

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Luděk Pekárek; Pavel Kolařík

Deterministické fyzikální soustavy s chaotickým chováním

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 36 (1991), No. 6, 319--335

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139003>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1991

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

skutečnosti jí i dosáhne). Bieberbachova domněnka spočívala v tom, že obecněji platí $|a_n| \leq n$ pro každé n .

Loewner dokázal v r. 1923, že domněnka platí pro $n = 3$; v r. 1955 ji Garabedian a Schiffer dokázali pro $n = 4$; v r. 1968 ji Pedersen a Ozawa dokázali pro $n = 6$; v r. 1972 ji Garabedian, Pedersen a Schiffer dokázali pro $n = 5$; a v r. 1973 ji Ozawa a Kubota dokázali pro $n = 8$. Pokrok byl pomalý a nikterak slibný.

Průlom, který domněnku proměnil v matematickou větu, přišel v r. 1984, kdy Louis de Branges předložil důkaz obecného případu. Důkaz na několik set stránek byl založen na jeho teorii mocninných řad, pro něž čtverce absolutních hodnot koeficientů mají konečný součet. Jeho původní důkaz obsahoval menší chyby, které byly opravitelné a byly brzo opraveny. Odborníci byli stále tak trochu nesví, ale jejich nepokoj netrval příliš dlouho. Nelíbilo se jim, že důkaz spočíval na metodách funkcionální analýzy, která zdánlivě nemá s věcí nic společného. Konečně Leningradský seminář geometrické teorie funkcí vypracoval důkaz, který by se skoro jistě Bieberbachovi líbil. Důkaz je kratší a průzračnější než jeho speciálnější předchůdci pro případy $n = 5$ a $n = 6$. Mocninné řady, pro něž čtverce absolutních hodnot koeficientů mají konečný součet, vypadly ze hry, de Brangeovy pronikavé pohledy do podstaty však zůstávají tím, co uvedlo události do pohybu. Díky předchozí slávě nebudou všechny zapomenuty.

Literatura: MI 8/1/40

Epilog: Odpovědi na otázku uvedenou v názvu článku je nesporné a rozhodné ne.

Deterministické fyzikální soustavy s chaotickým chováním

Luděk Pekárek, Pavel Kolařík, Praha

1. Úvod

Slovo chaos chápeme obvykle jako synonymum pro naprostý zmatek a spojujeme ho většinou s nepředvídatelným chováním nebo s náhodným pohybem. Označujeme jím

RNDr. LUDĚK PEKÁREK, DrSc. (1924) je vedoucím vědeckým pracovníkem Fyzikálního ústavu ČSAV, Na Slovance 2, 18000 Praha 8. RNDr. PAVEL KOLAŘÍK (1959) je odborným asistentem MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.

například nekoordinované navzájem si překážející jednání mnoha lidí či neuspořádaný pohyb velkého počtu nějakých individuí, ať už živých organismů nebo těles. Ve fyzice se s takovým chaosem nejčastěji setkáme u modelu plynu, ve kterém jsou atomy nebo molekuly nahrazeny pohybujícími se koulemi.

Také náhodnou chůzi izolovaného individua, u kterého je směr každého kroku náhodný, nezávislý na směru kroku předchozího, označíme patrně za chaotický pohyb. Je známo, že tato představa slouží i jako model pro Brownův pohyb, pozorovatelný pod mikroskopem u malých částic tuše nebo pylu vznášejících se v kapalině.

V obou uvedených příkladech je pohyb naprosto nepravidelný. Kdybychom si mezi srážejícími se koulemi vybrali jednu určitou a sledovali ji, nelišila by se její dráha od dráhy, kterou se pohybuje individuum s náhodnou chůzí. Přesto je mezi oběma pohyby podstatný rozdíl: srážející se koule se sice pohybují neuspořádaně, avšak jejich pohyb není náhodný. Pohyb každé koule je přesně určen zákony klasické fyziky — Newtonovými pohybovými rovnicemi. Jestliže v nějakém čase jsou přesně známy polohy a hybnosti všech koulí v daném souboru, pak jsou polohy a hybnosti těchto koulí v libovolném pozdějším čase jednoznačně určeny silami působícími při srážkách. (Že to pro větší počet koulí v souboru nedovedeme vypočítat, je jiná otázka.) Podstatné je, že v přírodě je podle této klasické představy pohyb každé koule určen přesně a jednoznačně, pouze nepřesnost měření a neschopnost počítat s přesnými čísly nám znemožňuje vývoj takové soustavy přesně určit.

U nahodilé chůze je tomu jinak. Pro její popis musíme po každém kroku vždy znovu udat směr dalšího kroku pomocí nějaké náhodné veličiny. Nic pro další krok takového individua nelze ze znalosti předcházejícího kroku předpovědět.

Klasická (předkvantová) fyzika neznala jevy, které by se řídily náhodnými, nedeterministickými zákonitostmi. Představa, že zákony klasické fyziky popisují správně i jevy v atomech a v živých objektech, dala i argument pro víru v předurčenost osudu člověka a současně pro závěr, že předpovědět tento osud je pro složitost soustavy nemožné.

Prvek principiální nejistoty zavedla do popisu přírodních dějů teprve kvantová fyzika: pro individuální děje je s to určit jen pravděpodobnost jejich průběhu — například jádro rádia se s pravděpodobností rovnou jedné polovině rozpadne během nejbližších 1 590 let, vzbuzený atom sodíku vyzáří foton žlutého světla se stejnou pravděpodobností během jedné nanosekundy.

Pravděpodobnostní popis dějů v mikrofyzikálních objektech byl z počátku pokládán za přechodný nedostatek teorie. Mnozí soudili, že kvantovou mechaniku bude možné nahradit dokonalejší teorií, která popíše i mikrofyzikální děje deterministicky. Dnes, po šedesáti letech od objevení vlnových vlastností částic a formulování kvantové mechaniky převládá názor, že nemožnost přesně předpovědět průběh dějů v mikrosvětě odpovídá objektivní vlastnosti přírody: nejen člověk není s to určit přesně vývoj soustavy, ale ani příroda sama „neví“, jak v ní bude vývoj v čase přesně probíhat.

Deterministické rovnice klasické fyziky platí nicméně s vysokou přesností v těch případech, kdy se ve fyzikální nebo jiné soustavě vystředují fluktuace, způsobené nejistotou průběhu jednotlivých mikroskopických dějů. Známým příkladem úspěšného použití deterministických rovnic klasické fyziky je popis pohybu nebeských těles.

Dalo by se tedy předpokládat, že pro soustavy, u kterých se fluktuace způsobené kvantovými jevy neprojevují a které jsou současně popsány jen malým počtem rovnic (tj. pro klasické soustavy s malým počtem stupňů volnosti), je vždy možné získat výpočtem spolehlivé předpovědi i pro vzdálenou budoucnost.

Ukázalo se však, že tento předpoklad není správný. V posledních dvaceti letech se totiž postupně nacházely velmi jednoduché soustavy popisované deterministickými rovnicemi, u kterých se nepřesnost určení počátečních podmínek i omezená přesnost výpočtu projevovaly tak silně, že na delší dobu dopředu ztrácelo řešení jakýkoli skutečný vztah k počátečnímu stavu [1].

Velmi zřetelný příklad takové jednoduché soustavy se složitou dynamikou uveřejnil v roce 1963 E. N. Lorenz [2], který ukázal, že soustava tří obyčejných nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu (nazývaná nyní Lorenzův systém)

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

může mít pro určité intervaly hodnot parametrů σ , r a b řešení, které není periodické, přičemž hodnoty proměnných x , y a z se v čase t mění a současně zůstávají uvnitř konečného intervalu.

Na rozdíl od oscilujících řešení periodických, dobře známých z teorie nelineárních oscilací [3, 4], u kterých asymptotické (tj. ustálené) chování nezáleží na stavu, ze kterého pohyb začal, neperiodická řešení Lorenzova systému byla k počátečním podmínkám velmi citlivá. Ustálený stav, který se po proběhnutí přechodového procesu (obdobného nabíhání na limitní cyklus u periodických oscilací) v Lorenzově soustavě ustaví, je charakterizován nepravidelnými (chaotickými) změnami hodnot proměnných x , y , a z , které lze stejně jako soubor veličin s náhodnými hodnotami popsat statistickými ukazateli, jako jsou průměrná amplituda, rozptyl, spojitě Fourierovo frekvenční spektrum, korelační funkce.

Sama Lorenzova soustava neobsahuje žádnou zdrojovou funkci s náhodnou proměnnou nebo fluktuující parametr. Jde tedy o deterministické rovnice.

Na rozdíl od soustav s velkým počtem stupňů volnosti byla u soustavy s tak malým počtem stupňů volnosti (1,5), jako má Lorenzův systém, existence chaotických trajektorií nečekaná. Zatímco podobné systémy rovnic s vloženou náhodně proměnnou zdrojovou funkcí představovaly dobře pochopitelné zesilovače šumu, v případě Lorenzova systému jde o oscilátor, který není zesilovačem, ale generátorem šumu.

Tato zjištění vyvolala velký zájem matematiků, teoretických fyziků i experimentátorů, a to i v oborech, jako je chemie [5, 6] a kvantitativní sociologie [7]. V teorii oscilací vedla k novému pojmu tzv. chaotického neboli podivného atraktoru [8]. Ten, na rozdíl od atraktoru odpovídajícího limitnímu cyklu nelineárního oscilátoru, je tvořen celou oblastí fázového prostoru, do které z určitého okolí vstupují všechny fázové trajektorie, avšak uvnitř této oblasti se od sebe rychle (exponenciálně) vzdalují, aniž ji ovšem opouštějí. Rozvinula se také teorie dynamických soustav s diskrétním časem, ve kterém byla dokázána existence neperiodických řešení.

Nalezení neperiodických řešení u jednoduchých dynamických soustav vedlo i k návrhům na novou interpretaci řady experimentálně zjištěných chaotických (šumových) průběhů různých měřených veličin. Například Y. Taur a P. L. Richards popisují [9] výsledky měření zesílení slabého signálu a velikosti šumu na Josephsonových kontaktech. Zjišťují mimo jiné, že velké rozdíly měřených hodnot zisku na kontaktech s podobnými voltampérovými charakteristikami jsou těžko pochopitelné. Uvádějí, že některé kontakty, které jsou „saturovány zesíleným vnitřním (nebo vnějším) šumem, zesilují slabý vnější signál málo nebo jej vůbec nezesilují a vykazují vysokou šumovou teplotu. Jiné se chovají jako téměř ideální parametrické zesilovače“.

B. A. Huberman et al. [10] vysvětlují naměřené závislosti jinak: soustavu považují za generátor šumu a šum interpretují jako neperiodické samobuzené oscilace patřící podivnému atraktoru. Své vysvětlení podporují rozborem vlastností matematického modelu Josephsonova zesilovače jako nelineárního buzeného oscilátoru.

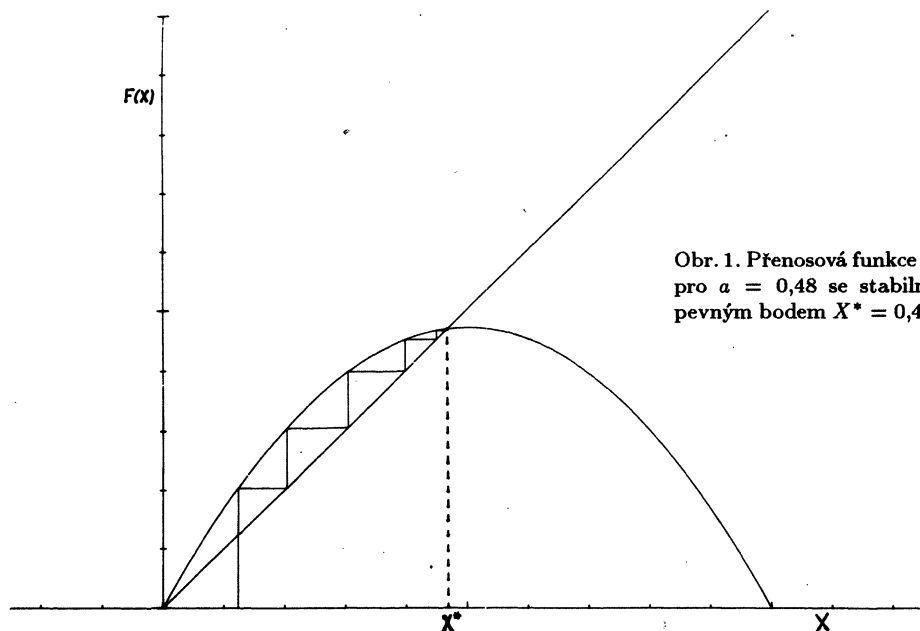
Příkladem chaosu z biologie je reprodukce populací s jednou generací ročně: nepravidelné střídání četnosti populace může nastat i při konstantních vnějších podmínkách, má-li populace určité vnitřní vlastnosti, které ovlivňují četnost další generace [11].

V tomto přehledu se zabýváme některými vlastnostmi deterministických soustav s chaosem. Půjde přitom o ustálené stavy, nikoli o přechodové jevy. Existence ustáleného stavu není samozřejmost. Ustálený stav nemusí v některých reálných dynamických soustavách nebo v jejich modelech vůbec existovat. Přechodový proces (vývoj) soustavy může přitom být velmi pomalý ve srovnání s jinými ději, které v ní probíhají, takže soustava může být omylem pokládána za soustavu ve stavu časově utáleném. Známým příkladem je námi pozorovaný vesmír. I Einstein se samozřejmostí předpokládal, že vesmír je v ustáleném stavu, a pokazil své původní rovnice přidáním zcela neodůvodněného zdrojového členu jen proto, aby měly ustálené řešení. Teprve později napadlo jiné fyziky, že vesmír je a zůstane ve stavu neustáleném, a že tedy nemožnost dostat z Einsteinových rovnic stacionární řešení je ve shodě se skutečností.

„Filozoficky“ vzato, nestacionárnost vesmíru ukazuje, že pro velmi dlouhé časové intervaly nelze žádnou reálnou soustavu pokládat za časově ustálenou. Pro prakticky používané modely je však ustálený stav dostatečně přesnou aproximací skutečnosti. Nejen pohybující se nepokoj klasického hodinového strojku nebo kmitající křemenný oscilátor pokládáme za časově ustálený systém, ale například i oscilace lidského srdce bereme jako časově ustálené přesto, že se z různých důvodů frekvence tepu mění, a někdy dokonce přejde do „ustáleného“ stavu nezdravých i smrtelných chaotických oscilací.

2. Dynamické soustavy s diskretním časem

Nejjednodušším modelem dynamické soustavy, který může vykazovat chaotická chování, je rovnice s diskretním časem s jedinou nezávisle proměnnou. Používá se například při kvantitativním vyjádření četnosti populace individuí určitého biologického druhu, který má právě jednu generaci v roce (viz např. [11]). Četnost populace X_{n+1}



Obr. 1. Přenosová funkce (3) pro $a = 0,48$ se stabilním pevným bodem $X^* = 0,479$.

v $(n + 1)$ -ním roce je vyjádřena četností X_n populace předešlé vztahem

$$(2) \quad X_{n+1} = F(X_n).$$

Funkce $F(X)$ se nazývá zpravidla přenosová funkce. Ve složitých ekologických situacích, kde na sebe vzájemně působí mnoho druhů a mění se vnější prostředí, není samozřejmě vztah $F(X)$ dobrým popisem skutečnosti. Lze jej však pokládat za přijatelný model situace, kdy reprodukce biologického druhu záleží v mnohem větší míře na jeho vnitřních vlastnostech — například na vlivu přemnožení — než na vnějších vlivech.

Omezíme-li se na přenosovou funkci $F(X)$ s jedním maximem, je výhodné vzít ji ve tvaru paraboly druhého stupně s jedním parametrem:

$$(3) \quad X_{n+1} = 4aX_n(1 - X_n).$$

Při $a < \frac{1}{4}$ nemá taková dynamická soustava jiný ustálený stav než $X = 0$. Tento stav je stabilní: populace vyhyne. Při $\frac{1}{4} < a < 1$ je ustálený stav $X = 0$ nestabilní.

Druhý ustálený stav $X^* = 1 - \frac{1}{4a}$ je dán průsečíkem bisektrisy, půlící úhel mezi kladnými osami, s křivkou $F(X)$. (X^* se nazývá pevný bod.) Je-li $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$, populace v počátečním stavu $0 < X < X^*$ se v dalších letech postupně přibližuje k pevnému bodu X^* . Postupné hodnoty X_n je možné s výhodou určit graficky s použitím tzv. Lamereyova schodiště, jehož konstrukce je patrná z obr. 1. Pevný bod X^* je v tomto případě atraktorem, ustálený stav populace je periodické opakování četnosti X^* v každém roce.

Při $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$ je maximum paraboly vlevo od pevného bodu X^* a derivace funkce $F(X)$ v bodě X^* je záporná, avšak větší než -1 . Bod X^* zůstává atraktorem, avšak populace se k němu blíží nikoli monotónně, ale střídavě z obou stran (Lamereyovo schodiště přejde v pravouhlý meandr kolem pevného bodu, obr. 2).

Při $a > \frac{3}{4}$ dochází ke kvalitativní změně: $\left(\frac{dF}{dX}\right) < -1$, pevný bod je nestabilní, změnil se z atraktoru (přitahovače) na repelor (odpuzovač). Populace s hodnotou blízkou X^* se od ustáleného stavu X^* vzdaluje (obr. 3). Podobně jako v předešlém případě populace střídá v postupných generacích hodnoty větší a menší, než je X^* . Je-li $\frac{3}{4} < a < 0,86$, populace se po dostatečně dlouhé době asymptoticky ustálí tak, že střídá hodnoty X_1^* a X_2^* , tj. opakuje se se dvěma různými četnostmi a má periodu 2 roky místo původní periody 1 rok.

Při dalším zvětšování parametru a ztrácí stabilitu i dvojice pevných bodů X_1^* a X_2^* a nahrazují ji nejdříve čtyři pevné body, pro větší a pak 8, 16, 32, obecně 2^n pevných bodů. Populace se tedy opakuje až po 4, 8, 16, ..., 2^n letech. Pro $a > 0,892$ se i tato 2^n -násobná periodicitu ztrácí: četnosti populací nabývají postupně různých hodnot, které se neopakují. Přitom tyto hodnoty při $t \rightarrow \infty$ vyplňují hustě část (části) intervalu $(0, 1)$.

Označíme-li a_n hodnoty parametru a , při nichž perioda 2^{n-1} ztrácí stabilitu a objevuje se stabilní perioda 2^n , má posloupnost a_1, a_2, \dots hromadný bod $a_\infty = 0,892 \dots$. Pro velká n je

$$a_n = a_\infty - \frac{A}{\delta^n},$$

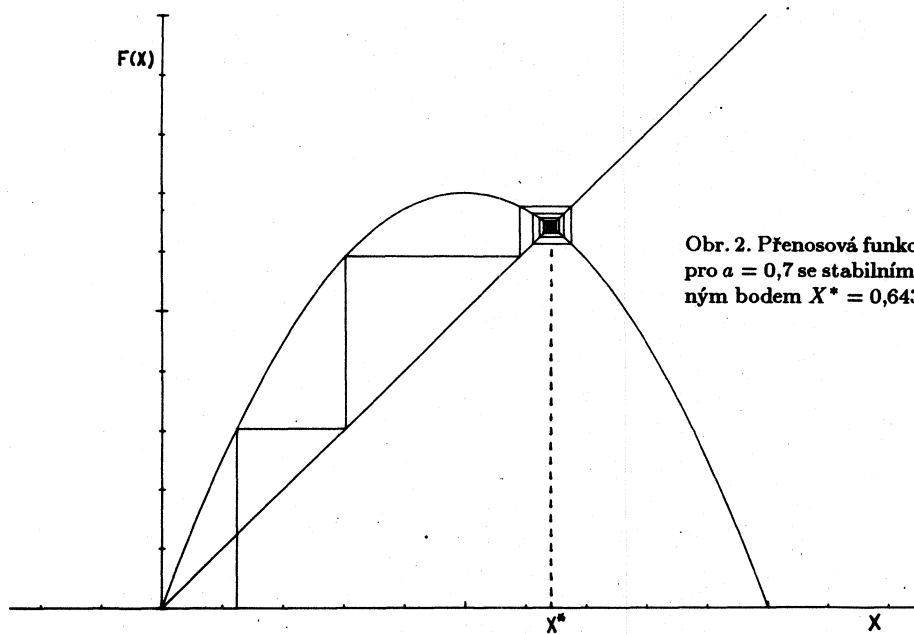
kde $\delta = 4,66920 \dots$ je univerzální konstanta nezávislá na konkrétním tvaru přenosové funkce (2), pokud v jejím Taylorově rozvoji kolem jediného maxima po absolutním členu následuje kvadratický a A značí konstantu specifickou pro danou přenosovou funkci; a je pak koeficient u tohoto kvadratického členu.

Je tedy

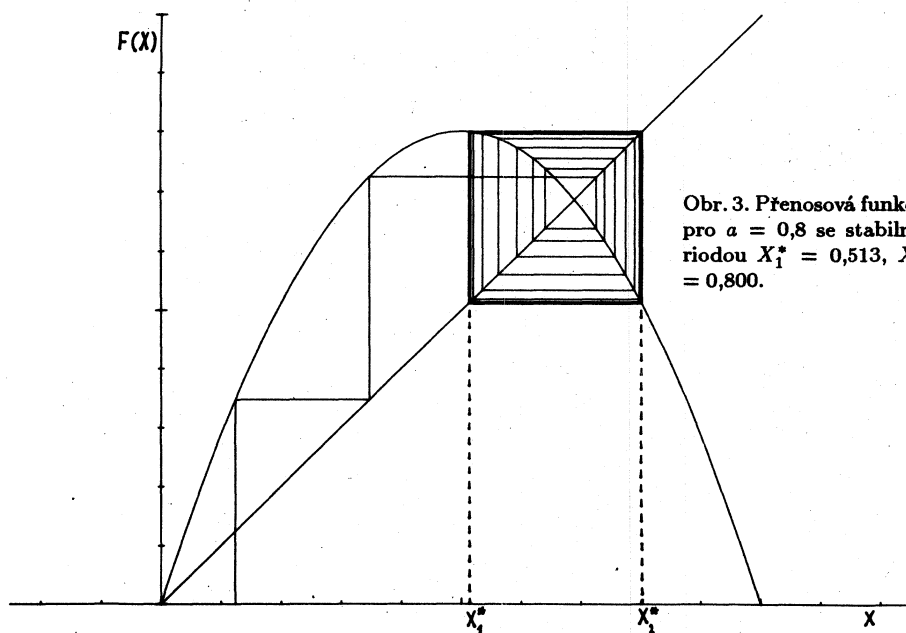
$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}.$$

Tuto konstantu objevil Feigenbaum [12].

Pro hodnotu $a = a_\infty$ je střídání populací neperiodické, blízké počáteční hodnoty zůstávají však blízkými po libovolném počtu kroků. Tomuto chování se říká ergodické. Chaos nastupuje pro hodnoty $a > a_\infty$. Na intervalu $(a_\infty, 1)$ však existuje nekonečně mnoho „periodických oken“ na pozadí aperiodického režimu. Při pozorném sledování rozdělení populací pro aperiodický režim zjistíme, že populace skáčou mezi 2^n podintervaly (ostrovy) intervalu $(0, 1)$. Přitom exponent n klesá od nekonečna k nule, když a roste od a_∞ k 1. Zmíněné podintervaly se při růstu parametru a zužují a při dosažení „periodického okna“ degenerují v periodu o velikosti 2^n . Při dalším růstu parametru a opuštění periodického okna vznikne opět chaos, přičemž populace skáčou mezi 2^{n-1} podintervaly.



Obr. 2. Přenosová funkce (3) pro $a = 0,7$ se stabilním pevným bodem $X^* = 0,643$.



Obr. 3. Přenosová funkce (3) pro $a = 0,8$ se stabilní periodou $X_1^* = 0,513$, $X_2^* = 0,800$.

Trajektorii dynamické soustavy s diskrétním časem je posloupnost hodnot $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$. Je možné ji charakterizovat Fourierovým spektrem, korelační funkcí, hustotou stavů, střední hodnotou stavů (viz například [13]).

Velmi bohaté, dobře přehledné a současně poučné vlastnosti mají trajektorie krajně jednoduché přenosové funkce tvaru střechy (obr. 4):

$$(4) \quad \begin{aligned} X_{n+1} &= 2aX_n \quad \text{pro } X_n < 0,5, \\ X_{n+1} &= 2a(1 - X_n) \quad \text{pro } X_n \geq 0,5. \end{aligned}$$

Je-li $a > \frac{1}{2}$, je jediný nenulový pevný bod této přenosové funkce $X^* = \frac{1}{1 + \frac{1}{2a}}$ nestabilní, a pro skoro všechna počáteční $X \in (0, 1)$ je trajektorie (tj. posloupnost hodnot X_n) neperiodická. To „skoro“ se týká periodických trajektorií, kterých je sice nekonečně mnoho, ale počáteční podmínky, které k nim vedou, mají Lebesgueovu míru nula, a jsou tedy fyzikálně nerealizovatelné.

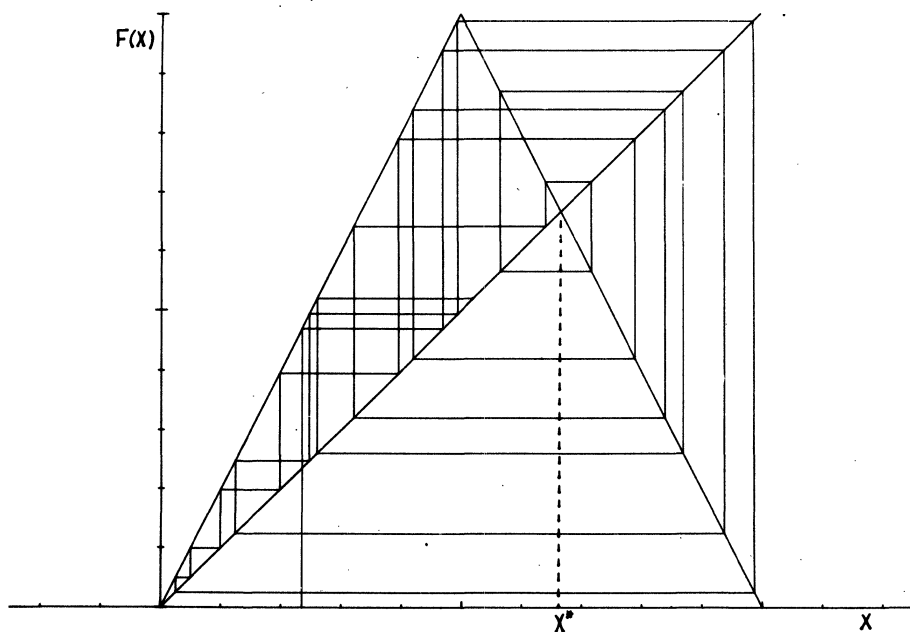
Nestabilitu (chaotičnost) charakterizuje skutečnost, že dvě trajektorie s velmi blízkou počáteční hodnotou se exponenciálně vzdalují: například pro $a = 1$ a počáteční hodnoty $X_0 = 0,234$ a $X'_0 = 0,238$, liší se o 2 %, je už po sedmi iteracích $X_7 = 0,048$ a $X'_7 = 0,464$. Dvě trajektorie, jejichž počáteční podmínky se liší na dvanáctém desetinném místě, se zcela rozejdou po méně než 50 iteracích.

Chování trajektorie přenosové funkce (4) s $a = 1$ je typické pro deterministický chaos: z počátečního stavu X_0 je dobře možné předpovědět hodnoty X_n pro malé n , avšak pro větší hodnoty n se nepřesnost zadání počátečního stavu, která je při popisu reality vždy nenulová, projevuje stále silněji (odchylka roste exponenciálně s n). Přitom se však chaos takové trajektorie liší od zcela náhodné posloupnosti hodnot X z intervalu $(0, 1)$ velmi výrazně: z hodnot zcela náhodné posloupnosti není možné sestrojít přenosovou funkci. Body se souřadnicemi X_k, X_{k+1} dvojic po sobě následujících hodnot vyplní u zcela náhodné posloupnosti v průměru stejně hustě celou plochu čtverce. Zatímco tedy statistické charakteristiky deterministické chaotické posloupnosti podle (4) s $a = 1$ se od náhodné posloupnosti neliší, existenci přenosové funkce lze pokládat za důkaz, že jde o deterministický chaos.

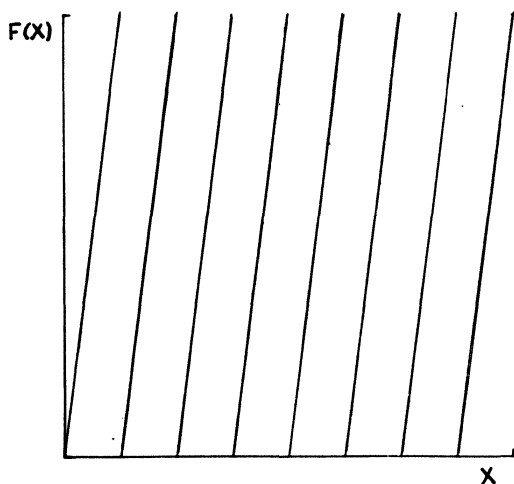
Avšak ani toto kritérium není tak jednoznačné, jak se na první pohled zdá. Je totiž možné představit si přenosovou funkci z intervalu $(0, 1)$, rychle oscilující v celém intervalu mezi hodnotami 0, 1 (obr. 5). Čím větší bude počet maxim m , tím více vyplní posloupnost $\{X_k\}$ určená z obecné počáteční podmínky X_0 (tj. pro skoro všechny počáteční podmínky) celou plochu čtverce, a tím hůře bude možné sestrojít z konečné posloupnosti přenosovou funkci a rozlišit takovou deterministickou posloupnost od náhodné.

Chaotičnost trajektorií deterministické dynamické soustavy s diskrétním časem, popsané například přenosovou funkcí (4), souvisí s touto vlastností zobrazení $F(X)$:

Označme symbolem L , je-li $X_k < 0,5$ a symbolem R , je-li $X_k > 0,5$. Zvolme dále libovolnou posloupnost S_n symbolů L, R — například tak, že líci nějaké mince přiřadíme symbol L a rubu R — a n -krát mincí hodíme. Podle strany, která padla, zaznamenáváme postupně R nebo L . Pak platí, že existuje takové X_0 , pro které má trajektorie (posloupnost hodnot $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$) vytvořená postupnými iteracemi z rovnice (4) tu vlastnost, že posloupnost symbolů L a R přiřazených podle uvedené úmluvy hodnotám X_k bude totožná s posloupností symbolů L a R získanou házením



Obr. 4. Přenosová funkce (4) pro $a = 1$ s nestabilním pevným bodem $x^* = \frac{2}{3}$.



Obr. 5. Přenosová funkce $F(X) = [mX]$, kde $m = 8$ ($[]$ značí celou část). Čím větší je m , tím obtížnější je danou posloupnost hodnot rozeznat od náhodné posloupnosti.

mincí. To znamená, že vždycky existuje trajektorie $\{X_k\}$, která střídá pravou a levou polovinu intervalu $(0,1)$ podle libovolného předem zvoleného pořadí.

Závažným problémem analýzy deterministických soustav s chaosem je omezená přesnost numerických výpočtů. Pro přenosové funkce s chaosem, například (3) nebo (4) při $a = 1$ jsou trajektorie $\{X_k\}$ soustavy neperiodické pro téměř všechny počáteční podmínky z oboru reálných (tj. obecně iracionálních) čísel. Jakékoli číslo uložené v pa-

měti počítače a každé další číslo, které počítač podle jakéhokoli algoritmu vypočte, je však racionální. Posloupnost hodnot X_k , které vypočte počítač, bude tedy vždy periodická, protože v konečném intervalu má počítač k dispozici jen konečný počet různých číselných hodnot. Tento fakt je dobře znám při generování pseudonáhodných čísel, která představují deterministickou periodickou posloupnost čísel získaných vhodným algoritmem, tj. přenosovou funkcí.

Tvrzení, že u soustav s deterministickým chaosem je možné předpovědět jen nejbližší stavy systému, je tedy relativní a souvisí s tím, že není možné jakýkoli reálný jev popsat v čase $t = 0$ zcela přesně, a to nejen pro nepřesnost měření: sdělit jakékoli soustavě zpracující informace (počítači) přesnou hodnotu obecného reálného, tj. iracionálního čísla, není v konečném čase možné.

Zdálo by se tedy, že nemá vůbec smysl zkoumat chaotickou trajektorii vypočítanou na počítači, neboť již po několika desítkách iterací se zcela rozejdou dvě trajektorie, jejichž počáteční podmínky byly bližší, než je přesnost počítače. Statistické parametry takto vypočtených trajektorií jsou však citlivostí k počáteční podmínce zpravidla ovlivněny málo. Výjimku tvoří případ, kdy počáteční hodnota je, byť i nechtěně, zvolena tak, že perioda vypočtené trajektorie je krátká. U přenosové funkce ve tvaru symetrické střechy se to stane snadno. Třeba při volbě $X_0 = 0,4$ je trajektorie periodická s periodou 2 a střídá hodnoty 0,4 a 0,8. Při volbě $X_0 = 0,256$ je periodičnost trajektorie méně nápadná ($X_{50} = X_0$), avšak prozradí ji statistika. Volba $X_0 = 0,123456789$ naproti tomu dává (prakticky) chaotickou trajektorii.

Dynamické soustavy s chaosem se začaly soustavně zkoumat až poté, co byly k dispozici počítače. Skutečnost, že na počítači lze zadat jen počáteční podmínky, mající v množině všech možných počátečních podmínek míru nulovou a vedoucí vždy k periodické trajektorii, ukazuje na nutnost současného analytického rozboru vlastností řešení, i když při zadání většiny racionálních čísel je perioda trajektorie chaotické soustavy velká a rozdíl proti skutečně neperiodické trajektorii se prakticky neprojeví.

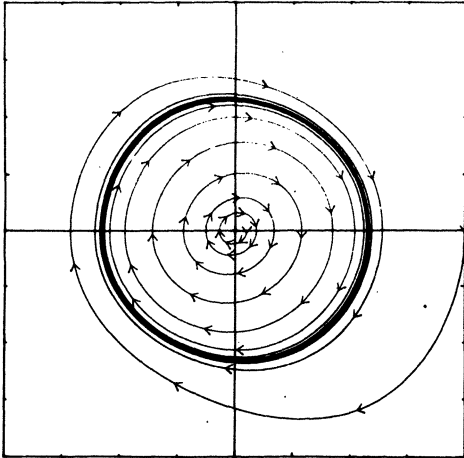
3. Dynamické soustavy s chaosem popsané obyčejnými diferenciálními rovnicemi.

Typickým představitelem nekonzervativní soustavy, která nemá chaotické trajektorie, je nelineární oscilátor s jedním stupněm volnosti (Rayleighův oscilátor):

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x + \epsilon(y - y^3). \end{aligned}$$

Řešení takové soustavy pro dané počáteční podmínky x_0, y_0 je výhodné vyjádřit jako trajektorii ve dvourozměrném fázovém prostoru se souřadnicemi $x(t), y(t)$, ve které explicitně nevystupuje čas. Na obr. 6 jsou dvě fázové trajektorie soustavy (5) pro hodnoty parametrů $\omega_0 = 1, \epsilon = 0,2$ s různými počátečními podmínkami. Obě se asymptoticky přibližují uzavřené křivce — limitnímu cyklu — zobrazujícímu trvalé periodické oscilace. Tento limitní cyklus je jediným atraktorem soustavy. K němu

směřují všechny trajektorie s libovolnými počátečními podmínkami, avšak s výjimkou počáteční podmínky $x = 0, y = 0$, pro kterou soustava zůstává v klidu. Tento bod odpovídá nestabilnímu ustálenému stavu, je repelorem: fázový bod v jeho blízkosti se s rostoucím časem vzdaluje od bodu $(0, 0)$.



Obr. 6. Dvě trajektorie bodů řídících se soustavou (5) pro $\omega_0 = 1, \epsilon = 0,2$, nabíhající zevnitř, resp. zvnějšku na limitní cyklus; šipky vyznačují stejné časové intervaly.

Skutečnost, že soustava (5) nemůže mít chaotické řešení, lze nejnázne ukázat takto: ve fázovém portréту (obr. 6) zvolíme čáru, začínající v bodě $(0, 0)$, která se nikde nedotýká žádné trajektorie, ale jinak je libovolná. Může to být například vodorovná kladná poloosa. Z průsečíků této čáry s trajektoriemi sestrojíme body přenosové funkce tak, že počínaje některým průsečíkem a_k odměříme délku čáry od tohoto bodu k počátku, a body a_l, a_{l+1} , kde $l = k, k + 1, k + 2, \dots$ vyneseme postupně do grafu s osami ξ_l, ξ_{l+1} . Totéž uděláme s body b_k, b_{k+1}, \dots trajektorie ležící vně cyklu. Protože se fázové trajektorie nikdy neprotínají, což vyplývá z jednoznačnosti řešení soustavy (5), musí být přenosová funkce sestrojena z bodů a_l, b_l monotónní. Výsledek konstrukce přenosové funkce je na obr. 7. Limitnímu cyklu fázového portrétu na obr. 6 odpovídá pevný bod ξ^* přenosové funkce. Na obr. 7 je tento pevný bod stabilní, neboť $\left| \frac{dF}{d\xi}(\xi^*) \right| < 1$, zatímco druhý pevný bod $\xi^* = 0$ je nestabilní.

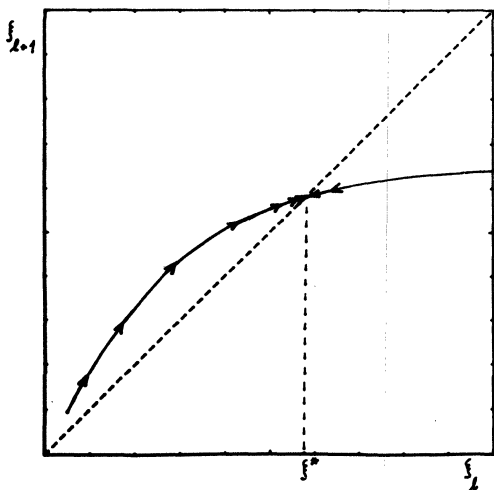
Monotónní průběh přenosové funkce pak vylučuje nejen chaotické trajektorie, ale i vznik oscilací s dvojnásobnou, případně s 2^n -násobnou periodou. Tento závěr platí pro libovolný systém s jedním stupněm volnosti.

Situace se kvalitativně změní, jestliže soustava má diferenciální rovnice tři. Fázový portrét je v tomto případě trojrozměrný. I když stále platí, že fázové trajektorie se nemohou protínat, průměty těchto trajektorií do roviny (například do roviny xy) se protínat mohou. Na obr. 8 je průmět do roviny xy fázových trajektorií soustavy tří

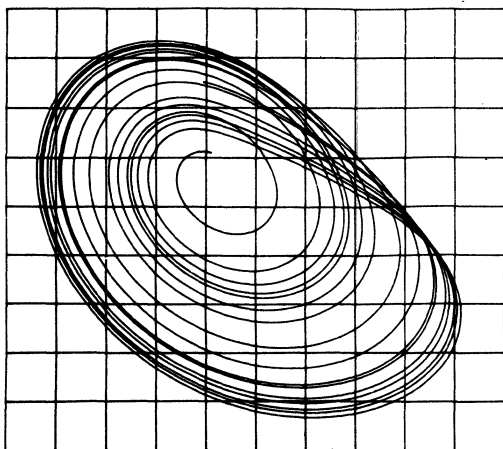
diferenciálních rovnic

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz - cz \end{aligned}$$

pro hodnoty parametrů $a = 0,375$, $b = 2$, $c = 4$.



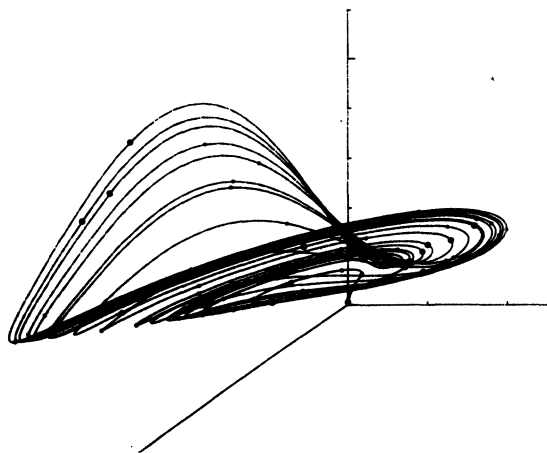
Obr. 7. Přenosová funkce pro průsečíky trajektorií soustavy (5) s kladnou vodorovnou poloosou. Přenosová funkce je monotónní, pevný bod ξ^* je stabilní.



Obr. 8. Průmět fázové trajektorie bodu podle soustavy (6) pro $a = 0,375$, $b = 2$, $c = 4$ do roviny xy .

Soustava (6) je patrně nejjednodušší soustavou diferenciálních rovnic s chaosem. Sestavil ji Rössler [14] postupným zjednodušováním složitější soustavy popisující oscilující chemické reakce.

První dvě rovnice soustavy (6) jsou lineární a při $z = 0$ popisují rostoucí sinusové oscilace. Třetí rovnice se uplatňuje jen po malou část periody při $z \rightarrow 0$ a např. při $a = 0,375$; $b = 2$; $c = 4$ způsobuje, že rovnice (6) mají podivný atraktor s chaotickými trajektoriemi.



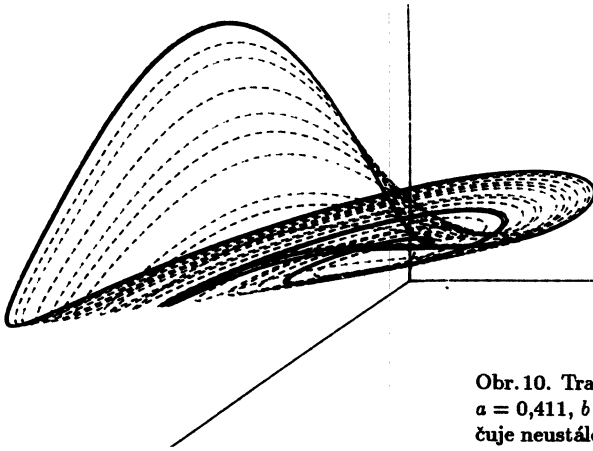
Obr. 9. Chaotická trajektorie bodu podle (6) pro $a = 0,375$, $b = 2$, $c = 4$. Značky označují stejné časové intervaly; každá pátá značka je větší.

Z průmětu fázového portréту (obr. 8) je zřejmé, že průměty trajektorií zůstávají v ohraničené oblasti roviny xy , aniž však nabíhají na uzavřenou (jedinou) křivku, jak tomu bylo u soustavy (5) s limitním cyklem. Trojrozměrnou trajektorii (chaotický atraktor) této soustavy představuje obr. 9. Je vidět, jak si atraktor „přitáhl“ systém z počátečního stavu blízkému počátku souřadné soustavy. Obr. 10 ukazuje trajektorii soustavy (6) pro hodnoty parametrů $a = 0,411$, $b = 3,43$, $c = 4$. V tomto případě nedochází k chaosu, atraktorem je limitní cyklus (uzavřená křivka), ustáleným stavem soustavy jsou periodické nelineární oscilace. Nabíhání na ustálený stav je však velmi pomalé (přerušovaná čára).

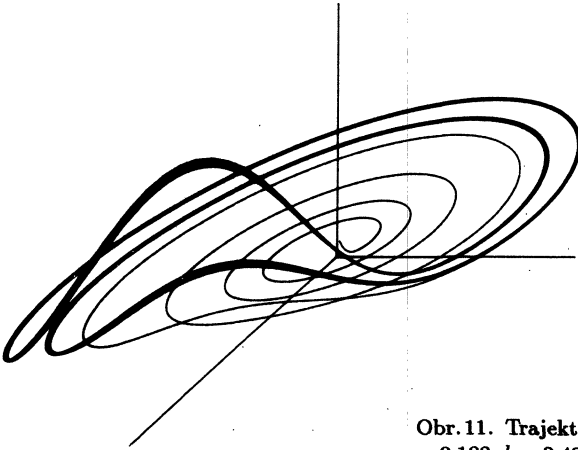
Naproti tomu pro soustavu s parametry $a = 0,182$, $b = 3,43$, $c = 9,75$ (obr. 11) se systém v krátkém čase octne prakticky na limitním cyklu (tučná čára).

Lorenzova soustava (1) je nejstarší a dnes patrně nejdůkladněji prozkoumanou soustavou diferenciálních rovnic s podivným atraktorem [2, 15]. Lorenz ji sestavil zjednodušením Navierových-Stokesových parciálních diferenciálních rovnic pro proudění viskózní tekutiny s teplotním gradientem, které aplikoval na popis vývoje počasí. Na původní poslání rovnic se už téměř zapomnělo, a na Lorenzův systém (1) se postupně podařilo převést i jiné dynamické soustavy, například laserový oscilátor [15, 16].

Typickou vlastností chaotického atraktoru je jeho tzv. fraktální struktura [18, 19]. Představme si obláček v třírozměrném prostoru, jehož jednotlivé body se pohybují například podle Lorenzových rovnic. Obláček svým pohybem vytváří tenkou vrstvu, která se neustále smršťuje. O tom se můžeme přesvědčit výpočtem divergence vektoru rychlosti. Pro Lorenzův systém je $\text{div } \mathbf{r} = -(\sigma + b + 1)$, což je pro kladné hodnoty



Obr.10. Trajektorie bodu podle soustavy (6) pro $a = 0,411$, $b = 3,43$, $c = 4$. Přerušovaná čára označuje neustálý stav.



Obr.11. Trajektorie bodu podle soustavy (6) pro $a = 0,182$, $b = 3,43$, $c = 9,75$.

parametrů σ , b záporná veličina. Z toho už vyplývá, že trojrozměrný objem atraktoru jakožto limitní množiny je nulový.

Při ztenčování vrstvy a současném exponenciálním vzdalování dvou zpočátku velmi blízkých bodů musí dojít k ohýbání a prolétání jednotlivých trajektorií. Dva velmi blízké body se tak po dostatečně dlouhém čase opět přiblíží na libovolně malou vzdálenost; z důvodu jednoznačnosti řešení však nikdy nesplynou. Zároveň se musí ohýbat celá vrstva (svazek trajektorií), protože celý pohyb se děje v omezené oblasti. Po konečné době se tak vrstva musí dostat libovolně blízko své původní poloze, nemůže se však do své původní polohy ponořit, a to opět z důvodu jednoznačnosti řešení. Vzniknou tak dvě vrstvy těsně nad sebou, oddělené prostorovou mezerou konečné velikosti. Nicméně uvažujeme-li nyní tuto dvojvrstvu jako celek, stejnou úvahou dojdeme k závěru, že v průběhu dalšího vývoje vznikne další dvojvrstva téměř splý-

vající s touto původní, avšak oddělená konečnou prostorovou mezerou. Tuto úvahu můžeme opakovat neomezeně. Dojdeme tak k závěru o struktuře limitního atraktoru. Skládá se z nekonečného množství vrstev, oddělených vždy konečnou mezerou. Každá jednotlivá vrstva se sama skládá z nekonečného množství „podvrstev“.

Tuto fraktální strukturu má díky proplétání jednotlivých trajektorií i libovolný dvourozměrný řez atraktorem, který není tečný k žádné trajektorii (Poincaréova mapa podivného atraktoru). Stejnou strukturu vykazují i chaotické atraktory dvourozměrných diskretních systémů [20, 21].

Jednorozměrný řez Poincarého mapou má strukturu kvalitativně totožnou se strukturou tzv. Cantorova diskontinua (viz. např. [22]). Je to uzavřená, hustě rozložená množina, má mohutnost kontinua, přitom však má nulovou délku. Cantorovo diskontinuum je tedy typickým příkladem množiny s fraktální strukturou. S touto strukturou souvisí také další zajímavá vlastnost, a to velmi dobře definovaná dimenze, která nenabývá celé hodnoty.

Tuto zobecněnou dimenzi zavedl Hausdorff v roce 1919 [23]. Dá se vysvětlit velmi jednoduše. Vezmeme obyčejný, „regulární“ geometrický objekt, například krychli, a zdvojnásobme všechny její lineární rozměry. Dostaneme novou krychli, jejíž objem se zvětší vzhledem k původnímu objemu 8krát, neboť $2^3 = 8$. Obecně, vezmeme-li útvar v D -rozměrném prostoru a zvětšíme jeho rozměry v každém směru l -krát, jeho míra se zvětší v poměru $k = l^D$. Odtud dostaneme

$$D = \frac{\ln k}{\ln l}.$$

Vezmeme-li nyní část Cantorova diskontinua „na pozadí“ intervalu $(0, \frac{1}{3})$ a zvětšíme-li lineární rozměr třikrát, dostaneme celé Cantorovo diskontinuum „na pozadí“ intervalu $(0, 1)$. Je to však totéž, jako kdybychom k původní množině přidali totožnou kopii „na pozadí“ intervalu $(\frac{2}{3}, 1)$. Míra množiny jako D -rozměrného útvaru se tedy zvětšila dvakrát. Je tedy

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309 \dots$$

Analogicky má chaotický atraktor v Poincarého řezu dimenzi D , pro kterou platí $1 < D < 2$, a chaotický atraktor v třírozměrném prostoru má dimenzi $D \in (2, 3)$.

4. Závěr

Pro tento přehled jsme vybrali jen některé z nejjednodušších známých a důkladně prozkoumaných soustav s deterministickým chaosem. Je známo mnoho složitějších systémů, které vykazují deterministický chaos. Jsou to například soustavy popisované diferenciálními rovnicemi, které obsahují člen s konečným časovým zpožděním. Vyskytují se zvláště často v biologii a ekologii — např. při popisu vývoje populace velryb nebo při popisu dynamiky tvorby krve [24].

Také nerovnovážné fyzikální soustavy s nekonečně mnoha stupni volnosti popisované diferenciálními rovnicemi s parciálními derivacemi jsou ke vzniku chaotického pohybu velmi náchylné. Příkladem je přechod laminárního proudění kapaliny k proudění turbulentnímu. I pro tento případ vedly jednoduché modely vzniku deterministického chaosu, které jsme popsali, k novému přístupu: dlouho uznávaná Landauova představa [25], že turbulence proudící kapaliny vzniká v důsledku vzájemného působení vírů s nesouměřitelnými vlnovými délkami, se nyní opouští a nahrazuje se představou o vývoji turbulentního pohybu v důsledku nelineárních bifurkací téhož typu, jaký je znám u vývoje populací [26]. U vlnové turbulence se spojitým Fourierovým spektrem bylo možné postupný vznik subharmonických frekvencí, typický pro vývoj chaosu ilustrovaného „scénářem“ opakujících se bifurkací, sledovat experimentálně. Objevuje se jako předstupeň úplného rozbití původně periodické nelineární ionizační vlny na chaotický vlnový pohyb [27].

Také u mnoha jiných složitějších soustav s chaotickými trajektoriemi se podstata vzniku chaosu ukázala být stejná jako u nejjednodušších modelů uvedených v tomto článku. Analýza, kterou jsme popsali u oscilátorů typu (5), je použitelná i na velmi složité soustavy, počítaje v to soustavy s velkým počtem obyčejných nelineárních diferenciálních rovnic, diferenciální rovnice s konečnými diferencemi a soustavy parciálních diferenciálních rovnic.

Základem analýzy takových složitých systémů je sestrojení přenosové funkce, tj. nalezení posloupnosti bodů, které charakterizují posloupnost jednotlivých orbitů jedné nebo několika trajektorií.

U soustav obyčejných diferenciálních rovnic se body pro sestrojení přenosové funkce získávají jako průsečíky trajektorie (znázorňující pohyb fázového bodu v n -rozměrném prostoru) s $(n - 1)$ -rozměrnou nadplochou, která musí být vybrána tak, aby se trajektorie nikde nedotýkala. U složitějších soustav je pro konstrukci přenosové funkce zpravidla nutné vytvořit nejdříve zjednodušený model, a to podobně jako to udělal Lorenz při studiu nestability proudění tekutiny s teplotním gradientem. Na přenosové funkci se pak určí pevné body a vyšetří se, zda jsou stabilní či nestabilní. Stanovení typu nestability pevného bodu (nebo více pevných bodů) zpravidla postačí k určení typu řešení a k rozhodnutí, zda i trajektorie původní soustavy jsou chaotické, tj. zda soustava má podivný atraktor s fraktální strukturou. Popsaná analýza pomocí přenosové funkce je tedy poměrně univerzální.

Teorie deterministického chaosu je mladá disciplína, která se rozvinula až poté, co počítače umožnily rychle získávat velký počet numerických řešení nelineárních diferenciálních rovnic. Mnohé jevy, v jejichž podstatě je právě deterministický chaos, však byly známy dávno nebo byly známy jejich (zpravidla nepříjemné) projevy. Jeden z nich — neúspěšnost dlouhodobých předpovědí počasí — povzbudil E. N. Lorenze k vypracování matematické teorie, kterou dokázal, že neúspěchy nejsou způsobeny neschopností prognostického týmu, jehož byl členem, ale neodstranitelnou vlastností některých přírodních procesů. Založil tím novou oblast matematiky a fyziky, která zasáhla i do filozofických úvah o tom, je-li naše budoucnost předem určena a můžeme-li ji přesně předpovídat.

L i t e r a t u r a

- [1] *Order in chaos*. Physica D, Nonlinear Phenomena, Vol. 7D (1983), No 1-3.
- [2] LORENZ E. N.: *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmos. Sci. 20 (1963) 130.
- [3] ANDRONOV A. A., VITT A. A., CHAJKIN S. E.: *Teorija kolebanij*. Moskva, Nauka 1981.
- [4] NAYFEH A. H., MOOK D. T.: *Nonlinear oscillations*. New York-Chichester-Brisbane-Toronto, John Wiley & Sons 1979.
- [5] SWINEY H. L.: *Observations of order and chaos in nonlinear systems*. Physica 7D (1983), 3.
- [6] SWINEY H. L., SIMONYI R. H., ROUX J. C.: *Instabilities and chaos in a chemical reaction*. In: *Chaos and statistical methods*. Editor: I. KURAMOTO. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer Verlag 1984.
- [7] SCHUSTER P. (ed): *Stochastic phenomena and chaotic behaviour in complex systems*. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer Verlag 1984.
- [8] GARRIDO I., SIMO C.: *Some ideas about strange attractors*. Lecture Notes in Physics 179 ed. L. GARRIDO, str 1-18.
- [9] TAUR Y., RICHARDS P. L.: *Parametric amplification and oscillation at 36 GHz using a point-contact Josephson junction*. J. of Appl. Phys. 48, No. 3 (1977).
- [10] HUBERMAN B. A., CRUTCHFIELD J. P., PACKARD N. H.: *Noise phenomena in Josephson junctions*. Appl. Phys. Lett., 37 (1980), str. 750-772.
- [11] MAY R. M.: *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, London, 261 (1967), 459-67.
- [12] FEIGENBAUM M. J.: *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*. J. Stat. Phys. 19 (1978), 25.
- [13] GROSSMANN S.: *Diversity and univesality. Spectral structure of discrete time evolution*. In *Evolution of order and chaos in physics, chemistry, and biology*. Editor: H. HAKEN, Berlin-Heidelberg-New York, Spring Verlag 1984, pp.164-173.
- [14] RÖSSLER O.E.: *An equation for continous chaos*. Phys. Lett. 57A (1976), 397.
- [15] SPARROW C.: *The Lorenz equations*. In: *Chaos*. Editor: A. V. HOLDEN, Manchester University Press 1986, str. 111-134.
- [16] GRAHAM R. (ed): *Lasers and synergetics*. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, Springer Verlag, 1987.
- [17] WEISS C. O., KLICHE W.: *On observability of Lorenz instabilities in lasers*. Opt. Commun. 51 (1984), 47-8.
- [18] THOMPSON J. M. T., STEWART H. B.: *Nonlinear dynamics and chaos*. Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore; John Wiley & Sons 1986.
- [19] LEVEN R. W., KOCH B.-P., POMPE B.: *Chaos in dissipativen Systemen*. Berlin: Akademie-Verlag 1989.
- [20] HÉNON M.: *A two-dimensional mapping with a strange attractor*. Comm. Math. Phys. 50 (1976), 69.
- [21] MANDELBROT B.: *The fractal geometry of nature*. San Francisco, W. H. Freeman & Co. 1983.
- [22] JARNÍK V.: *Diferenciální počet II*. Praha, Academia 1976.
- [23] HAUSDORFF F.: *Dimension und äusseres Mass*. Matg. Ann. 79 (1919) 157.
- [24] SIMO C.: *Strange attractors for differential delay equations*. Lecture Notes in Phys. 179 (1983), str. 188.
- [25] LANDAU L. D.: *Doklady AN SSSR*, 44 (1944), 339.
- [26] RUELLE D., TAKENS F.: *On the nature of turbulence*. Comm. Math. Phys. 20 (1971), 167-92.
- [27] KRÁSA J., PERKIN R. M., PEKÁREK L.: *J. Phys. D.: Appl. Phys.* 7 (1974), 2541.