Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vladimír Černý; Ján Pišút; Peter Prešnajder

Eště raz k analógii „Stacionárny kvantový stav častice viazanej na úsečku - stojatá vlna na strune"

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 30 (1985), No. 4, 226--234

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138877

vyskytují výjimečně. K rozvíjení schopnosti modelovat je třeba zařazovat do osnov specifické prvky. Výuka modelování přináší specifické problémy učitelům.

[S otázkou vytváření modelů reálných situací souvisí problematika řešení slovních úloh. Treilibsův referát potvrzuje potřebu věnovat řešení těchto úloh náležitou didaktickou přípravu. Řešení úloh nelze patrně naučit ilustrativními příklady.]

Kapitola *Problem Solving*, o níž zde referuji, obsahuje pouze dvě podrobné ukázky řešení úloh. První uvádí E. Love z Velké Británie. Jde o tuto úlohu:

Prvních 8 přirozených čísel zapsaných v dvojkové soustavě má být uspořádáno tak, že každá dvě sousední i první a poslední číslo se liší pouze v jedné cifře (každé číslo je zapsáno jako trojciferné: 000,001,..). Najděte všechna taková uspořádání a vztahy mezi nimi.

Řešení úlohy je znázorněno cestami po hranách jednotkové krychle.

Druhá konkrétní ukázka rozboru řešení úlohy pochází od M. Waltera z Oregonu a týká se matematizace problémů vzniklých při překládání archu papíru.

*

Z předcházejícího výkladu je zřejmé, že výklad o úlohách ve vyučování matematice na IV. kongresu ICME se soustředil zejména na otázku významu úloh a jejich didaktickou klasifikaci i na problémy matematizace a modelování. Mnozí autoři se odvolávali na práce, které jsem neměl k dispozici. Tím ovšem informativní hodnota našeho článku klesá. Přesto se však potvrzuje, že úlohy ve vyučování matematice jsou aktuálním problémem nejen naší školské praxe.

EŠTE RAZ K ANALÓGII „STACIONÁRNY KVANTOVÝ STAV ČASTICE VIAZANEJ NA ÚSEČKU – STOJATÁ VLNA NA STRUNE“

Vladimír Černý, Ján Pišút, Peter Prešnajder, Bratislava

1. Úvod

V článku [1] publikovanom nedávno v tomto časopise sa A. Lacina zaoberal s analógiou medzi stacionárnymi stavmi častice v nekonečne hlbokej potenciálovej jame a stojatými kmitmi struny upevnenej na oboch koncoch. Táto analógia sa používa na objasnenie mechanizmu kvantovania pri elementárnom výklade kvantovej mechaniky (napr. [2], [3] a viacero ďalších miest) a ako Lacina správne poznamenal pri jej výklade sa robia „medzikroky“, ktoré nie sú korektné.

V tomto príspevku budeme ešte raz analyzovať celý problém. Ukáže sa, že situácia je dosť zaujímavá a že Lacina má pravdu, napriek tomu, že pravdu nemá. Toto tvrdenie objasníme podrobnejšie v dvoch krokoch. V prvom ukážeme, že Lacina analyzuje situáciu, ktorá neodpovedá fyzikálnej formulácii problému. V druhom kroku ukážeme, že „medzikroky“ kritizované Lacinom sú skutočne nekorektné, hoci dôvody sú celkom iné ako tie, čo boli uvedené v práci [1]. Napokon sa pokúsime naznačiť, ako možno túto analógiu previesť bez týchto nekorektných „medzikrokov“ (tak je to prevedené napr. v [4]).

Poznamenajme ešte, že diskusiu okolo otázok elementarizovania podstatných myšlienok modernej fyziky treba len privítať, lebo je to problém, s ktorým sa asi v budúcnosti budeme stretávať čoraz častejšie. Lacinova kritika zjednodušenej analógie medzi stacionárnymi stavmi elektrónu viazaného na úsečku a stojatej vlny na strune bola veľmi užitočná v tom, že postup vyhýbajúci sa nekorektným „medzikrokom" už bol použitý v [4] a bude použitý zrejme aj v pripravovanej učebnici fyziky pre štvrtý ročník gymnázií.

Náš príspevok je rozdelený takto: v nasledujúcom odstavci stručne zopakujeme formuláciu problému v kvantovej mechanike, v treťom odstavci pripomenieme postupy používané pri elementarizovaní tohto príkladu, Lacinovu kritiku a jej analýzu. Tu bude vidno, prečo Lacina nemá pravdu. Vo štvrtom odstavci ukážeme, že diskutované medzikroky v analógii skutočne nemožno korektne previesť, aj keď z iných dôvodov, ako uvádza Lacina. V tomto zmysle má teda pravdu. Piaty odstavec obsahuje návrh na využitie analógie bez nekorektných medzikrokov a posledný odstavec obsahuje niekoľko poznámok o vyučovaní kvantovej mechaniky.

2. Stacionárne stavy elektrónu v jednorozmernej nekonečne hlbokej potenciálovej jame

Jde o celkom štandardný príklad vyskytujúci sa vo všetkých učebniciach a zbierkach príkladov. Spomenieme ho preto len veľmi stručne, aby sme zaviedli označenie a upozornili na niektoré aspekty, ktoré sú dôležité pre elementarizáciu tohto príkladu.

Častica viazaná v nekonečne hlbokej potenciálovej jame

$$(1)\quad \begin{aligned} V(x) &= 0 \quad \text{pre} \quad 0 \leqq x \leqq L \\ V(x) &= \infty \quad \text{pre} \quad x < 0 \text{ a pre } x > L \end{aligned}$$

je chápaná ako limita konečnej potenciálovej jamy. Pri tejto limite sa ukáže, že vlnové funkcie stacionárnych stavov musia spĺňať okrajové podmienky

$$(2)\qquad \Psi(0) = 0\,, \quad \Psi(L) = 0$$

a hamiltonián častice nachádzajúcej sa v jame je

$$(3)\qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,.$$

V dôsledku limitnej procedúry, ktorou sme dostali nekonečne hlbokú potenciálovú jamu, sa v (3) už nevyskytuje potenciálová energia $V(x)$. Navyše o vlnovej funkcii *mimo* jamy už nemá zmysel hovoriť. Na určenie stacionárnych stavov sa treba obmedziť len na oblasť vnútri jamy a nekonečnosť potenciálnej energie mimo jamy se redukuje len na okrajové podmienky (2). Fyzikálne to pochádza z toho, že všetky vlnové funkcie, ktoré by boli nenulové mimo jamy, by odpovedali fyzikálne nerealizovateľným stavom s nekonečnou strednou hodnotou potenciálovej a tým i celkovej energie. Po prevedení limity $V(x) \to \infty$ pre x mimo jamy potenciálová energia celkom vypadne z hry a ostanú nám len okrajové podmienky (2) a hamiltonián (3).

Stacionárne stavy, ktoré sú riešeniami bezčasovej Schrödingerovej rovnice a k nim príslušné hodnoty energie sú

(4a)

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{L}\right)} \sin\left(n\pi x/L\right), \quad 0 < x < L$$

$$(4b)\qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\, n^2\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Poznámka: Keby sme trvali na tom, že má zmysel hovoriť aj o vlnovej funkcii mimo jamy museli by sme napísať aj

$$(5)\qquad \Psi_n(x) = 0 \quad \text{pre} \quad x \leqq 0 \quad \text{a pre} \quad x \geqq L$$

a namiesto vzťahu

$$(6)\qquad \hat{H}\Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x)$$

by sme pre $\hat{H}$ dané výrazom (3) a pre funkcie $\Psi_n(x)$ dostali

$$\hat{H}\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{2}{L}}\left[\frac{n\pi}{L}\,\delta(x) + \right.$$

$$(7) \qquad \left. + (-1)^{n+1}\,\delta(x - L)\right],$$

pričom druhý člen na pravej strane pochádza z nespojitosti prvej derivácie $\Psi_n(x)$ v bodoch $x = 0$, $x = L$, ktorú nevyhnutne dostaneme pri $\Psi_n(x)$ zadanom vzťahmi (4) a (5).

Pri konečnej jame sa tento problém samozrejme nevyskytuje, ale na tom, že sa kvalitatívne vlastnosti problému menia pri určitých limitách, nie je nič prekvapujúceho.

3. Elementarizovaný výklad stacionárnych stavov častice viazanej na úsečku a Lacinova kritika

Takýto výklad (napr. [2], [3]) spočíva zhruba v troch krokoch:

A1) Stacionárnemu stavu elektrónu viazanému na úsečku o dĺžke L priradíme stojatú de Broglieho vlnu (čistý harmonický kmit). Pri popise takejto de Broglieho vlny neriešime Schrödingerovu rovnicu, ale „uhádneme“ tvar vlny poukázaním na stojatú vlnu na strune o dĺžke L, ktorú si žiaci môžu predstaviť.

A2) Amplitúda stojatej vlny na strune a „uhádnutá“ amplitúda stojatej de Broglieho vlny sú úmerné $\sin(\pi nx/L)$. Takáto stojatá vlna sa popíše ako superpozícia dvoch rovinných de Broglieho vĺn $\exp(i\pi nx/L)$, $\exp(-i\pi nx/L)$.

A3) Pretože vlne $\exp(\pm i\pi nx/L)$ prislúcha hybnosť $p_n = \pm\hbar\,\pi n/L$, argumentuje sa na základe A2), že v danej stojatej vlne môže hybnosť nadobúdať len hodnoty $\pm\hbar\,\pi n/L$, a preto je štvorec hybnosti kvantovaný. Pre energiu častice viazanej na úsečku o dĺžke L potom dostávame

$$E_n = \frac{1}{2m}\,p_n^2 = \frac{\hbar^2\,\pi^2}{2mL^2}\,n^2\,.$$

Lacinova kritika tohto postupu je zameraná v podstate na dva body:

L1) Stojatá monochromatická vlna nemôže byť obmedzená na úsečku o dĺžke L, ale musí byť nekonečná. Pre stacionárny stav popísaný takouto stojatou vlnou budú $\hat{H}$, $\hat{p}^2$ komutovať, inak komutovať nebudú.

L2) Ak častici viazanej v jame priradíme vlnovú funkciu danú súčasne vzťahmi (4a) a (5), potom hybnosť častice nenadobúda len hodnoty $\pm\pi\hbar n/L$, ale je zadaná zložitejším rozdelením pravdepodobnosti. Toto rozdelenie pravdepodobnosti je explicitne spočítané v prílohe Lacinovho článku. Idea výpočtu je táto: Hustota pravdepodobnosti $\varrho_n(p)$ pre nameranie hodnoty p hybnosti častice v stave Ψ_n je daná výrazom

$$\varrho_n(p) = |c_n(p)|^2\,,$$

kde

$$(8a) \qquad c_n(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p^*(x)\,\Psi_n(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pričom

$$(8b) \qquad \varphi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)}}\exp(ipx/\hbar)\,.$$

Takto spočítané $\varrho_n(p)$ je rozmyté okolo hodnôt $\pm\pi n\hbar/L$ a až pre veľké n vzniká rozdelenie, ktoré je blízke k $(1/2)\,[\delta(p - \pi n\hbar/L) + \delta(p + \pi nh/L)]$.

Teraz si všimneme bližšie Lacinovu kritiku. Podľa nášho názoru je bod L1) menej závažný ako bod L2). V uvažovanej analógii totiž nie je podstatné, či vlna je monochromatická v zmysle striktne definovanej vlnovej dĺžky, podstatné je to, že vlna je monofrekvenčná. Je to tým, že stacionárne stavy majú určitú energiu, ktorá odpovedá určitej frekvencii. Stojaté vlny na strune, nazývané tiež čistými harmonickými tónmi struny, majú tiež určitú frekvenciu a to je podstatné pre celú analógiu. Ak je navyše vlnový proces obmedzený na istú oblasť priestoru, potom to, akú vlnovú dĺžku mu priradíme, je do istej miery vecou definície. Na úrovni definície môžme napríklad celkom dobre povedať: ak je stojatá vlna s amplitúdou $A(x)$ obmedzená na oblasť $0 < x < L$ a ak pre všetky x z tohto intervalu platí

(9)
$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A(x)\,, \quad \lambda = \text{konšt.}\,,$$

potom budeme λ nazývať vlnovou dĺžkou tejto stojatej vlny. Táto definícia je po formálnej stránke tak dobrá ako hociaká iná. Po fyzikálnej stránke sa však už rôzne definície líšia svojím fyzikálnym obsahom a tu už rôzne definície *nie sú* rovnako dobré.

Podstatnou časťou Lacinovej kritiky je teda podľa nášho názoru bod L2), ktorý fakticky ukazuje, že definícia vlnovej dĺžky v (9), ktorá sa implicitne používa v diskutovanej analógii pre stojatú vlnu obmedzenú na interval $0 < x < L$, neodpovedá fyzikálnej situácii. To vyplýva u Lacinu z toho, že rozklad stojatej vlny s určitou vlnovou dĺžkou podľa kroku A2) vedie k inému rozdeleniu hustoty pravdepodobnosti v priestore hybnosti ako výpočet podľa vzťahov (8).

Pozrime sa teraz na to, akej fyzikálnej situácii odpovedá výpočet $\varrho_n(p)$ podľa vzťahu (8). Začneme trocha okľukou a pripomenieme si jeden realistický a jeden akademický príklad zo štandardnej kvantovej mechaniky, kde je fyzikálna interpretácia situácie úplne jasná.

Príklad 1: Beta rozpad atómu trítia

V tomto atóme sa jadro skladá z dvoch neutrónov a jedného protónu. Náboj jadra je $+e$ a vlnové funkcie elektrónu $\Phi_n(r)$ sú rovnaké (až na redukovanú hmotnosť) ako v atóme vodíku. Jadro trítia sa rozpadá beta rozpadom na jadro ^{3}He, ktorého náboj je $+2e$. Vlnové funkcie elektrónu v poli takéhoto jadra sú $\chi_n(r)$ a sú rovnaké ako pri ionizovanom atóme hélia. Pýtame sa teraz na toto: ak sa pred rozpadom elektrón nachádzal v základnom stave atómu trítia, s akou pravdepodobnosťou ho nájdeme po rozpade jadra v n-tom stave atómu hélia. Výsledok obsahuje ako podstatný súčiniteľ štvorec absolútnej hodnoty výrazu

(10)
$$c_n = \int \chi_n^*(r)\, \Phi_0(r)\, d^3r$$

a ďalší faktor je daný závislosťou fázového objemu pre vyletujúci elektrón a neutríno od energie, ktorú má v stave χ_n elektrón v atóme hélia.

Príklad 2:
(akademický)

Nech sa elektrón nachádza v základnom stave v nekonečnej jame o dĺžke L na intervale $0 < x < L$ a nech vlnová funkcia v tomto stave je $\Psi_0(x, L)$. S akou pravdepodobnosťou nájdeme elektrón popísaný touto vlnovou funkciou v n-tom stave v jame o dĺžke $B > L$, pričom oblasť jamy je teraz $0 < x < B$? Priamočiary výpočet udáva túto pravdepodobnosť ako štvorec absolútnej hodnoty výrazu

(11)
$$\int_0^B \Psi_n^*(x, B)\, \Psi_0(x, L)\, dx\,.$$

A teraz sa pozrime na fyziku za obidvomi týmito príkladmi. U príkladu 1 je všetko úplne jasné. Fyzikálna situácia, ktorej odpovedá (11) je takáto: Elektrón je najprv v jame o dĺžke L. Potom okolo tejto jamy urobíme druhú jamu a náhle odstránime stenu v bode $x = L$. Tým sme zmenili hamiltonián sústavy. Výraz (11) udáva priemety vlnových funkcií „starého" hamiltoniánu do vlnových funkcií „nového" hamiltoniánu. To isté se deje v prvom príklade, kde počítame priemet vlnových funkcií starého hamiltoniánu (atóm $^3_1$H) do vlnových funkcií nového hamiltoniánu (atóm $^3_2$He). Výraz je fyzikálne relevantný len pri náhlej zmene hamiltoniánu.

Teraz už je vidno aj fyzikálnu situáciu odpovedajúcu Lacinovmu výpočtu $\varrho_n(p)$ podľa vzťahov (8). Výraz (8a) je priemetom stavu $\Psi_n(x)$ odpovedajúcemu elektrónu viazanému na úsečku $0 < x < L$ do vlastných stavov operátora hybnosti pre časticu, ktorá sa môže pohybovať po celej osi x. To, čomu vzťahy (8) odpovedajú, je preto táto situácia: elektrón je viazaný dvomi odrážajúcimi stenami na úsečku $0 < x < L$. Tieto steny rýchlo *odstránime* a okamžite *potom* meriame hybnosť častice. Inak povedané: koeficienty $c_n(p)$ vo vzťahu (8) odpovedajú voľnej častici, ktorá bola pripravená do stavu popísaného vzťahmi (4a) a (5). To ale nie je relevantné pre časticu viazanú v jame*), ale *len* pre časticu, ktorá bola v jame, ale už v nej nie je. Lacinova kritika takto ide mimo cieľa, pretože sa netýka častice viazanej v nekonečne hlbokej potenciálovej jame.

*) Keby to bolo relevantné, bolo by to návrhom na experimentálne vyvrátenie de Broglieho-Bohmovej-Bellovej interpretácie kvantovej mechaniky (pozri [5]) a autorov tohto príspevku by to vôbec nemrzelo. Ale situácia na nešťastie nie je až taká jednoduchá. Je ale možné, že podrobná analýza merania hybnosti častice viazanej v jame by k takémuto vyvráteniu mohla viesť.

4. Sú medzikroky v diskutovanej analógii korektné?

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že rozklad stojatej vlny na úsečke o dĺžke L

$$(12)\quad \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_nx/\hbar} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_nx/\hbar}\right]$$

$$p_n = \pi n\hbar/L$$

a interpretácia stavov

$$(13)\qquad \Phi_{p_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_nx/\hbar}\,,$$

$$\Phi_{-p_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_nx/\hbar}$$

ako vlastných stavov operátora $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ prislúchajúcich vlastným hodnotám p_n, resp. $-p_n$, je v poriadku (pričom uvažujeme len $0 < x < L$).

Keby všetko bolo v poriadku, potom by analógia, ktorú Lacina kritizuje, bola celkom korektná. Ale nie je to v poriadku. Naznačuje to už narušenie vzťahov neurčitosti:

Operátor $\hat{p}$ spĺňa kanonický komutačný vzťah s operátorom $\hat{x}$. Pretože $\Phi_{p_n}(x)$ je vlastným stavom operátora $\hat{p}$, neurčitosť v hybnosti je v tomto stave nulová, $\Delta p = 0$. Vzhľadom na to, že pre časticu viazanú na úsečku sa celý svet skladá len z intervalu $0 < x < L$, bude neurčitosť súradnice v stave Φ_n menšia ako L, $\Delta x < L$. V stave $\Phi_{p_n}(x)$ takto máme $\Delta x \Delta p = 0$, čo zrejme nie je v poriadku. Príroda sa tu ale „bráni" narušeniu vzťahov neurčitosti*) zaujímavým spôsobom — stavy (13) nie sú fyzikálne realizovateľné. Pozrime sa na to teraz bližšie.

*) Problém má veľa spoločného so vzťahmi neurčitosti pre uhlovú premennú a príslušnú zložku momentu hybnosti. Analýzu tohto prípadu pozri napr. v [6].

Pod fyzikálnou realizovateľnosťou stavu chápeme podmienku konečnosti strednej hodnoty energie a disperzie energie

$$\text{(14)} \qquad \bar{E} = \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle < \infty , \qquad (\Delta E)^2 = \langle \Phi | (\hat{H} - \bar{E})^2 | \Phi \rangle .$$

Ukážeme, že nie všetky stavy (z priestoru kvadraticky integrovateľných funkcií na intervale $0 < x < L$) ich spĺňajú. Ako príklad uvažujme funkciu

$$\text{(15)} \qquad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Psi_n(x) .$$

Jde o kvadraticky integrovateľnú funkciu

$$\text{(16)} \qquad \langle \Phi | \Phi \rangle = \int_0^L \Phi^2(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Jej stredná hodnota energie

$$\text{(17)} \qquad \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

je ale divergentná.

Presne to isté sa stane v nekonečne hlbokej potenciálovej jame so stavmi (13), lebo v rozvoji

$$\text{(18)} \qquad \Phi_p(x) = \sum_{n=1} a_n \Psi_n(x)$$

pre veľké n je a_n úmerné*) $1/n$ a môžeme zopakovať vyššie uvedenú argumentáciu (v rovnici (18) $\Phi_p(x)$ označuje jeden zo stavov (13)).

Situácia je celkom analogická známemu „odstrašujúcemu" príkladu s lineárnym harmonickým oscilátorom, kde (v obvyklom označení) v normovateľnom a zdanlivo úplne „legálnom" stave

$$|\Psi\rangle = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |n\rangle$$

výraz pre strednú hodnotu energie diverguje.

Stavy (13) sú teda v nekonečne hlbokej potenciálovej jame *fyzikálne nerealizovateľnými stavmi.*

Poznamenajme, že s operátorom $\hat{p}$ pre častice v nekonečne hlbokej jame sú určité problémy a zmienime sa o nich v Dodatku.

5. Analógia bez nekorektných medzikrokov

Ako sme videli v predchádzajúcom, v analógii je nekorektný medzikrok, v ktorom sa vlnová dĺžka zavádza pomocou operátora hybnosti, t.j. cez de Broglieho postupné vlny: stojatá vlna sa rozloží ako superpozícia dvoch postupných vĺn typu $\exp(\mathrm{i}px/\hbar)$, $\exp(-\mathrm{i}px/\hbar)$ a tieto vlny sa interpretujú ako (fyzikálne realizovateľné stavy s ostrou hodnotou hybnosti p, resp. $-p$.

Ak sa pozrieme na riešenie problému častice v nekonečne hlbokej potenciálovej jame, tento medzikrok môžeme (presnejšie musíme) vynechať, lebo všetko, čo potrebujeme, je vzťah

$$\text{(19)} \qquad E = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m\lambda^2}$$

medzi energiou a dĺžkou vlny (chápanej v zmysle rovnice (9)). Postulujeme ho *bez* odvolania sa na hybnosť častice. To je konzistentné – a vôbec nie náhodou – s definíciou hamiltonánu (3); ak do (19) dosadíme $\lambda = 2L/n$, dostaneme rovnaký výsledok, ako keď hamiltoniánom (3) pôsobíme na vlnovú funkciu (4a).

Pri vyučovaní nebude žiakom robiť problémy spojiť určitú vlnovú dĺžku so stoja-

*) Vidno to z toho, že koeficienty a_n v (18) sú vlastne koeficientami Fourierovho rozkladu na intervale $-L < x < L$ nepárnej funkcie $f(x)$ (rovnej $\phi_p(x)$ pre $0 < x < L$), ktorá je v bode $x = 0$ nespojitá a pre ktorú $f(L) \neq \neq -f(-L)$. Dôkaz tvrdenia o chovaní sa koeficientov a_n možno nájsť v [7].

tou vlnou. Jediný problém je v tom, ako ukázať, že vzťah (19) platný pre postupnú vlnu platí aj pre stojatú vlnu. Jednou možnosťou je povedať to bez hlbšieho zdôvodnenia. Druhou možnosťou je platnosť vzťahu (19) pre stojatú vlnu trocha zdôvodnit.*) Stojatá vlna vzniká odrazom od steny a ako je známe z klasickej fyziky pri odraze sa energia častice ani pulzu vĺn nemení. Stojatú vlnu obmedzenú na konečnú oblasť priestoru možno potom získať dosadením steny do jedného z uzlov. Argument nie je síce dôkazom, ale robí platnosť vzťahu (19) pre stojatú vlnu prijateľnou.

6. Poznámka k vyučovaniu kvantovej mechaniky

Pri elementárnom výklade kvantovej mechaniky sú určité zjednodušenia nevyhnutné. Určite sa však treba vyhnúť postupom, ktoré by mohli viesť k nasledujúcej „modelovej situácii". Žiak štvrtej triedy gymnázia sa naučí látku z elementárnej kvantovej mechaniky, po maturite príde na matematicko-fyzikálnu fakultu, kde ho učíme kvantovú fyziku „pre dospelých". Žiak je ale výnimka, pamätá si ešte, čo sa učil na gymnáziu a raz sa opýta: tak dobre, a ako súvisí to, čo nás učíte teraz s tým, čo nás učili na gymnáziu? Ak tu treba odpovedať tak, že to gymnaziálne učivo vlastne nebola pravda, ale len taká popularizácia, je zle, nastane u neho rozčarovanie.

Situácia by skôr mala byť taká, že ku každej téme preberanej na gymnáziu existuje príslušná časť alebo príklad vo vysokoškolskej kvantovej mechanike, ktorá nepoprie gymnaziálnu látku, ale vysvetlí ju z hlbšieho a úplnejšieho hľadiska.

Ak sa takto pozrieme na časticu viazanú na úsečke a analógiu so stojatou vlnou, potom je hneď vidno, že tomuto učivu odpovedá v kvantovej mechanike na vysokej škole častica viazaná v nekonečne hlbokej potenciálovej jame. Podľa nášho názoru elementárny postup, ktorý sme uviedli v odstavci 5, odpovedá kvantovomechanickému riešeniu úlohy z odst. 2 a vlnová dĺžka je v oboch prípadoch chápaná v zmysle vzťahu (9).

Na záver ešte jednu poznámku o príprave budúcich učiteľov. Dobre pripravený učiteľ by mal poznať aj elementarizované postupy pre výklad na gymnáziu, aj príslušné príklady z vysokoškolskej kvantovej mechaniky a mal by rozumieť aj súvislosti medzi nimi. Zatiaľ sa kvantová mechanika pre budúcich učiteľov takto nevyučuje a je to na škodu veci. Zdá sa nám, že terajší absolvent kombinácie má pocit, že existuje jedna veľmi múdra a abstraktná kvantová mechanika, ktorá nemá nič spoločného s jeho budúcou prácou, a potom existuje akási trocha „pokútna" a nepríliš seriózna kvantová mechanika, ktorá pracuje pomocou rádových odhadov a kvalitatívnej argumentácie a používa sa pri vyučovaní na strednej škole. Uveďme na ilustráciu jeden príklad. V „populárnej" či „stredoškolskej" verzii kvantovej mechaniky sa odhaduje energia základného stavu harmonického oscilátora z princípu neurčitosti. Píšeme

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

rozmer vlnovej funkcie nech je L, princíp neurčitosti hovorí, že $p \sim \hbar/L$ a potom hľadáme minimum výrazu

$$E(L) = \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{L^2} + \frac{m\omega^2}{2} L^2 .$$

*) Nasledujúci argument pochádza od B. VELICKÉHO.

Domnievame sa, že len veľmi malé percento poslucháčov – budúcich učiteľov – vie, že to, čo sa tu robilo, je vlastne hľadanie energie základného stavu oscilátora pomocou variačnej metódy so skúšobnou vlnovou funkciou typu $\exp(-x^2/2L^2)$.

Je pravda, že na vyučovanie kvantovej mechaniky (ani ostatných teoretických disciplín) sme sa zatiaľ z tohto hľadiska nepozerali, ale snáď by bolo žiadúce sa naň pozrieť práve takto a vyvodiť z toho dôsledky (redukcia rozsahu a prehĺbenie častí potrebných pre vyučovanie na strednej škole).

7. Záver

Na záver zopakujeme stručne naše stanovisko. Domnievame sa, že použitie analógie medzi stacionárnymi stavmi častice v jednorozmernej nekonečne hlbokej potenciálovej jame je užitočné a legálne, pokiaľ sa pri výklade vyhneme „medzikrokom", operujúcim s určitými hodnotami hybnosti častice. Legálnosť analógie chápeme v nasledujúcom zmysle: Existuje korektný („vysokoškolský") postup, ktorý v dostatočnej miere korešponduje jednoduchému výkladu na stredoškolskej úrovni tak, že všetky kroky elementárneho výkladu sú na spomínanej vyššej úrovni zdôvodniteľné. Správny výsledok pre energetické spektrum, ku ktorému elementárny výklad dospeje, nie je teda vecou náhody, je zákonitý.

Je pravda, že si možno predstaviť i iné „vysokoškolské" postupy, riešiace tú istú fyzikálnu situáciu, napríklad postup*), v ktorom sa napred rieši konečná jama, a až vo výsledku sa robí limita $V \to \infty$. Navrhovaný elementárny výklad tomuto postupu nekorešponduje, ale to nie je na závadu. Obidva „vysokoškolské" postupy dávajú na fyzikálne relevantné otázky rovnaké odpovede, elementárny výklad však korešponduje len s jedným z týchto postupov.

Z celej diskusie vidno, že otázky elementarizácie pri vyučovaní fyziky nebývajú jednoduché, a treba sa nad nimi zamýšľať, ak nechceme, aby sme fyziku prezentovali ako „systém zaklínadiel" alebo „súbor zjavených právd". Je preto určite chybou, ak sa na otázky elementarizácie pozeráme trocha „zvrchu" ako na niečo menej významného. Tejto chyby sa budeme musieť časom zbaviť, ak chceme fyziku spraviť príťažlivou pre stredoškolákov. Sme preto radi, že sa niektorí autori s týmito otázkami zaoberajú a osobitne sme vďační A. Lacinovi za to, že začal s analýzou jednej z kľúčových otázok elementarizácie kvantovej mechaniky.

*) Takýto postup je asi najbližší argumentácii, ktorú používa A. Lacina.

Dodatok

Operátor pre časticu $\hat{p}$ v nekonečne hlbokej jame

Pokiaľ pracujeme na fyzikálne realizovateľných stavoch, operátor $\hat{p} = -i\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ je symetrický. Podmienke

$$\text{(D1)}\qquad \int \Psi^*(x)\,\hat{p}\Psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L [\hat{p}\Psi(x)]^*\,\Psi(x)\,\mathrm{d}x$$

je ekvivalentná podmienka

$$\text{(D2)}\qquad |\Psi(L)|^2 = |\Psi(0)|^2\,,$$

ktorá pre realizovateľné stavy je automaticky splnená, nakoľko pre ne

$$\text{(D3)}\qquad \Psi(L) = \Psi(0) = 0\,.$$

Na fyzikálne realizovateľných stavoch (pre ktoré platí (D3)), ale nenájdeme vlastné funkcie $\hat{p}$. Aby sme ich našli, musíme definovať vhodné symetrické rozšírenie operátora $\hat{p}$ (z priestoru fyzikálne realizovateľných stavov). Rôzne rozšírenia sú charakterizované spojite sa meniacim parametrom α a sú definované na funkciách, ktoré spĺňajú podmienku

$$\text{(D4)} \qquad \Psi(L) = e^{i\alpha}\Psi(0)\,,$$

čo zaručuje platnosť (D2). Rozšírený operátor hybnosti označme $\hat{p}_\alpha$. Tento operátor má úplný systém vlastných funkcií, ktoré spĺňajú (D4):

$$\text{(D5)} \qquad \Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(\mathrm{i} p_n^\alpha x/\hbar\right), \quad 0 < x < L,$$

pričom

$$\text{(D6)} \qquad p_n^\alpha = \frac{2\pi n\hbar}{L} + \frac{\alpha\hbar}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Už z toho, že vlastné hodnoty operátora hybnosti v rôznych rozšíreniach z fyzikálne realizovateľných na fyzikálne nerealizovateľné stavy prebiehajú rôzne množiny hodnôt vidno, že otázka o fyzikálnom význame jeho vlastných hodnôt je netriviálna. V skutočnosti sa však táto nejednoznačnosť neprejaví, lebo pri hociakom rozšírení operátora $\hat{p}$ sú príslušné vlastné funkcie fyzikálne nerealizovateľné.

Literatúra

[1] A. Lacina: PMFA *28*, č. 6 (1983) 342.
[2] J. Pišút: Matematicko-fyzikální rozhledy *59*, č. 4 (1980/81) 159.
[3] A. Beiser: *Úvod do moderní fyziky*. Academia, Praha, 1975.
[4] J. Pišút, R. Zajac: *O atómoch a kvantovaní*. ALFA, Bratislava, 1983.
[5] D. Bohm: Phys. Rev. *85* (1952) 180, menovite § 5.
[6] M. Carruthers, M. Nieto: Revs. Mod. Phys. *40* (1968) 411; preklad do ruštiny *Kogerentnyje sostojanija v kvantovoj teorii* publikovaný v zborníku Novosti fundamental'noj fiziki, Vol. 1., Mir, Moskva, 1972, preložil V. I. Maňko.
[7] G. H. Hardy, W. W. Rogosinski: *Fourierovy řady*. SNTL/ALFA, Praha, 1971, preložil A. Kufner.

ZE ŽIVOTA JČSMF

18. CELOŠTÁTNA KONFERENCIA O MATEMATIKE NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH TECHNICKÝCH, EKONOMICKÝCH A POĽNOHOSPODÁRSKYCH

Po osemnáste sa zišli matematici, väčšinou pôsobiaci na vysokých školách s inžinierskym zameraním na konferencii (27.—30. augusta 1984 v Bratislave), aby rokovali o problémoch, ktoré úzko súvisia s ich prácou. Obsahová náplň konferencií tejto série bola dosť pestrá a je aj širokej matematickej obci pomerne známa (problematika výuky matematiky, osnovy, väzby stredná škola—vysoká škola—prax a i.).

Tentoraz komisia pre matematiku na vyso-