 1925. Werner Heisenberg zavedl místo spojité souřadnice x a spojité hybnosti p elektronů v atomech „tabulky" $[X_{mn}]$ a $[P_{mn}]$, které měly popisovat přechody mezi energetickými hladinami m, n. Pro součin těchto tabulek zavedl záhadné pravidlo, které mu nakonec umožnilo teoretické určování hladin. Ani Heisenberg ani jeho učitel Max Born, v té době již světově proslulý teoretický fyzik, nevěděli, že jde o matice a pravidlo maticového násobení. Podrobněji o tom píšeme v [1].

Srovnejme to s tím, co potřebuje znát dnešní absolvent fyziky: teorie funkcí komplexní proměnné, teorie distribucí, parciální diferenciální rovnice, teorie grup, numerické metody, programování, atd., atd.

A tím se dostáváme k základnímu didaktickému problému, jak toto všechno posluchači fyziky podat zhruba během pěti až šesti semestrů, aby nejen porozuměl v potřebném rozsahu základním pojmům a teorémům, ale aby také prakticky ovládal techniku výpočtů.

Nesmíme zapomínat ani na druhou stranu této mince: co a jak přiblížit posluchačům matematiky ze širokého spektra aplikací matematických disciplín v přírodních a technických vědách. Tento dosti opomíjený úkol je však neméně důležitý, poněvadž většina absolventů matematiky se bude v té či oné míře potýkat s aplikacemi matematiky v přírodních a technických vědách.

Rozsáhlá a neobyčejně plodná matematizace většiny věd staví před výuku matematiky zcela nové úkoly, které se většinou velkoryse přehlížejí anebo se o nich taktně a cudně mlčí. Pokud se matematika v rozsáhlejší míře přednášela pouze posluchačům fyziky a některých technických oborů, dalo se oprávněně předpokládat, že tito posluchači mají i potřebné matematické vlohy k exaktnímu a abstraktnímu myšlení. To však nelze říci o posluchačích řady dalších oborů, které byly tradičním útočištěm „nematematických typů", avšak dnes musí i tito posluchači absolvovat dosti náročný kurs matematiky. A tak se dostáváme ke známému začarovanému kruhu. Na vysokou školu přicházejí takoví posluchači, jaké nám připravila střední škola. A na středních školách učí právě takoví učitelé, jaké vychovala vysoká škola.

To je okruh problémů, jimiž se budeme v dalším zabývat.

Vztah matematiky a fyziky ve vysokoškolské výuce

Mnozí z nás ještě pamatují dobu, kdy budoucí matematici a fyzici studovali první dva ročníky společně. Mělo to řadu nesporných předností. Nezcela vyhraněný posluchač měl dva roky možnost poslechnout si obě disciplíny, a pak teprve si vybrat „tu pravou a jedinou". Tehdy také platila nepsaná zásada, že nosnou část výuky v prvních ročnících vedli nejzkušenější a nejváženější učitelé. Díky tomu jsme mohli v Praze všichni (budoucí matematici, fyzici i učitelé) vychutnávat tu „pravou matematiku, ty pravé matematické perly" v podání takových vynikajících osobností, jakými byli akademici Bydžovský, Čech, Jarník a Katětov. A budoucí matematici měli v té době ještě čerstvé znalosti středoškolské fyziky, a tak mohli postupně vnikat do tajů té záhadné kuchyně fyzikálního myšlení, v němž se od izolovaných empirických poznatků odvážně přechází k matematické formulaci obecných teorií, které pak dovolují matematické duši tolik blízké deduktivní odvozování nových poznatků a vztahů. Vždyť koho by nenadchl způsob, jakým se z různorodých poznatků o elektřině a magnetismu dospělo k předpovědi elektromagnetických vln a všech jejich vlastností?

Pro toho, kdo měl štěstí poslouchat tento výklad v nenapodobitelně gradované režii akademika Václava Votruby, to nepochybně zůstalo nezapomenutelným pedagogickým, vědeckým, ale i uměleckým zážitkem. Osobně rád přirovnávám způsob získávání fyzikálních poznatků k luštění tajuplného detektivního příběhu. Pachatel zpravidla nezanechává na místě činu přímé identifikační znaky, a tak hledání pachatele začíná úmorným vytvářením mozaiky faktů, z nichž – jak se později ukáže – mnohé s daným případem nesouvisí, pokračuje vytipováním možných pachatelů a končí pokusem o usvědčení pachatele. Pokud se to podaří, pak lze vytvářet duchaplné teorie o správnosti použité metody, která se však už v následujícím případě může projevit jako nevyhovující.

Jaké byly klady a zápory té dvojleté symbiózy ve výuce matematiky a fyziky na našich fakultách? Nepřehlédněme skutečnost, že budoucí matematici se seznamovali s vysokoškolskou fyzikou v prvním dvojletí, tedy v bezprostřední návaznosti na svoje středoškolské znalosti. S touto generací matematiků se pak poměrně snadno domluvil fyzik a inženýr, když potřeboval kvalifikovanou pomoc při matematické formulaci a řešení nějakého problému.

Vnitřní vývoj matematiky, potřeba přednášek z řady nových matematických disciplín vedly k tomu, že výuka fyziky byla na matematických specializacích (až na nepatrné výjimky) zcela zrušena. Došlo tak k situaci, která se v rozvodovém řízení nazývá separatio a tore et mensa — oddělení od lože a stolu. Při hodnocení tohoto kroku je třeba vycházet z představ pozdější realitou korigovaných, tj. z představ o budoucí společenské objednávce absolventů matematiky. Z pohledu profesionálního matematického badatele, který se nikdy žádnými aplikacemi matematiky zabývat nebude, bylo dvojleté studium fyziky (anebo studium fyziky vůbec) ztrátou času tolik potřebného pro výuku vysoce abstraktních matematických disciplín. Poněvadž různé teoretické ústavy a pracoviště, na nichž se daly takové představy realizovat, se brzy saturovaly, přistoupilo se k potřebným korekturám. Některé matematické specializace (matematická analýza a numerická matematika) zařadily v závěru studia povinné přednášky z teoretické fyziky. Poněvadž jsem se na této výuce řadu let podílel, dovolil bych si zrekapitulovat některé zkušenosti.

Na matematické analýze tato výuka probíhá v posledních třech semestrech s poměrně štědrou dotací 4 hodiny týdně. Rámcový sylabus pokrývá klasické disciplíny — analytickou mechaniku, teorii elektromagnetického pole a základy magnetohydrodynamiky (makroskopická teorie plazmatu). Vlastní výběr učiva je dostatečně pružný, dá se vhodně přizpůsobit i zájmům posluchačů, což zvyšuje nejen atraktivnost, ale i efektivnost přednášek. V některých ročnících dali posluchači přednost přednáškám z kvantové teorie. O těchto poučných zkušenostech se zmíníme později.

Poměrně štědrá hodinová dotace těchto přednášek je poněkud zkreslena citelně kratším desátým semestrem, kdy jsou navíc posluchači silně tlačeni termínem odevzdání diplomových prací a přípravou na státní závěrečnou zkoušku (SZZ). Nelze také přehlédnout, že obsah těchto fyzikálních přednášek není v požadavcích ke SZZ, což má nepochybně dopad na motivaci alespoň části posluchačů.

Výhodou přesunu vybraných fyzikálních přednášek do posledních semestrů studia matematiky je skutečnost, že posluchači v té době již absolvovali potřebné matematické přednášky (např. teorii obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic, teorii distribucí, teorii operátorů), takže výklad lze provádět na mnohem vyšší matematické úrovni, než je tomu u obdobných přednášek pro fyziky v prvních semestrech studia. Na přednášejícího to klade mimořádné nároky, a to hned z několika stran. Především je to skutečnost, že posluchači se vracejí k fyzice po takřka čtyřleté přestávce, po níž zůstalo posluchačům pouze torzo jejich někdejších znalostí středoškolského učiva fyziky — zcela ve shodě se známou definicí, že paměť je přirozená schopnost zapomínat. K tomu přistupuje „psychologická bariéra“ (nebo profesionální deformace), spočívající v tom, že posluchači jsou v té době již zcela v zajetí standardního matematického postupu: definice, věta, důkaz. (To však nemíníme, ani s pověstným matematickým ε, jako výtku proti tomuto postupu!) V tomto schématu není nutné zdůvodňovat výběr předpokladů, definic a axiómů; zcela postačí prověřit jejich logickou bezespornost, nezávislost a úplnost pro důkaz příslušného teorému. Ve fyzice (a v dalších vědách) však předpoklady pro vznik jevu musíme vytvořit, přírodní zákony (axiómy) si nemůžeme vybírat, nýbrž je musíme od přírody odpozorovat právě takové, jaké objektivně jsou. Nějaký čas to trvá než posluchači matematiky přijmou tato pro ně nezvyklá „pravidla hry". Teprve po této „ideologické" přípravě lze přistoupit k servírování překvapujících lahůdek: postupně ukazovat, že matematický aparát vytvořený čistě logickou cestou bez jakýchkoli referencí k přírodnímu dění je ideálním prostředkem k popisu širokého spektra přírodních zákonů.

K dosažení tohoto cíle je nutno podstatně modifikovat i způsob výkladu a argumentace. V přednáškách pro fyziky se (zcela správně) věnuje hodně místa uspořádání a analýze klíčových experimentů, z nichž se pak vyvozují příslušné teoretické závěry. Takový postup je pro posluchače matematiky z výše uvedených důvodů nepoužitelný. Experimentálnímu základu se nelze vyhnout, avšak nutno velmi pečlivě vybrat ideové (myšlenkové) schéma pokusu, aniž bychom zabíhali do experimentálních detailů, které jsou zpravidla pro faktické provedení experimentu rozhodující. Ještě lepší je, když se podaří najít izomorfismus (popř. homomorfismus) dvou vhodných zobrazení (formalismů). Ze zkušenosti vím, že takový způsob vytváření fyzikálních teorií se jeví posluchačům matematiky nejbližší a nejpřesvědčivější. Nejlépe bude, když uvedeme několik konkrétních příkladů. Omezíme se přitom na ideové schéma, abychom neopakovali známé věci. Čtenář, jemuž nejsou některé z těchto věcí „chlebem vezdejším", nalezne potřebné informace v citované literatuře.

Jako rozcvičku zvolíme zavedení pojmu konzervativního systému, který má významné postavení v klasické mechanice. Elementární (infinitezimální) práce $\mathrm{d}A$ vykonaná silou $\mathbf{F}$ na úseku $\mathrm{d}\mathbf{r}$ se definuje skalárním součinem

$$\mathrm{d}A = \mathbf{F} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Práce $\int_c \mathrm{d}A$ vykonaná silou $\mathbf{F}$ po libovolné křivce C nezávisí na tvaru této křivky právě tehdy, když $\mathrm{d}A$ je úplným diferenciálem. V takovém případě se síla $\mathbf{F}$ dá vyjádřit jako gradient skalární funkce $-U(\mathbf{r})$, kde $U(\mathbf{r})$ je potenciální energie. Ve spojení s Newtonovým pohybovým zákonem $\mathbf{F} = \mathrm{m}\, \mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}t^2$ pak dostaneme

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}\, U\,.$$

Zde m je hmotnost, tečky nad symbolem označují derivace podle času t. Pro zjednodušení zápisu budeme uvažovat jednorozměrný pohyb

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\,. \tag{1}$$

Snadno se přesvědčíme, že tuto pohybovou rovnici lze přepsat v ekvivalentním tvaru [2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0\,, \tag{2}$$

kde

$$L \equiv L(x, \dot{x}) \equiv \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$$

je Lagrangeova funkce (rozdíl kinetické a potenciální energie). Rovnice (2) jsou však řešením variační úlohy

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

A to už je Hamiltonův variační princip. Zobecnění na libovolný počet hmotných bodů se zobecněnými souřadnicemi q_1, $q_2, \ldots, q_f$ je přímočaré [3].

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0\,. \tag{3}$$

Variační princip je univerzálním fyzikálním principem. Lze jej snadno spojit s Hamiltonovými kanonickými rovnicemi; z invariantnosti pohybových rovnic lze získat obecný pohled na zákony zachování (teorém Emmy Noetherové). Vše lze zarámovat do matematické teorie diferencovatelných variet [4].

S úspěchem jsme se setkali při přenesení Hamiltonova kanonického formalismu z mechaniky do teorie pole. Uvedeme ilustrativní příklad. Vlnovou rovnici

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(\mathbf{r}, t) = 0$$

lze získat z variačního principu

$$\delta \int_{\Omega} \left[(\nabla\varphi)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega = 0 .$$

Řešení $\varphi(\mathbf{r}, t)$ lze vyjádřit pomocí úplné ortonormální báze $\zeta_k(\mathbf{r})$ ve tvaru

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_k q_k(t)\, \zeta_k(\mathbf{r}) .$$

Po standardních úpravách dostaneme pro q_k (viz např. [5]) Lagrangeovy rovnice typu (3). Odtud lze pak standardním postupem zavést hamiltonián a Hamiltonovy kanonické rovnice. Tím převedeme teorii (vlnového) pole do formalismu korpuskulární fyziky. Na tom pak lze vybudovat most potřebný pro přechod k formalismu kvantové teorie.

Poslední ilustrativní příklad vezmeme z oblasti termodynamiky. Druhý termodynamický princip vyjadřuje v různých obměnách jistá omezení na směr přenosu tepla (teplo nemůže samovolně přecházet z tělesa chladnějšího na teplejší), resp. na množství práce vykonané při přenosu tepla. Obyčejně se to formuluje jako principiální nemožnost sestrojit perpetuum mobile druhého druhu, tj. takový stroj, který by trvale vykonával kladnou práci pouze tím, že by se při tom ochlazovalo jedno těleso na teplotu nižší, než je teplota nejchladnější části jeho okolí. C. CARATHÉODORY (1909) ukázal, že nemožnost sestrojit perpetuum mobile druhého druhu lze vyjádřit ekvivalentním výrokem (viz např. [6]): v libovolném okolí libovolného stavu systému existují stavy nedosažitelné adiabatickou cestou.

Všechny tyto formulace mají charakter negativních výroků. Jak z těchto negativních tvrzení vytěžit nějaký pozitivní závěr? Posluchači vědí, že množství tepla získané systémem závisí na způsobu přechodu z počátečního do koncového stavu („integrační cestě"). To matematicky značí, že infinitezimální přírůstek tepla $\mathrm{d}Q$ není úplným diferenciálem, ale obecnou lineární diferenciální formou (Pfaffovou formou) stavových proměnných (např. teploty, objemu, koncentrací jednotlivých komponent). Označíme-li tyto stavové proměnné symbolem x_i, pak je

$$\mathrm{d}Q = X_1\, \mathrm{d}x_1 + X_2\, \mathrm{d}x_2 + \ldots + X_n\, \mathrm{d}x_n ,$$

kde $X_i \equiv X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou diferencovatelné funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nynějším posluchačům matematiky se teorie Pfaffových forem vůbec nepřednáší, takže se jim musí v potřebném rozsahu vysvětlit. Existuje-li diferencovatelná funkce $\mu \equiv \mu(x_i, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv 0$ taková, že

$$\mu\, \mathrm{d}Q = \mathrm{d}\sigma$$

je úplným diferenciálem funkce $\sigma \equiv \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pak říkáme, že μ je integrujícím faktorem formy $\mathrm{d}Q$. Integrující faktor musí vyhovovat soustavě diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu X_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu X_i) ,$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n) .$$

To je $n(n-1)/2$ podmínek pro funkci

n proměnných. Integrující faktor tedy obecně existuje pouze pro $n \leqq 2$. Při $n \geqq 3$ musí mezi koeficienty X_i Pfaffovy formy existovat odpovídající počet vztahů, což činí existenci integrujícího faktoru pro $n > 3$ výjimečnou situací.

A nyní přijde to fascinující spojení fyziky s matematikou. Nejdříve se dokáže, že integrující faktor Pfaffovy diferenciální formy existuje právě tehdy, když v libovolném okolí libovolného bodu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ existují body, jichž nelze dosáhnout po cestě $\mathrm{d}Q = 0$. Je-li $\mathrm{d}Q$ množstvím tepla, pak $\mathrm{d}Q = 0$ vyjadřuje adiabatičnost procesu. Carathéodoryho formulace druhého termodynamického principu tak obecně garantuje existenci integrujícího faktoru Pfaffovy formy $\mathrm{d}Q$. Tento integrující faktor se dá obecně najít, čímž se obecně zavede absolutní teplota a entropie (podrobnosti uvádíme v [6]). To je základ odvozování termodynamických vztahů. Posluchači jsou doslova šokováni množstvím obecných závěrů, které lze získat z pouhé existence integrujícího faktoru tepla $\mathrm{d}Q$, např. nepřímou úměrnost mezi magnetizací paramagnetika a absolutní teplotou či závislost energie záření v dutině na čtvrté mocnině absolutní teploty.

I když fyzikální přednášky pro posluchače matematiky musí mít odpovídající formu matematické exaktnosti, nelze při tom zapomínat na konkrétní aplikace, na „dotažení" obecných teorií do číselných hodnot. (Na to sylabus přednášek prozíravě pamatuje!) O některých příkladech jsme se již zmínili, nyní uvedeme některé další, které se u posluchačů matematiky setkaly s mimořádnou pozorností a zájmem. V mechanice je to (několikařádkový!) důkaz toho, že v centrálním poli je trajektorie rovinnou křivkou. Ve speciálním případě gravitačního působení je to kuželosečka. S úspěchem se setkávají partie z teorie fázového prostoru: jako aplikace teorie (invariantní) míry, explicitní vyjádření fázového objemu interagující soustavy částic (duchaplné „finty" z teorie analytických funkcí) či pozoruhodné souvislosti s termodynamickými veličinami [7].

Řadu dalších možností skýtají přednášky z teorie elektromagnetického pole a teorie plazmatu. Z formálně matematického hlediska jde o nelineární soustavu simultánních parciálních diferenciálních rovnic. Jednou stranou této „mince" je důkaz existence řešení, druhou je nalezení řešení pro konkrétní fyzikální situaci. Vzpomínám si, jak jsem – při vhodných příležitostech (experti budou této vsuvce rozumět) – dráždil pana profesora Čecha výroky, že pro mne řešení existuje, až nějaké najdu. Posluchači jsou vždy u vytržení z toho, že z té spleti (ne právě jednoduché) soustavy rovnic lze „vydolovat" konkrétní analytické řešení. V matematických přednáškách zřejmě „není čas" na konkrétní výpočty. O tomto problému budeme ještě mluvit v další části tohoto příspěvku. S největším hladem posluchačů matematiky po konkrétních výpočtech jsem se setkával při přednáškách z kvantové mechaniky. Posluchači samozřejmě znali množství učených pojmů a teorémů o operátorech, avšak zřejmě při přednáškách a cvičeních nikdy „nezpracovali" žádný konkrétní operátor tak, aby našli jeho spektrum, vlastní vektory, a dokázali úplnost báze. Proto vždy uvítali typické příklady fyzikálních operátorů, na nichž se mohli seznámit s řadou důvtipných triků, pomocí nichž se takový program realizuje. Jako perličku uvedu překvapení posluchačů nad spektrem nabité částice v Coulombově poli, kdy na diskrétní spektrum záporných vlastních čísel navazuje spojité spektrum kladných vlastních čísel. Oživení v posluchárně vždy vyvolalo spektrum částice v exponenciálním poli, kdy energie je určena kořeny Besselových funkcí vzhledem k indexu.

Jaké jsou tedy zkušenosti s výukou (teoretické) fyziky pro posluchače matematiky? Myslím, že je to prospěšný krok. Posluchači matematiky nahlédnou do fyzikální „kuchyně" způsobem co možno nejbližším jejich profesionální výchově, seznámí se s řadou zajímavých aplikací matematických disciplín a získají zásobu obratů užitečných při řešení konkrétních úloh. Stálo by za úvahu zařadit někam do nižších semestrů krátký „udržovací" kurs fyziky, aby časový odstup od maturity nebyl tak propastný.

Dokazování teorémů na úkor matematické rutiny, anebo naopak?

V předešlé kapitole jsme se na několika místech setkali se skutečností, že ve výuce matematiky se věnuje nedostatečná pozornost konkrétním aplikacím matematických teorémů a provádění výpočtů. A to jsme mluvili o posluchačích matematických specializací, jejichž studium je jednooborové!

Tento problém vyvstává ještě naléhavěji při výuce matematiky pro fyziky. Zmínili jsme se o řadě matematických oborů, které musí posluchači fyziky zvládnout během 5 semestrů při průměrné týdenní dotaci 9 hod. (včetně cvičení). Vzniká tak nelehký problém, jak toto všechno posluchači fyziky podat, aby nejen porozuměl v potřebném rozsahu základním pojmům, ale aby také prakticky ovládl techniku výpočtů.

Pod tlakem bezprostředních praktických potřeb matematické rutiny při výuce fyziky v prvních semestrech se nezřídka vyskytují snahy zredukovat výuku matematiky na úroveň návodů k provádění výpočtů. Takové radikální snahy je však nutno rázně odmítnout, poněvadž jsou krátkozraké, na pohled sice řeší matematické potřeby fyziky, avšak ve skutečnosti vážně škodí matematice i fyzice. Matematika má svou vlastní strukturu (právě tak jako fyzika) a tu nelze ani při výuce matematiky pro fyziky zcela ignorovat. Matematická metoda budování pojmů, odvozování výsledků je a musí zůstat ideálem pro každou vědu, a to pro fyziku na prvním místě.

Nesmíme pustit ze zřetele, že výuka obecné filozofie a logiky se z našich středních škol fakticky vytratila, což se projevuje radikálním snížením úrovně logického myšlení. Bez nadsázky lze říci, že úroveň logického myšlení dnešních maturantů je otřesná: naprostá většina klade s úplnou samozřejmostí rovnítko mezi aplikacemi z A plyne B a z B plyne A, nerozlišuje mezi příčinou a následkem, atd., atd.

Kde jinde než při výuce matematiky se má budoucí fyzik naučit základům exaktního logického myšlení, kritickému, nepředpojatému přehodnocování pojmů při každém jejich zobecnění?

Pro ilustraci uvedeme všeobecně známý, avšak velice poučný příklad. Už od první třídy základní školy se žákům vtlouká do hlavy, že hodnota součtu nezávisí na pořadí sčítanců. Když se později na gymnáziích zavede pojem nekonečné řady, žáci s úplnou samozřejmostí předpokládají, že uvedené pravidlo (komutativní zákon) platí i pro součet nekonečného počtu členů. Žákům unikne a učitel je neupozorní na to, že jde o kvalitativně nový pojem, o podstatné zobecnění pojmu součtu, že je třeba prověřit, zdali dřívější pravidla zůstanou i nadále v platnosti.

A tak mě jímá hrůza při pomyšlení, že takto „připravený" homo sapiens bude se stejnou samozřejmostí dělat ukvapené soudy v občanském i vědeckém životě. (Pokud se někomu bude zdát, že to vidím příliš černě, ať sleduje úroveň diskuse a argumentace např. ve sdělovacích prostředcích.) Z dlouholeté zkušenosti mohu potvrdit, jaké překvapení vyvolá u posluchačů prvního ročníku matematicko-fyzikální fakulty (tedy u předpokládaného výkvětu našich matematických talentů) už pouhá zmínka o tom, že by se součet řady mohl změnit „pouze" přeskupením členů. Představme si ty nedozírné možnosti řešení našich finančních problémů!

Na tomto známém příkladě je vidět, jak je nutné pokaždé prověřit, zda pro rozšířený nebo zobecněný pojem platí všechna dřívější „pravidla hry". Copak to ve fyzice nepotřebujeme? A kde jinde než v matematice mají studenti takovou možnost osvojit si pravidla logického myšlení?

Vím, že takové hodnocení významu matematiky nevyvolá námitky, avšak mnozí fyzikové právem namítnou (ti opatrnější pouze poznamenají), že posluchači fyziky neumějí počítat. Počtářská rutina (integrování, řešení diferenciálních rovnic apod.) posluchačů matematiky je ještě horší, přestože těch hodin matematiky mají podstatně více než fyzikové. Jenom v počtu hodin to tedy nebude.

Stížnosti na malou matematickou erudici posluchačů fyziky jsou dvojího druhu, což je třeba odlišit.

Na prvním místě je jisté časové zaostávání matematické výuky za potřebami výuky fyziky v daném údobí. Týká se to zejména prvního ročníku, kdy se v mechanice „skloňují" diferenciální rovnice a operace vektorové analýzy, k nimž výuka matematiky pro fyziky dospěje mnohem později. Co se dá v dané situaci dělat, popř. co jsme v daném směru udělali?

Situace není ani zdaleka tak špatná, jak se ji snaží líčit někteří skeptikové. Na prvním místě je třeba zdůraznit, že k pochopení fyzikální podstaty daného problému není vůbec nutné, aby posluchač byl expertem v příslušné matematické disciplíně. Vysvětlíme poněkud podrobněji, co tím máme na mysli. Většina posluchačů prvního ročníku má již ze střední školy znalosti diferenciálního a integrálního počtu v rozsahu potřebném pro výklad mechaniky v tomto semestru. A pokud jde o diferenciální rovnice, vektorovou a tenzorovou analýzu, jichž se v mechanice v hojné míře používá? Je zcela absurdní požadovat, aby se tyto různorodé partie systematicky vyložily během prvního měsíce v přednášce matematika pro fyziky. Na druhé straně se bez těchto partií nemůžeme obejít. Co tedy dělat? Zavedli jsme v prvním semestru tzv. proseminář matematické fyziky, v němž se tyto matematické partie v potřebném časovém sledu (návaznosti na výklad fyziky) a v potřebném rozsahu vysvětlí. Pamětníci si vzpomenou na obdobný „Trkalův proseminář". Poněvadž tato forma se nám osvědčila, dovolil bych si podělit se se čtenáři o některé zkušenosti. Proseminář je veden teoretickým fyzikem, a to způsobem, jakým fyzikové matematiku běžně používají. Posluchačům je nutno vysvětlit poslání a cíl tohoto prosemináře, aby u nich nevznikl falešný dojem, že matematika se dá vysvětlovat mnohem jednodušeji, než jak to uslyší v přednáškách z matematiky. To by byl neodpustitelný prohřešek proti výchově posluchačů k logickému myšlení. Nejlépe nám tuto ideu osvětlí několik příkladů. Motivací k odvození vzorce pro délku oblouku křivky je aproximace tohoto oblouku soustavou lomených čar. Přechodem k „infinitezimálnímu dělení" se na dvou řádcích „odvodí" příslušný matematický vzorec. Bez upozornění na slabiny takového „odvození" by mohl u posluchačů vzniknout dojem, že jde o dokonalý matematický důkaz. Stačí však připomenout (a to pokládáme za nezbytné), že soustavu lomených čar lze volit různými způsoby (např. těsně nad křivkou a těsně pod ní), aby bylo jasné, co všechno do úplného důkazu chybí. Taková prezentace vzorce pro délku oblouku křivky však zcela postačí k pochopení příslušného fyzikálního učiva, přičemž nikterak nenarušuje logickou stavbu matematických přednášek. Exaktní matematický důkaz tak může počkat do doby, než bude v matematických přednáškách vytvořen potřebný pojmový a dokazovací aparát. Podobným způsobem postupujeme i při „odvozování" Gaussovy a Stokesovy věty, bez nichž se už v prvním semestru nemůžeme obejít. Základní ideu důkazu Gaussovy věty lze posluchačům přiblížit tak, že uvažujeme rozdíl toků mezi svěma infinitezimálně blízkými rovinami (stěnami kvádru). Nedostatek místa nám nedovoluje pokračovat v uvádění dalších obdobných příkladů.

Druhým problémem je nedostatečná matematická erudice při řešení konkrétních úloh. Značná část kolegů-fyziků na tom zakládá svá tažení proti způsobu výuky matematiky pro fyziky. Nechci tvrdit, že je zde všechno v pořádku, nesmíme však zpanikařit, abychom ukvapenými reformami nenapáchali více škod než užitku. Je třeba ujasnit si, jakou rutinu požadujeme. Zpravidla při tom mlčky srovnáváme své nynější znalosti a počtářskou rutinu se znalostmi a rutinou svých posluchačů, a zjišťujeme, že pod tímto zorným úhlem jsou na tom posluchači katastrofálně. Kdyby tomu bylo obráceně, pak by se příslušný vyučující měl nejdříve sám posadit do lavic pro posluchače. To se týká všech předmětů, nejen matematiky. Všem těmto radikálním reformátorům adresuji otázku: „Uměl každý z nás vždy s takovou lehkostí integrovat a řešit diferenciální rovnice tak, jak to umíme dnes po mnohaleté praxi?" Copak se taková praxe dá získat během 30 až 40 semestrálních hodin cvičení z matematiky? Je to obdobné jako s výukou budoucích řidičů. Copak po absolvování autoškoly (s několika hodinami praktické jízdy) bude „novopečený" řidič s rutinou a přehledem zvládat spletité dopravní situace?

Problému získání potřebné matematické rutiny již během studia je třeba věnovat trvalou pozornost. Pan profesor Trkal nám často zdůrazňoval, že počítat se musíme učit sami, že k tomu, abychom se to naučili, přednášky a cvičení nestačí. Vždyť i kdybychom počet hodin cvičení zdvojnásobili (na úkor tzv. teorie), připadlo by na každého posluchače řešit u tabule tak nejvýše 10 příkladů za semestr. A zbylo by pak v přednáškách dosti času, abychom posluchačům vysvětlili teorémy a metody, podle nichž mají počítat? Jak tedy posluchače přesvědčit, popř. přinutit, aby věnovali více času získání potřebné matematické rutiny? Vhodným (i když ne příliš populárním) donucovacím prostředkem by mohlo být ukládání domácích písemných úkolů, které by cvičící asistent kontroloval. (Kontrola těchto úkolů by se měla započítat do pedagogického úvazku.) Skeptici určitě namítnou, že to posluchači stejně opíší. To je však vyjádření apriorní nedůvěry a podezíravosti vůči všem posluchačům. Dovolil bych si poznamenat, že takovým podezíravým „učitelům" by slušelo jiné povolání, než je výchova mladé generace. Za více než třicetileté pedagogické činnosti jsem se přesvědčil, že naprostá většina posluchačů matematicko-fyzikálních oborů (jiné posluchače jsem neučil) jsou lidé čestní se silně vyvinutým smyslem pro pravdu a poctivost. Vždyť si zvolili nelehký studijní obor, po jehož absolvování je nečekají ani vysoké výdělky a jiné výhody, ani popularita a veřejná sláva. Avšak vraťme se k tomu opisování domácích úkolů (příkladů). Samozřejmě, že nepřichází v úvahu odevzdávání různých druhů kopií toho, co vypracoval jeden snaživý student. Ani to doslovné opisování, co se snadno pozná, není nakonec bez užitku, poněvadž i takovému posluchači z toho opisování přece jen něco zůstane v paměti. Mnozí z nás si ještě pamatují, jak prospívalo výuce násobilky nebo vyjmenovaných slov to, když „potřebný“ žák dostával zvláštní domácí úkol napsat stokrát příslušnou násobilku nebo vyjmenovaná slova.

Mnohé se dá zlepšit užším sepětím matematiky a fyziky. Pracovníci naší katedry vypracovali přes 200 řešených příkladů s fyzikální tematikou do sbírky úloh z matematiky pro fyziky.

Nejradikálnější reformátoři výuky matematiky pro fyziky vidí jedinou cestu ke zvýšení matematické rutiny posluchačů v tom, že by se podstatně (nejspíše na $\varepsilon \to 0$) zredukovalo dokazování teorémů, čímž by se výuka matematiky změnila na úroveň kuchařských receptů. (Co kdyby někdo na oplátku vyžadoval, abychom stejným způsobem „vyučovali“ fyziku pro jiné obory?) Důkazy do matematiky pochopitelně patří, a to už z toho důvodu, že se v nich zpravidla koncentrují obraty a postupy, které se pak v různých obměnách používají při aplikacích těchto teorémů. Hodně času se však dá ušetřit např. tím, že se nebudou „pro pořádek“ provádět metodicky shodné důkazy různých teorémů. Hlavním zdrojem úspory času při důkazech může být vhodná volba výchozích předpokladů. Matematik má přirozenou snahu dokázat platnost teorému za nejobecnějších předpokladů, které pak často vedou k tomu, že důkaz je technicky i časově náročný. Fyzik anebo technik se však v praxi nesetká s křivkou, která je na celém (neprázdném) intervalu spojitá, avšak nikde nemá derivaci, popř. s integrací po takové křivce. Myslím, že i takový jednodušší důkaz za vhodně upravených předpokladů je lepší než žádný důkaz. A při tom je zpravidla vidět, že některý předpoklad byl zvolen pouze pro snazší provedení důkazu, takže teorém platí obecněji. Znění teorému je nutno uvést „v celé parádě“.

Nedoceněné morálně výchovné poslání matematiky

Často si ani neuvědomujeme mnohostranné možnosti využití matematiky ve výchově k poctivosti, čestnosti a úctě k pravdě. Není třeba přitom použít ani jediného „kazatelského“ slova, poněvadž nejlépe působí příklad, který je trvale a nenápadně na očích. Tímto výchovným příkladem je trvalá hodnota matematických výroků a zejména sama matematická metoda, která spočívá v tom, že každý pojem se přesně definuje, stanoví se příslušná kritéria pro ověření správnosti tvrzení, čímž se vylučuje subjektivismus, demagogie, předpojatost a faleš. Není to ideální model pro každodenní lidské jednání i vzájemné jednání lidských komunit? Kolik by odpadlo sporů, které vznikají (nebo jsou záměrně vytvářeny) právě tím, že se nejasně vytyčí pojmy, metody a cíle.

Literatura

[1] Kvasnica J.: *Priekopníci modernej fyziky.* Bratislava, Smena 1987.

[2] Kvasnica J. a kol.: *Mechanika.* Praha, Academia 1988.

[3] Landau L., Lifšic J.: *Mechanika.* Moskva, GIFML 1966.

[4] Carathéodory C.: *Variationsrechnung.* Berlin Teubner B. G. 1935.

[5] Kvasnica J.: *Teorie elektromagnetického pole.* Praha Academia 1985.

[6] Kvasnica J.: *Termodynamika.* Praha, SNTL 1965.

[7] Kvasnica J.: *Statistická fyzika.* Praha, Academia 1983.

jubilea & zprávy

Rukopisy článků k osobním výročím nebo k výročím institucí musí být redakci dodány 9 měsíců před datem výročí, mají-li být publikovány včas.

DOCENT JIŘÍ BRABEC ŠEDESÁTNÍKEM

RNDr. Jiří Brabec, CSc., docent katedry matematiky fakulty elektrotechnické ČVUT v Praze, oslaví v těchto dnech své 60. narozeniny.

Jiří Brabec se narodil dne 4. března 1930 v Žirovnici, okres Pelhřimov, v rodině úředníka. Do obecné a měšťanské školy chodil v letech 1936—1944 v rodné Žirovnici, potom studoval na reálném gymnáziu v Jindřichově Hradci. Vzhledem k velmi dobrému prospěchu vstoupil v roce 1949 na matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy, kde studoval matematiku, specializaci „matematickou analýzu". Po úspěšných státních závěrečných zkouškách v roce 1953 nastoupil na místo asistenta na Vysoké škole strojní a elektrotechnické v Plzni. V roce 1956 byl jmenován odborným asistentem. V letech 1956—59 absolvoval postgraduální kurs jaderné techniky na VŠSE v Plzni. V roce 1961 přešel na elektrotechnickou fakultu ČVUT v Praze. Zde byl zanedlouho zařazen do vědecké přípravy, jejímž výsledkem byla kandidátská disertační práce na téma „Aproximace signálů Kotělnikovovými řadami". Kandidátskou disertaci úspěšně obhájil v roce 1969 v Matematickém ústavu ČSAV a stal se kandidátem fyzikálně matematických věd. Téhož roku byl promován na Univerzitě Karlově doktorem přírodních věd (RNDr.). V roce 1973 se habilitoval na fakultě elektrotechnické ČVUT na základě předložené habilitační práce „Vektorové funkce na zobecněných jevových polích" a byl jmenován docentem matematiky.

Doc. Brabec v průběhu svého působení na elektrotechnické fakultě přednášel všechny povinné i většinu specializovaných matematických kursů konaných na fakultě, a to ve všech formách výuky. Od roku 1976 působí jako školitel aspirantů v oboru „Matematická analýza". Kromě vedení jednotlivých aspirantů přednáší