Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Šmelhaus

Teorie eliptických funkcí u Weierstrasse

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 12 (1967), No. 5, 300--312

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138934

ZPRÁVY, JUBILEA, HISTORIE

TEORIE ELIPTICKÝCH FUNKCÍ U WEIERSTRASSE

JIŘÍ ŠMELHAUS, Praha

TEORIE ELIPTICKÝCH FUNKCÍ PŘED WEIERSTRASSEM

Pozornost matematiků v 18. stol. se soustředila na infinitezimální počet a jeho aplikace v mechanice. Mnoho úloh z infinitezimálního počtu motivovala však také geometrie. Je to zejména řešení rektifikace a kvadratury v rovině, respektive komplanace a kubatury v prostoru.

Mezi prvními rektifikačními úlohami bylo stanovení délky oblouku elipsy. Tato úloha se dá snadno převést na integraci $\int \sqrt{[1 + f'^2(x)]}\, dx$, kde $f(x) = b/a \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (z rovnice elipsy). Takto získaný integrál

$$\frac{1}{a} \int \sqrt{\left[\frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{a^2 - x^2}\right]}\, dx$$

lze substitucí $x/a = z$ převést na tvar

$$a \int \frac{1 - kz^2}{\sqrt{[(1 - z^2)(1 - kz^2)]}}\, dz\,,$$

kde

$$k = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,.$$

Integrujeme-li dále po členech a provedeme-li v druhém integrálu substituci $z^2 = t$, dostaneme

$$a \int \frac{dz}{\sqrt{[(1 - z^2)(1 - kz^2)]}} - \frac{ak}{2} \int \frac{t\, dt}{\sqrt{[t(1 - t)(1 - kt)]}}\,.$$

Tyto integrály byly nazvány vzhledem k povaze úlohy eliptickými integrály po řadě prvního a druhého druhu.

Z hlediska integrálního počtu dostala úloha brzy obecnější formulaci, totiž řešit integrál (zde a všude v dalším se míní ovšem neurčitý) typu

$$\int P(x; \sqrt{[R(x)]})\, dx\,,$$

kde $P(x; y)$ je racionální funkce proměnných x a y a $R(x)$ polynom třetího nebo čtvrtého stupně (mezi oběma případy není totiž podstatného rozdílu, neboť lze jednoduchou substitucí převádět jeden v druhý). Brzy se však ukázalo, že tento integrál na rozdíl od případu, kdy $R(x)$ je prvního nebo druhého stupně, nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Tyto integrály na sebe soustředily pozornost matematiků a brzy se dostavily první výsledky. Bylo např. zjištěno, že každý integrál tohoto typu lze vyjádřit jako lineární kombinaci následujících tří integrálů

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(R(x))}}\,; \quad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(R(x))}}\,; \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)\sqrt{(R(x))}}\,,$$

které byly nazvány eliptické integrály postupně prvního, druhého a třetího druhu. (Srov. úlohu o rektifikaci elipsy!)

Ve dvacátých letech 19. stol. se stávají předmětem širokého zájmu funkce inverzní k eliptickým integrálům, tzv. eliptické funkce. Motivem zmíněné inverze byl integrál $\int \mathrm{d}x/\sqrt{(R(x))}$, kde $R(x)$ je polynom druhého stupně, speciálně $R(x) = 1 - x^2$. Inverzí tohoto integrálu obdržíme funkci $\sin x$ a vzniká tedy přirozená otázka, zda nebudou eliptické funkce analogem funkcí goniometrických na „vyšší úrovni", jako je tomu se stupněm $R(x)$ v eliptickém integrálu $\int \mathrm{d}x/\sqrt{(R(x))}$ v porovnání se stupněm $1 - x^2$ v integrálu $\int \mathrm{d}x/\sqrt{(1 - x^2)}$. Níže v textu uvidíme, že další vývoj přesně vymezil význam slov v uvozovkách a otázku zodpověděl kladně.

Jestliže jsme však již překročili hraniční čáru obou století, nelze nevěnovat zmínku jednomu z největších matematiků všech dob Gausse (1777–1855), jehož geniální objevy, spadající právě do přelomu 18. a 19. st., je možno považovat za jistou chronologickou anomálii. Dá se totiž říci, že koncem 18. stol. a na začátku 19. stol. rozřešil principiálně velkou část problémů charakteristických pro vývoj matematiky zhruba v první polovině 19. stol., kdy se jimi jeho následovníci znovu zabývali a znovu vyřešené rozpracovávali do ucelených teorií.

Po této poznámce se opět můžeme vrátit tam, kde jsme naše sledování vývoje eliptických funkcí opustili, tj. do dvacátých let 19. stol., která jsou nerozlučně spjata se jmény Abel (1802–1829) a Jacobi (1804–1851). Oba slavní matematikové zaujímají v té době dominující postavení v rozvoji eliptických funkcí.

Kolem r. 1825 jsou sice publikovány ještě stěžejní práce zabývající se problémy eliptických integrálů – Cauchy přichází dokonce s objevnou myšlenkou zobecnit obor integračních mezí na komplexní čísla, o což se nakonec pokouší i u integrační proměnné Abel i Jacobi – nicméně i do této oblasti proráží, zejména v osobě Jacobiho, idea funkčního pojetí analýzy. Zavedení eliptických funkcí a položení solidních základů jejich teorii je právě Jacobiho dílem (od něho pochází i terminologie).

V tomto stadiu se rozchází přístup obou velikánů, Abela a Jacobiho, k danému problému. I když Abel zvládl funkční pojetí v celém rozsahu a jeho práce znamenají v tomto směru zásadní přínos, jeho zájem zůstal přesto upoután i nadále především integrální problematikou, zatímco Jacobi se plně specializuje na eliptické funkce a objevuje jejich speciální typy slavné theta-funkce. V r. 1828 dochází k vyvrcholení objevitelské soutěže mezi Abelem a Jacobim a pro rozvoj poznatků o eliptických funkcích znamená tento rok také největší přínos. Následující rok 1829 je rok důležitých zvratů (Abelova smrt, publikace Fundament – vrcholného díla Jacobiho) a znamená zřejmě dočasný konec prudkého rozvoje eliptických funkcí a integrálů. V letech třicátých nastává odmlčení. Až v r. 1839 jsou vydána v Christiánii Abelova Oeuvres a teprve v letech čtyřicátých nastupuje nová garda se jmény Richelot, Riemann a Weierstrass v čele.

V r. 1846 se setkáváme opět s imaginárními mezemi u eliptických integrálů, tentokrát už na solidním základě Cauchyho teorie funkcí komplexní proměnné. Výstavbu základů této teorie dovršuje RIEMANN o pět let později, tj. r. 1851. K eliptickým integrálům se roku 1859 vracejí i RICHELOT a HERMITE.

OSOBNOST WEIERSTRASSOVA A JEHO DÍLO

V polovině 19. stol. se již setkáváme s dalším zvučným jménem – Karl WEIERSTRASS –, které v sobě skrývá celou další samostatnou epochu vývoje eliptických funkcí. Rád bych při této příležitosti připomenul, že v roce 1965 uplynulo půldruhé století od Weierstrassova narození.

Odbočme nejprve k několika biografickým poznámkám, neboť u Weierstrasse, jehož publikační činnost byla tak mimořádně skoupá, bývají právě životopisná data často jediným indikátorem při zjišťování, kdy a k jakým výsledkům dospěl.

Na rozdíl od převážné většiny německých matematiků protestantských pochází Weierstrass z kruhů katolických. Narodil se 31. října 1815 v Ostenfelde, v rodině úředníka a katolické prostředí mělo velký vliv i na celý jeho další vývoj. Ve čtrnácti letech začíná navštěvovat gymnasium v Paderbornu (1829–1834). Tam se do jeho rukou dostává Crelleův žurnál, práce Steinerovy a konečně hlavně právě vyšlá Fundamenta. Již tehdy ho matematika tak zaujala, že si s neuvěřitelnou námahou doplňoval nutné předběžné znalosti. Pak následují jeho studentská léta (1834–1838) v Bonnu, kde studuje práva. Je aktivním členem Corps Saxonia a vypráví se o něm, že každý večer patřil v hospodách k nejveselejším a nikdy nechyběl na šermířském kolbišti. Zcela jiným stylem tráví léta 1839–1840. Studuje na akademii v Münsteru u Gudermanna, kde zároveň skládá r. 1841 učitelské zkoušky a sám si volí téma učitelské práce: „Über die Entwicklung der Modularfunktionen". Tato práce je otištěna v 1. díle jeho sebraných spisů. V některých věcech navazuje na Abela a obsahuje zárodky mnohých pozdějších Weierstrassových prací. Přítomnost Kryštofa GUDERMANNA způsobila změnu v další Weierstrassově kariéře. Gudermann Weierstrasse nadchl a plně získal pro matematiku. Jemu vděčí Weierstrass i za inspiraci v mnohých nápadech, neboť již Gudermann si např. uvědomil, že teorii eliptických funkcí lze zavést mnoha rozličnými způsoby a chtěl položit za základ analýzy rozvoj funkcí v mocninné řady. V té době se Weierstrass seznámil do hloubky též s dílem Abelovým, o kterém sám říkal, že ho provází všude. I později jako pedagog dával jako první a poslední radu svým studentům: „Čtěte Abela!“ V letech 1842 až 1848 působí jako gymnasiální učitel v „Deutsch Crone“ v západním Prusku. Pak přechází na rovnocenné místo v Collegiu Hoseanu v Braunsbergu ve východním Prusku. Tam setrvává do r. 1855. Z tohoto období, kdy působil jako učitel v zapadlém městečku, pochází řada tvůrčích myšlenek. Poněvadž si ve značné finanční tísni nemohl opatřit novou literaturu, jeho originalita se vyvíjela, aniž byla ovlivněna současnými módními myšlenkami. Nezávislost názorů takto získaných charakterizuje i jeho pozdější práce. Ve svých přednáškách rozvíjel výsledky ze svého vlastního fondu a neodvolával se skoro nikdy na práce ostatních.

Rok 1854 znamená obrat ve Weierstrassově životě. V tomto roce publikoval v Crelleově žurnálu své dosavadní výsledky, které vzbudily v Berlíně senzaci. Bylo to veledílo, jehož autorem byl neznámý venkovský učitel. Richelot, který byl v Kralovci pokračovatelem Jacobiho, přesvědčil svou universitu, aby udělila Weierstrassovi titul doctor honoris causa. Vlivem a přičiněním německých matematiků obdržel Weierstrass od r. 1856 místo matematika na Polytechnické škole v Berlíně. Na podzim téhož roku byl jmenován mimořádným profesorem berlínské university a zvolen členem Berlínské akademie. Jeho přednášky na universitě byly ještě značně neurovnané a zmatené, třebaže obsahovaly geniální myšlenky. Musil brát často celé hodinové pasáže zpět a přednášet je znovu, jinak. Později měl při psaní na tabuli i návaly závratí, a tak od roku 1861 pověřoval psaním na tabuli vždy někoho z posluchačů. Již celý rok se u něho projevovaly stopy přepracování, které v r. 1861 vyústily v úplné nervové zhroucení, takže přednáškové činnosti přechodně zanechal. V zimním semestru 1862/63 byli posluchači překvapeni, když v přednáškovém cyklu o eliptických funkcích byly na místě Jacobiho funkcí uvedeny poprvé výhradně vlastní funkce Weierstrassovy. Rok 1864 přinesl Weierstrassovi jmenování řádným profesorem na berlínské universitě. Ještě čtvrt století neustále rostl počet posluchačů na Weierstrassových přednáškách, které byly vzhledem ke své pedagogické kvalitě a odborné hodnotě neustále středem pozornosti a uznání. V zimě 1889/90 uskutečnil Weierstrass poslední přednášku, a to z variačního počtu. V posledních letech byl stále více sužován bolestivou nemocí, které 17. února 1897 v 82. roce života podlehl.

Z Weierstrassovy korespondence se nezachovalo téměř nic. Své ještě nepublikované spisy půjčoval kde komu, aniž by si o tom činil poznámky. Mnozí žáci mu vypůjčené věci nevrátili a někteří si dokonce bezostyšně přivlastnili myšlenky svého učitele a publikovali je přepracované jako vlastní výsledky.

Weierstrassovy písemnosti utrpěly ještě jednu velkou ztrátu. Při svých častých cestách vozil s sebou velkou krabici, do které skládal všechny poznámky a různé verze zápisků, neboť každou teorii přepracovával několikrát, až našel nejvhodnější způsob objasnění. Říká se, že většina jeho nápadů byla svěřena tajemné krabici. A r. 1880, když byl Weierstrass na prázdninové cestě, byla právě tato krabice založena někde mezi zavazadla a více o ní nikdo neslyšel.

Dosah této ztráty pro poznání Weierstrassova díla pochopíme nejlépe, když si uvědomíme, na jaké potíže narážíme vzhledem ke skoupé publikační činnosti Weierstrassově. S výjimkou několika počátečních publikací neformuloval své práce pro tisk sám. Pověřoval vždy některého ze svých nejlepších posluchačů, aby zpracovali příslušný cyklus jeho přednášek pro tisk. Vzhledem ke stavu Weierstrassových písemností, jak byla zmínka výše, byli tito vydavatelé odkázáni často na staré zápisy přednášek od posluchačů, eventuálně jejich opisy z několikáté ruky. Teprve r. 1861 byly prvně Weierstrassovy přednášky, přepracované a opravené s jeho vědomím, zveřejněny.

Weierstrass skutečně náleží k autorům, u nichž lze jen s největším úsilím, a často též bez výsledku určit, kdy, v které souvislosti a jak příslušný objev formuloval. S odpovídajícími potížemi docházelo postupně počínaje rokem 1894 k vydání jeho sebraných spisů, z nichž pouze prvé dva díly ze sedmi vyšly za jeho života, poslední pak r. 1927.

ELIPTICKÉ FUNKCE U WEIERSTRASSE

Podívejme se nyní podrobněji na Weierstrassův přínos teorii eliptických funkcí. Souhrnně bychom ho snad mohli hodnotit slovy: Nesmrtelnou zásluhou Weierstrassovou zůstane vybudování ucelené teorie z izolovaných výsledků a její přesné zdůvodnění na základě teorie funkcí komplexní proměnné, zejména teorie analytických funkcí v dnešním slova smyslu.

Weierstrass publikoval své přednášky o eliptických funkcích na základě klasického pojetí Jacobiho, tj. použitím inverze integrálu

$$u = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(R(x))}}, \tag{1}$$

kde $R(x)$ je polynom 3. nebo 4. stupně bez kvadratických dělitelů, jako výchozího bodu. Na rozdíl od svých předchůdců přichází s úplně novým normovaným tvarem integrandu:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(4s^3 - g_2 s - g_3)}},$$

o jehož souvislosti s obecným tvarem (1) formuluje následující tvrzení:

Nechť $R(x)$ je libovolný polynom ve smyslu (1).
Nechť $\sqrt{(R(x))}$ je kterákoliv z obou hodnot, kterých může odmocnina nabýt.
Nechť

$$s = \frac{\sqrt{(R(x_0))}\sqrt{(R(x))} + R(x_0) + \frac{1}{2}R'(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)^2} + \frac{1}{24} R''(x_0) \tag{2}$$

$$\sqrt{S} = \left(\frac{R(x)}{(x - x_0)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x)}{(x - x_0)^2}\right)\sqrt{(R(x_0))} - \left(\frac{R(x_0)}{(x_0 - x)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_0)}{(x_0 - x)^2}\right)\sqrt{(R(x))}$$

(*x_0 je libovolná konstanta*).

Potom

$$\text{(2')} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(R(x))}} = -\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(S)}},$$

kde $S = 4s^3 - g_2 s - g_3$ a g_2; g_3 *jsou na* x_0 *nezávislé.*

Důkaz tohoto tvrzení staví Weierstrass důsledně na základ algebraický, zatímco celý další postup přednášky nese charakter čistě weierstrassovský, tj. nového přístupu pomocí rozvoje analytických funkcí v mocninné řady $P(z - a)$, resp. $P(1/z)$, a analytického pokračování analytické funkce. Celá jeho metoda záleží v příslovečné weierstrassovské přesnosti, zejména ve velmi opatrném zacházení s nekonečnými řadami, kde pojem stejnoměrné konvergence u něho vystupuje do popředí a později se stává důležitým důkazovým prostředkem.

Pomocí (2′) převeďme integraci v (1) na diferenciální rovnici

$$\text{(3)} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

a její speciální řešení označme $s = \wp u$, platí-li $\lim_{u \to 0} \wp u = \infty$. Tuto speciální funkci bere Weierstrass za základní kámen celé své teorie. Konstruuje její rozvoj v okolí bodu 0:

$$\text{(3')} \qquad \wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots,$$

kde všechny koeficienty při mocninách u jsou celé funkce g_2 a g_3. Pro odvození additivního teorému používá Weierstrass vztahů (2) při speciální volbě $R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$. Podle definice $\wp$ můžeme psát $x = \wp z$. Zaveďme novou proměnnou $z = u + v$ a dostáváme $x = \wp(u + v)$; $s = \wp u$. Podle definice $\wp$ musí pro $u \to 0$ platit $s \to \infty$. Odtud plyne pomocí vztahu (2), že $x \to x_0$ neboli $x_0 = \wp v$. Dostáváme tedy podle (3):

$$\begin{aligned} \sqrt{(R(x))} &= \pm\wp'(u + v)\ ; & R(x_0) &= 4\wp^3 v - g_2 \wp v - g_3 \\ & & R'(x_0) &= 12\wp^2 v - g_2 \\ \sqrt{(R(x_0))} &= \pm\wp' v\ ; & R''(x_0) &= 24\wp v\,. \end{aligned}$$

Po dosazení do (2) a po úpravě dostaneme

$$\wp u = \frac{(\wp(u + v) + \wp v)\,(2\wp(u + v)\,\wp v - \tfrac{1}{2}g_2) - g_3 + \varepsilon\wp'(u + v)\,\wp' v}{2(\wp(u + v) - \wp v)^2},$$

kde $\varepsilon = \pm 1$.

Píšeme-li u místo $u + v$ a vezmeme-li podle (3′) v úvahu sudost funkce $\wp u$ a z ní plynoucí lichost $\wp' u$, dostáváme

$$\wp(u + v) = \frac{(\wp u + \wp v)(2\wp u\wp v - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \varepsilon\wp' u\wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2}.$$

Rozvinutím funkce $\wp$ v řadu podle (3′) a porovnáním koeficientů při členu s uv dostáváme $\varepsilon = 1$. Tím je dán additivní teorém funkce $\wp$

$$\wp(u + v) = \frac{(\wp u + \wp v)(2\wp u\wp v - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \wp' u\wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2},$$

který obdržel Weierstrass cestou ryze algebraickou. Pomocí tohoto teorému konstruuje vyjádření $\wp nu$ pomocí $\wp u$ a tím zároveň rozšiřuje předpokládaný poloměr konvergence r na nr, čímž dokazuje, že definičním oborem je celá komplexní rovina.

Formulujeme-li additivní teorém jako algebraické vyjádření $\wp(u + v)$ pomocí $\wp u$, $\wp v$ a jejich derivací, snadno se nám vybaví obdobná vlastnost goniometrických funkcí (např.: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha(\sin\beta)' + \sin\beta(\sin\alpha)'$). Uvědomíme-li si ještě, že funkce $\sin u$ je inverzní funkcí k $u = \int \mathrm{d}x/\sqrt{(1 - x^2)}$ (srov. s eliptickými integrály), snadno nás napadne, zda analogie není hlubší povahy. Ověřme, jak to vypadá s nejcharakterističtější vlastností goniomerických funkcí, s periodicitou.

Zkoumejme za tím účelem nejprve otázku jednoznačnosti řešení rovnice $\wp u = s$. Weierstrass vychází z této důležité věty, jejíž důkaz podává pomocí vlastností mocninných řad:

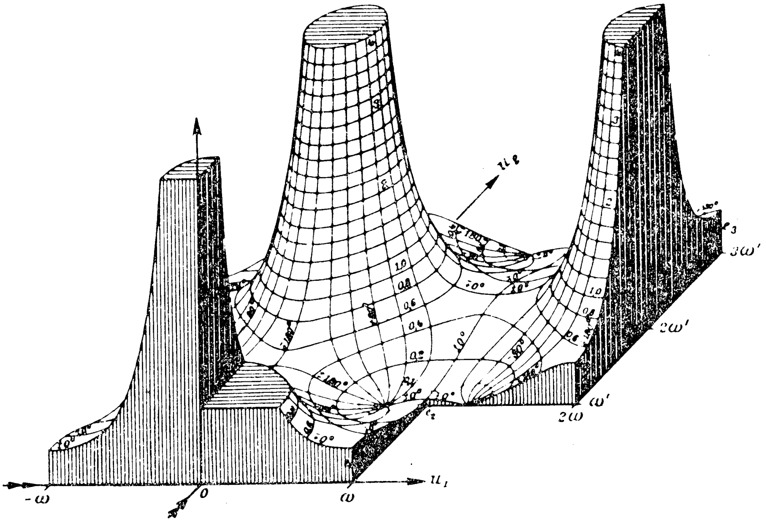
Nechť s a t jsou libovolná čísla vyhovující rovnici $t^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$. Potom lze najít (pomocí konečného počtu rozvinutí v řady) vždy takové číslo u, pro něž $\wp u = s$; $\wp' u = t$.

Označme e_1, e_2, e_3 kořeny polynomu $4s^3 - g_2 s - g_3$. Podle uvedené věty existuje ke každé dvojici $s = e_i$; $t = 0$ číslo $u = \omega_i$ takové, že $\wp\omega_i = e_i$; $\wp'\omega_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Weierstrass řeší dále otázku, zda takové u ve zmíněné větě existuje jediné. Předpokládá existenci dvou takových čísel u' a u'' a dokáže, že musí splňovat vztah $u'' = \pm u' + w$, kde w je pólem funkce $\wp u$, tj. $\wp w = \infty$ (uvádím značení užívané Weierstrassem, kterému nutno rozumět $\lim_{u \to w} \wp u = \infty$). Na otázku, zda naopak každý pól w funkce $\wp u$ splňuje rovnici $\wp(\pm n + w) = \wp u$, odpovídá Weierstrass kladně, přičemž vychází z additivního teorému a užívá limitního přechodu $\wp w \to \infty$. A konečně teprve v poslední fázi ukazuje Weierstrass, že $\wp u$ má kromě $u = 0$ ještě další póly: Z additivního teorému totiž plyne, že $\wp(u + v) = \wp(u - v)$, je-li $\wp' v = 0$, tj. pro $v = \omega_i$. Po substituci $u + v$ za u dostáváme $\wp(u + 2v) = \wp u$, odkud plyne $\wp 2v = \infty$ tj. všechny body $2\omega_i$ jsou póly a podle výše uvedené vlastnosti zároveň periody. Protože žádné dvě periody téže funkce nemohou být v iracionálním poměru a snadno se dá ukázat pro $2\omega_i$ a $2\omega_j$; $i \neq j$, že nejsou ani v poměru racionálním (sporem), vyplývá z toho, že žádné dvě z uvedených period nejsou v reálném poměru, a jsou tedy (při vektorové představě komplexní roviny) nezávislé. Důkazem existence primitivního páru period (tj. takového, jehož je každá perioda lineární kombinací s celočíselnými koeficienty – např. platí $2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3$) dospěl Weierstrass ke konečnému řešení vytčeného problému:

Funkce $\wp u$ je právě dvojperiodická.

Názorné představě této vlastnosti poslouží komplexní rovina nezávisle proměnné, která na rozdíl od pásů při jednoperiodických funkcích (viz funkce goniometrické) je rozdělena na rovnoběžníky period (viz obr., kde je znázorněn reliéf funkce $\wp u$).



Obr. Reliéf funkce $\wp u$; převzato z [4]) str. 100 včetně drobných odchylek v označení.

Zároveň s funkcí $\wp u$ zavádí Weierstrass další základní funkci své teorie σu, která s $\wp u$ souvisí vztahem

$$\wp u = -\frac{\mathrm{d}^2 \lg \sigma u}{\mathrm{d}u^2}, \tag{4}$$

z něhož je pomocí vlastností mocninných řad vyvozeno několik nejdůležitějších vlastností, jako lichost, celistvost, rozvoj ve tvaru

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{2}\frac{u^5}{5!} - 6g_3\frac{u^7}{7!} - \dots,$$

kde další koeficienty jsou rovněž celé funkce g_2 a g_3. Ze vztahu (4) dostáváme stejný poloměr konvergence jako u $\wp u$ a i zde se dá obdobným způsobem rozšířit na celou komplexní rovinu. Vztah (4) je možno přepsat ve tvaru

$$\wp u = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u \sigma'' u}{\sigma^2 u},$$

odkud plyne možnost vyjádřit $\wp u$ jako podíl dvou všude konvergentních řad, tj. dvou celistvých funkcí proměnné u.

Řadu zajímavých vlastností mají tzv. půlperiody ω_i, které hrají zejména u funkce σu důležitou roli. Zaveďme značení $\omega = \omega_1$, $\omega + \omega' = \omega_2$, $\omega' = \omega_3$. Pro funkci σu se dá odvodit vztah

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u + 2m\omega + 2n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2m\frac{\sigma'}{\sigma}\omega + 2n\frac{\sigma'}{\sigma}\omega',$$

odkud dospívá Weierstrass k tzv. Legendreovu vztahu

$$\begin{vmatrix} \eta & \eta' \\ \omega & \omega' \end{vmatrix} = \frac{\pi i}{2} \operatorname{sg} n \left[\operatorname{Re}\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right)\right],$$

značíme-li

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\omega = \eta\,; \quad \frac{\sigma'}{\sigma}\omega' = \eta'.$$

Kromě toho zavádí Weierstrass nové tři sudé funkce

$$\sigma_\alpha u = \exp(\eta_\alpha u)\frac{\sigma(\omega_\alpha - u)}{\sigma\omega_\alpha}\,; \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Dá se ukázat, že i tyto funkce souvisí jednoduše s funkcí $\wp u$:

$$\wp u = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2 + e_\alpha$$

$$\wp' u = -2\frac{\sigma_1 u \sigma_2 u \sigma_3 u}{\sigma^3 u} = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u}.$$

První z těchto vztahů dává snadno tušit, že podíly $\sigma_\alpha u/\sigma u$ jsou dvojperiodické, neboť vzhledem ke kvadrátu mohou s každou periodou funkce $\wp u$ měnit nejvýše znamení. Při podrobnějším vyšetření docházíme dokonce k závěru, že i funkce $(\sigma/\sigma_\alpha)\,u$; $(\sigma_\alpha/\sigma_\beta)\,u$ jsou dvojperiodické. Uvedené vlastnosti funkcí σu a $\sigma_\alpha u$ a jejich podílů již napovídají, že tyto funkce představují Weierstrassovo analogon Jacobiho funkcí ϑ; ϑ_k a sn u, cn u, dn u. Tuto domněnku nám skutečně v podstatě potvrzují vztahy

(5)
$$\operatorname{sn} u = \frac{\sigma}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{(e_1 - e_3)}}\right)\sqrt{(e_1 - e_3)}$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{(e_1 - e_3)}}\right)$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{(e_1 - e_3)}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad \sigma u &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2\tilde\omega}\right)} \frac{1}{\sqrt[8]{G}} \exp(\tilde\eta u^2/2\tilde\omega)\, \vartheta_0\left(\frac{u}{2\tilde\omega}\,\middle|\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right)\\
\sigma_\alpha u &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2\tilde\omega}\right)} \frac{1}{\sqrt[4]{(e_\beta - e_\gamma)}} \exp(\tilde\eta u^2/2\tilde\omega)\, \vartheta_1\left(\frac{u}{2\tilde\omega}\,\middle|\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right)\\
\sigma_\beta u &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2\tilde\omega}\right)} \frac{1}{\sqrt[4]{(e_\alpha - e_\gamma)}} \exp(\tilde\eta u^2/2\tilde\omega)\, \vartheta_2\left(\frac{u}{2\tilde\omega}\,\middle|\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right)\\
\sigma_\gamma u &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2\tilde\omega}\right)} \frac{1}{\sqrt[4]{(e_\alpha - e_\beta)}} \exp(\tilde\eta u^2/2\tilde\omega)\, \vartheta_3\left(\frac{u}{2\tilde\omega}\,\middle|\,\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega}\right).
\end{aligned}
$$

Obě sady výše uvedených vztahů nás přivádějí ke dvěma otázkám. Sada (5), kde v podstatě jde o pouhou lineární substituci, vede k otázce, v čem spočívá přínos sigma-funkcí v porovnání s theta-funkcemi, a sada (6), jaký je význam faktoru $\exp(\tilde\eta u^2/2\tilde\omega)$, který ve všech vztazích vystupuje. Poněvadž druhá otázka odpovídá zároveň na první, podívejme se nejprve na vztahy (6). Faktor $\exp(\tilde\eta u^2/2\tilde\omega)$ způsobuje – [3]) str. 283 –, že chování theta-funkcí při změně u o ω a ω' již postrádá symetrický charakter, který byl u sigma-funkcí. Tento rozdíl tkví právě v samé podstatě rozdílnosti role Weierstrassovy a Jacobiho v teorii eliptických funkcí. Zatímco Weierstrass, jak bylo již poznamenáno, vytvářel precizní teorii, k níž potřeboval co nejjednodušší a nejelegantnější aparát, čemuž sigma-funkce svým charakterem plně vyhovovaly, byla situace u Jacobiho podstatně jiná. Klein říká ([5] str. 112), že při překotném, dravém úprku vědy vpřed není divu, že v jednotlivostech zůstalo mnohé nedokončeno. Jako podstatnou mezeru můžeme považovat jak v teorii Abelově, tak u Jacobiho to, že jakýkoliv důkaz jednoznačnosti, ba i jeho pouhá potřeba úplně chybí a podobně i mnoho dalších věcí. Jacobi se prý k tomu sám jednou vyjádřil: „Meine Herren, für Gauss-sche Strenge haben wir keine Zeit". Je tedy vidět, že Jacobiho spontánnosti lépe odpovídaly theta-funkce, které mají mnohem bohatší rejstřík zajímavých vlastností než sigma-funkce (jsou dvojperiodické, mají nadřazenou funkci, tzv. obecnou theta-funkci, souvisí s některými důležitými problémy teorie čísel ap.). Klein sám uznal velkou Jacobiho autoritu, když přiznal, že Weierstrassův nový přístup k celému problému nutno hodnotit tím výše, když uvážíme, jak autoritativně byla zakořeněna Jacobiho teorie, kterou si Weierstrass dovolil podle vlastního názoru přebudovat.

Dalším z nejcennějších Weierstrassových přínosů je důkaz jedné ze základních vět o celistvých funkcích a její aplikace na eliptické funkce prostřednictvím σu. Mám na mysli větu, která je de facto zobecněním základní věty algebry na „nekonečný stupeň". Touto otázkou se do jisté míry zabýval již Cauchy, ale teprve Weierstrassovi se podařilo zobecnění na libovolnou celou funkci:

Nechť je dána celistvá funkce $f(u)$ s nekonečně mnoha nulovými body. Nechť $a_0 = 0$ je její nulový bod řádu p a ostatní nulové body $a_k \neq 0$ tvoří nekonečnou posloupnost, která nemá v konečnu žádný hromadný bod.

Nechť existuje celé $m \geqq 0$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} |1/a_n|^{m+1}$ konverguje, zatímco $\sum_{n=1}^{\infty} |1/a_n|^m$ diverguje.
Potom lze psát

$$f(u) = \exp(g(u))\, u^p \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{a_n}\right) \exp\left[\sum_{r=1}^{m} (1/r)(u/a_n)^r\right],$$

kde $g(u)$ je celistvá funkce.

Exponenciální faktor v jednotlivých činitelích zajišťuje stejnoměrnou konvergenci. Pomocí této věty získal Weierstrass kromě známého vztahu

$$\sin u = u \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{u}{n\pi}\right)^2\right]$$

také jednu ze základních formulí celé teorie, rozvoj funkce σu v nekonečný absolutně konvergentní součin:

$$\sigma u = u \prod_{w}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) \exp\left(u/w + \tfrac{1}{2} u^2/w^2\right); \quad w = 2m\omega + 2n\omega' \neq 0,$$

který dovoluje pomocí celé řady transformací a úprav vyjádřit všechny potřebné funkce ve tvaru nekonečných součinů nebo řad.

Weierstrass měl však neustále jeden hlavní cíl před sebou, vytvořit ucelenou teorii eliptických funkcí, přičemž eliptickou funkcí rozumí dvojperiodickou meromorfní funkci. Potřeboval tedy nějaké pojítko mezi obecnou eliptickou funkcí a známými speciálními funkcemi. Takový prostředek našel ve formě věty:
Budiž $f(u)$ eliptická funkce řádu $r \geqq 2$ s periodami 2ω a $2\omega'$, nulovými body $u_1, \ldots, u_r$ a póly $v_1, \ldots, v_r$.*
Budiž

$$\sum_{l=1}^{r} v_l - \sum_{l=1}^{r} u_l = -2k'\omega + 2k\omega'.$$

Potom

$$f(u) = C \exp\left[(u(2k'\eta - 2k\eta')\right] \prod_{l=1}^{r} \frac{\sigma(u - u_l)}{\sigma(u - v_l)}.$$

Vedle tohoto způsobu je možno vyjádřit každou eliptickou funkci také pomocí funkce $\wp u$. Weierstrass formuluje toto tvrzení následujícím způsobem:

Každou eliptickou funkci $f(u)$ s periodami 2ω a $2\omega'$ lze vyjádřit ve tvaru $f(u) = R_1(\wp u) + \wp' u R_2(\wp u)$, kde R_1 a R_2 jsou racionální funkce a *$\wp u$ má 2ω a $2\omega'$ za primitivní pár period.*

Z této věty přímo vyplývají některé důležité důsledky pro obecnou teorii eliptických funkcí. Na příklad:

1. Každá eliptická funkce má algebraický additivní teorém.

2. Každá eliptická funkce vyhovuje jisté speciální diferenciální rovnici prvního řádu.
3. Dvě eliptické funkce s týmiž periodami jsou vázány algebraickou rovnicí.

Po demonstraci toho, jakou klíčovou roli hrají Weierstrassovy funkce $\wp$ a σ v celé teorii, ukážeme ještě stručně na závěr multiplikativní teorém pro funkci $\wp u$ a pro sigma-kvocienty. Pro funkci $\wp$ jej Weierstrass formuluje takto:

$$\wp nu = \frac{g(\wp u)_{n^2}}{\bar{g}(\wp u)_{n^2-1}},$$

kde indexy n^2 a $n^2 - 1$ označují stupeň polynomů g a $\bar{g}$ vzhledem k $\wp u$. Současně konstruuje koeficienty v obou polynomech. Obdobný tvar mají mulitplikativní teorémy i pro sigma-kvocienty.

O důležitosti multiplikativních teorémů píše sám Weierstrass toto: „Studium multiplikativních formulí mělo pro teorii eliptických funkcí velký význam, jmenovitě Abelovi bylo podnětem k jeho výzkumům." Tímto problémem končí Weierstrass ve svých spisech stať o eliptických funkcích (dál pokračuje v témže svazku již eliptickými integrály). Právě popsaný způsob zavedení teorie eliptických funkcí na základě inverze eliptických integrálů, který byl na přání Weierstrassovo s ohledem na historický vývoj zvolen k publikaci jako první, nebyl však jediný, který Weierstrass vypracoval. Weierstrass vycházel ve většině svých přednášek z věty, že eliptické funkce jsou jediné jednoznačné analytické funkce, které mají algebraický additivní teorém. Avšak ten, kdo by chtěl této vlastnosti použít jako základny pro hlubší vniknutí do této teorie, neobešel by se bez vět z obecné teorie funkcí. K publikaci tohoto způsobu, který měl být obsahem jednoho z dalších dílů Weierstrassových sebraných spisů, bohužel však nedošlo, ačkoliv jej lze považovat právě za jeden z nejcennějších přínosů Weierstrassových, neboť ho řadí duchem mezi matematiky našeho věku. O tom svědčí skutečnost, že tento způsob buď vůbec, anebo téměř vůbec nezměněný přebírá i literatura současná (srov. Smirnov, Privalov, Leja ap.).

Literatura

[1] E. T. Bell: *Les grands mathématiciens*; str. 615; Paris 1961.

[2] A. Enneper: *Elliptische Functionen — Theorie und Geschichte;* Halle a/S. 1876; 500 str.

[3] R. Fricke: *Elliptische Functionen;* Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften II. 2.; Leipzig 1901—1921; str. 181—348.

[4] Jahnke - Emde: *Tafeln höherer Funktionen;* Leipzig 1960.

[5] F. Klein: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, I. díl; Berlin 1926; 380 str.

[6] L. Koenigsberger: *Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transzendenten in den Jahren 1826—1829;* Leipzig 1879; 50 str.

[7] E. Lampe: *Zur hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von Karl Weierstrass;* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung *24*; Berlin 1915; str. 416—438.

[8] R. Rothe: *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Herausgabe der mathematischen Werke*

von Karl Weierstrass; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 24; Berlin 1915; str. 439—442.

[9] K. WEIERSTRASS: *Mathematische Werke*, V. díl: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen; Berlin 1915; 330 str.

MARYA SKŁODOWSKA - CURIEOVÁ

(*7. 11. 1867 ve Varšavě, †4. 7. 1934 v Paříži)

Stoleté výročí narození polské badatelky připomíná základní objevy v oboru radioaktivity. Jsou dnes už zapomenuté nebo polozapomenuté, přestože byly startem k vývoji nových vědních oborů, jaderné fyziky, jaderné chemie a jaderné energetiky. Bez intenzívní práce paní Curieové a jejího manžela Pierra Curie by byl Becquerelův objev radioaktivity uranu (1896) nepochybně nadlouho zůstal jen nedoceněným příspěvkem k základnímu výzkumu fosforescence a fluorescence přírodních látek.

První práce paní Curieové je vlastně přímým pokračováním Becquerelova výzkumu. Myšlenka pátrat po radioaktivitě těch prvků periodické soustavy, které mají největší atomovou váhu, byla nasnadě. Není proto nic divného, že současně s objevem paní Curieové, že i thorium je radioaktivní, přichází stejný objev z Německa, kde jej G. C. SCHMIDT uveřejnil dokonce o 2 dny dříve (4. 4. 1898). Původní a nikým nenapodobený byl nápad paní Curieové zkoumat radioaktivitu uranových rud. Byl už cílevědomě zaměřen na hledání nových a dosud neznámých radioaktivních prvků. Bez této pracovní hypotézy neměl celý výzkum smyslu poněvadž uranová ruda nemohla zářit intenzívněji než čistý kovový uran stejné váhy. Další důležitý a spíše intuitivní než pokusy podložený byl experimentální postup paní Curieové, zachovávající pokud možno stejné dozimetrické podmínky. Nic se tehdy nevědělo o povaze radioaktivního záření samotného a o jeho absorpci v hmotném prostředí. Překvapujícím výsledkem byl jednoznačný důkaz, že uranové rudy obsahují neznámé prvky, jejichž radioaktivní záření je při stejné váze až o několik set procent intenzívnější než záření čistého kovového uranu. Tento výzkum, který vedl k objevu polonia a radia, tvoří nejvýznamnější část celého životního díla paní Curieové. Další její práci charakterizuje neobyčejná píle a úporná vytrvalost. Na její naléhání se Pierre Curie rozhodl spolupracovat s ní na izolaci radia ve zvažitelném množství.

Bylo potřebí neobyčejného elánu k této dlouhodobé a úmorné práci, nezajištěné ani hmotně, ani kádrově a ani prostorově. Přitom šlo o úkol, který neměl obdoby v historii vědy. Ve výchozím materiálu manželů Curieových, zbytcích po oddělení uranu ze smolince, je Ra-226 zastoupeno jen v poměru $1 : 2.10^6$. Navíc je to materiál po stránce chemické velmi komplexní, obsahující většinu členů periodické soustavy prvků. Ke všemu ještě manželé Curieovi byli fyzikové a neměli náležité chemické vzdělání a zkušenosti. Pomáhal jim chemik BÉMONT a byli odkázáni jen na klasické metody analytické chemie. Jediným jejich fyzikálním pomocníkem byl — kromě vah — optický spektrograf. Velmi důvtipně si pomohli novou fyzikální metodikou, založenou na měření ionizačního účinku radioaktivního záření. Tím získali nejúčinnější prostředek k rychlé kontrole správného postupu svých prací.

Připravili první zvažitelné množství radia, vypracovali postup k jeho izolaci, kterého se s určitými technologickými obměnami používá dodnes, a dali impuls k rozsáhlému výzkumu radioaktivity, jako nové vlastnosti hmoty a atomu samotného. Tento výzkum byl pak kromě jejich laboratoře konán hlavně v ústavech anglických, německých a ruských. Jejich práce položila základy k dnešnímu „atomovému věku", neboť vytvořila předpoklady k objevu umělé radioaktivity, který byl uskutečněn jejich dcerou Irenou a zetěm F. JOLIOTEM (1934), a k Hahnově-Strassmannově objevu štěpení atomového jádra uranu (1939).

Po tragické smrti Pierra Curie (1906) pokračovala paní Curieová v jejich společné práci. Stala