Ivan Netuka; Jiří Veselý

Pět ročníků matematické soutěže vysokoškoláků

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 31 (1986), No. 4, 234--237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138893`

[10] Kikoin, I. K. a kol.: *Fizika dlja 9 klassa.* Moskva, Prosveščenie 1979, 256 str.

[11] Mjakišev, G. J. - Buchovcev, B. B.: *Fizika dlja 10 klassa.* Moskva, Prosveščenie 1975, 367 str.

[12] Kuhn, W.: *Physik (Band III. E).* Braunschweig, Georg Westermann Verlag 1976, 216 str.

[13] Brenneke, R. - Schuster, G.: *Physik.* Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn 1969, 575 str.

[14] Sexl - Raab - Streeruwitz: *Physik (Teil 1—6).* Wien, Verlag Carl Veberreuetr 1976.

[15] Lindkvist, S. - Äkerlind, U. - Knall, E.: *Fysik. NT 2 — Grundbok; Fysik. NT 2 — Studiehandeldning; Fysik. NT 3 — Grundbok; Fysik, NT 3 — Studiehandeldning.* Uppsala, Almqvist & Wiksell 1976, 1977.

[16] PSSC: *Physics.* Boston, D. C. Heath and Company 1968, 686 str.

[17] *Nuffield Advanced Physics team: Physics. Students' book Unit.* The Nuffield Foundation, 1971.

[18] Kluiber, Z.: *Zpracování dotazníku „Fyzika pevných látek na gymnáziu".* Podkladová studie DÚ SPZV VIII-6-6/3, Praha 1982, 9 str.

[19] Kluiber, Z.: *Příspěvek k pojetí fyziky pevných látek v perspektivním didaktickém systému fyziky na gymnáziu.* Kandidátská disertační práce, Praha 1983, 209 str.

[20] Lepil, O.: *K novému pojetí vyučování fyzice na gymnáziu.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. *XXVII*, 1982, č. 3, str. 178.

[21] Vachek, J. - Pekárek, L. - Kluiber, Z.: *Návrh perspektivní koncepce vyučování fyzice na gymnáziu.* Praha, KVVF FzÚ ČSAV, interní materiál, 1984, 5 str.

PĚT ROČNÍKŮ MATEMATICKÉ SOUTĚŽE VYSOKOŠKOLÁKŮ

Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha

Matematická soutěž vysokoškoláků (dále MSV) vznikla z iniciativy matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v r. 1981. Tato další forma studentské vědecké a odborné činnosti je řešitelskou soutěží určenou pro studenty těch vysokých škol, v jejichž učebních plánech je podstatně zastoupena matematika. O prvních dvou ročnících soutěže lze nalézt zprávy v PMFA, roč. 26, str. 293—4 a roč. 28, str. 48—9. Po pěti letech existence soutěže je účelné se ohlédnout zpět a pokusit se o krátkou bilanci.

V organizaci dalších tří ročníků se postupně vystřídaly matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Komenského v Bratislavě (MSV 83), přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci (MSV 84) a opět MFF UK v Praze (MSV 85). Mimo soutěž se prakticky všech ročníků MSV zúčastnila vybraná zahraniční družstva. Proto bylo možné na základě získaných zkušeností rozšířit mezinárodní účast: MSV 85 byla zorganizována jako součást oslav 40. výročí osvobození ČSSR a vítězství nad fašismem za účasti družstev z BLR, MLR, NDR, PLR a SFRJ (celkově v tomto ročníku soutěžilo 25 družstev ze 12 škol). Za poslední tři roky přibyla v knize vítězů MSV postupně tato jména: P. Návrat z FJFI ČVUT Praha, I. Kříž a B. Kirchheim z MFF UK Praha (vítězové v první kategorii) a dále J. Nekovář a R. Thomas z MFF UK Praha, G. Tardos z budapešťské univerzity (vítězové ve druhé kategorii); ani v soutěži družstev nebyli zahraniční účastníci bez úspěchu, v MSV 85 získalo družstvo varšavské univerzity druhé místo. Pro úplnost: nejlepším čs. účastníkem ve druhé kategorii MSV 85 byl Jan Hric (MFF UK Praha). V soutěži družstev vyhrály celky MFF UK ve složení O. Ulrych, J. Nekovář, P. Savický (MSV 83), J. Nekovář, J. Rataj, R. Thomas (MSV 84) a M. Engliš, B. Kirchheim, R. Thomas (MSV 85).

Celkově lze říci, že MSV si vydobyla za pět let své existence pevné postavení v systému SVOČ a získala i zájem u zahraničních univerzit. Dobrá úroveň družstev zahraničních univerzit nutí pracovat studenty z našich škol s maximálním soustředěním a snahou neztratit zbytečně ani bod (např. sedmibodový rozdíl mezi prvními dvěma družstvy a cca dvacetibodová ztráta čtvrtého družstva v MSV 85 jsou při maximálním možném zisku 300 bodů relativně malé). MSV se též pravidelně zúčastňují družstva ze škol technického zaměření a lze říci, že např. účastníci z FJFI v Praze důstojně konkurují účastníkům z univerzit. Přesto se naskýtá otázka, zda by si školy s technickým zaměřením nezasloužily vytvoření podobné vlastní soutěže.

Postupně konstituované schéma soutěže (dvě kategorie, ve druhé jedenáct předmětů) se osvědčilo, dává možnost si vybrat ve druhé kategorii plně ve shodě se studijním zaměřením nebo osobními zájmy. V první kategorii jsou zadávány čtyři příklady z matematické analýzy a lineární algebry, ve druhé po dvou ze zvolených předmětů.

Není bez zajímavosti nahlédnout na zadávané úlohy. Např. se ukazuje, že v posledních letech působily v první kategorii největší obtíže příklady o posloupnostech či řadách. V MSV 85 to byla tato úloha:

Rozhodněte, pro která α reálná platí následující tvrzení:

Je-li $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak existuje nerostoucí posloupnost $\{b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, kladných čísel taková, že současně $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty \quad \text{a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{b_n}}{n^{\alpha}} = +\infty .$$

U úloh druhé kategorie je vyvážení zadávaných problémů vzhledem k obtížnosti mimořádně složité. Aby si čtenář mohl udělat lepší obrázek o obtížnosti, přinášíme na ukázku některé příklady z MSV 84 a MSV 85.

Algebra:

Grupoid se nazývá trimediální, jestliže každý jeho podgrupoid generovaný nejvýše třemi prvky je mediální, tj. splňuje identitu $(xy)(uv) = (xu)(yv)$. Dokažte, že každý trimediální grupoid o nejvýše čtyřech prvcích je mediální a sestrojte příklad nemediálního trimediálního grupoidu o pěti prvcích.

Automaty, formální jazyky, vyčíslitelnost:

Označme $\mathscr{B}$ třídu všech podmnožin $\mathbb{N}$, které jsou konečnými booleovskými kombinacemi rekurzivně spočetných (r.s.) množin přirozených čísel (tzn. které vznikají z r.s. množin pomocí konečně mnoha použití operací průniku, sjednocení a doplňku).

Dokažte, že pro libovolnou množinu A z $\mathscr{B}$ buď A nebo množina $\bar{A}$ (doplněk A) obsahuje nekonečnou r.s. podmnožinu.

Diferenciální rovnice:

Nechť f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Buď $M \subset \mathbb{R}^2$ množina všech bodů lokální nejednoznačnosti zprava pro diferenciální rovnici

$$(*) \qquad \dot{x} = f(t, x) ,$$

tj. $(a, b) \in M$, právě když existují dvě řešení x^1 a x^2 rovnice $(*)$ taková, že $x^1(a) = x^2(a) = b$ a přitom na žádném pravém okolí bodu a nesplývají. Dokažte, že když je $M \subset \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$, potom je množina M spočetná.

Funkcionální analýza:

Nechť B je uzavřená jednotková koule v normovaném lineárním prostoru X a U slabé okolí nuly v X. Dokažte, že existuje konečně mnoho bodů $x_1, \ldots, x_n$ v B tak, že

$$\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U) \supset B .$$

Komplexní analýza:

Buď f holomorfní v prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť existují reálná čísla a, α, δ, $\delta > 0$, $0 < \alpha \leqq \pi/4$ tak, že $\operatorname{Im} f$ je omezená v množině

$$M = \{z_0 + r\,e^{it}; 0 < r < \delta, |t - a| < \alpha\} .$$

Ukažte, že potom f nemůže mít v bodě z_0 pól, ale může mít podstatnou singularitu.

Matematická statistika:

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leqq 1 , \\ 1 - x^{-\alpha} & \text{pro} \quad x > 1 , \end{cases}$$

kde α je neznámý parametr větší než nula a $n \geqq 2$. Dokažte, že

$$T = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$

je postačující statistika, vypočtěte její rozdělení a najděte nejlepší nestranný odhad parametru α.

Numerická matematika

Rychlost konvergence iterační metody

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + c$$

je definována rovností

$$q = -\log \varrho(A) ,$$

kde $\varrho(A)$ je spektrální poloměr matice A.

Množinu všech reálných matic A, pro které $\sigma(A) \subset \langle a, b \rangle$, $a < b$, označme symbolem $\mathfrak{M}\langle a, b \rangle$ ($\sigma(A)$ je spektrum matice A).

Nechť $q_B(\alpha)$ je rychlost konvergence následující iterační metody:

$$y^{(k+1)} = Bz^{(k)} + \alpha ,$$

$$z^{(k+1)} = \alpha z^{(k)} + (1 - \alpha)\, y^{(k+1)}, \; k \geqq 0 ,$$

$$z^{(0)} = y^{(0)} ,$$

kde $B \in \mathfrak{M}\langle a, b \rangle$, α je reálný parametr.

Nalezněte parametr α_{opt}, pro který platí následující vztah:

$$\inf_{B \in \mathfrak{M}\langle a,b \rangle} q_B(\alpha_{\text{opt}}) = \sup_{\alpha} \inf_{B \in \mathfrak{M}\langle a,b \rangle} q_B(\alpha) .$$

Programování:

Definice: Konečná posloupnost přirozených čísel má vlastnost R_d, jestliže je rostoucí a součet jejích členů je dělitelný číslem d.

Úkol: Je dána libovolná posloupnost přirozených čísel $a_1, \ldots, a_n$ a přirozené číslo $k \ll n$. Sestavte algoritmus, který rozhodne, zda z dané posloupnosti lze vybrat posloupnost délky k mající vlastnost R_2 (tj. zda lze vybrat posloupnost $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, $1 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq n$, takovou, že $a_{i_1} < \ldots < a_{i_k}$ a součet $\sum_{i=1}^{k} a_{i_j}$ je sudý).

Omezení: Daná posloupnost je uložena v externím souboru. Soubor lze přečíst jen jednou a do vnitřní paměti se celý nevejde.

Návod: Pamatujte si nejmenší číslo, kterým může končit dosud vybraná rostoucí posloupnost délky i mající sudý, resp. lichý součet členů.

Reálná analýza:

Platí následující tvrzení? Existuje na přímce zdola polospojitá funkce taková, že pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}$ 1. kategorie je vzor $f^{-1}(A)$ Lebesgueovy míry nula.

Topologie:

Nechť X je topologický prostor, Y je regulární topologický prostor a nechť F: $X \to Y$. Nechť ke každé otevřené množině U v X existuje taková její podmnožina K_U, že $f \mid K_U$ je spojitá a K_U není řídká v X. Dokažte, že existuje množina D hustá v X tak, že $f \mid D$ je spojitá.

Teorie pravděpodobnosti:

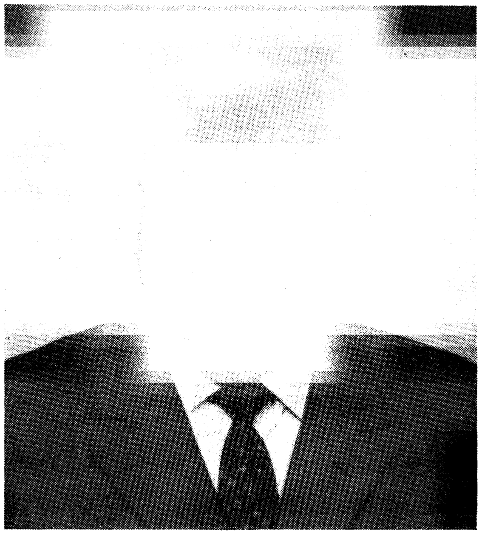
Buď $X_1, X_2, \ldots$ posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ pro $n \in \mathbb{N}$. Označme $R_n = \operatorname{card}\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ = počet různých hodnot mezi součty $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Vypočtěte $p = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \cdot ER_n$.

*

Rádi bychom na závěr ještě upozornili, že soutěže jsou koncipovány jako každoroční přirozené vyvrcholení práce řešitelsky zaměřených kroužků a seminářů z jednotlivých škol. Na pomoc v této práci vydává Aktiv SVOČ na MFF UK v Praze nepravidelně tzv. „Informace SVOČ", které (bezplatně) poskytuje ostatním školám v ČSSR. Bližší informaci lze získat prostřednictvím dr. M. Krutiny, MÚUK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.

jubilea & zprávy



K ŠESŤDESIATINÁM PROFESORA TIBORA ŠALÁTA

Prof. RNDr. Tibor Šalát, DrSc. oslávil 13. mája 1986 svoje šesťdesiate narodeniny.

Pochádza z Vajky (teraz Lúčnice) nad Žitavou. Po skončení gymnaziálnych štúdií v Zlatých Moravciach a v Šuranoch študoval matematiku a fyziku na Univerzite Karlovej. Po absolvovaní štúdia najprv dva roky učil v Nových Zámkoch a po získaní doktorátu sa stal v roku 1952 asistentom na Katedre matematiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave. V roku 1962 bol vymenovaný za docenta, v roku 1965 za mimoriadneho profesora a v roku 1977 za riadneho profesora pre odbor matematika. Svojmu pôsobisku, ktoré sa medzičasom búrlivo rozvíjalo, zostal verný doteraz. Je členom Katedry algebry a teórie čísel Matematicko-fyzikálnej fakulty UK v Bratislave.

Počas svojej 34ročnej pedagogickej praxe vychoval prof. Šalát stovky matematikov, pre ktorých zostáva nezabudnuteľným učiteľom. Vyškolil mnohých ašpirantov a ďalších študentov