Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ludmila Frantíková

Neuchâtelský modernizační pokus ve Švýcarsku

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 12 (1967), No. 4, 223--234

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138754

VYUČOVÁNÍ MATEMATICE A FYZICE

NEUCHÂTELSKÝ MODERNIZAČNÍ POKUS VE ŠVÝCARSKU

LUDMILA FRANTÍKOVÁ, Prešov

Neuchâtelský modernizační pokus ve Švýcarsku začal po roce 1959, kdy se konal v Royamontu seminář o otázkách modernizace vyučování matematice. Výsledkem těchto pokusů jsou dvě učebnice, a to pro větev literární a pedagogickou, jejímž autorem je André CALAME, a pro větev vědeckou, jejímž autorem je Herbert SUTER. Vydání obou těchto učebnic v konečné podobě předcházely pokusné přípravné texty, s nimiž prováděli výzkum všichni učitelé matematiky kantonálního gymnasia v Neuchâtelu se stovkami žáků po dobu čtyř let u učebnice Calamovy a pod dobu pěti let u učebnice Suterovy.

Máme k dispozici první svazky těchto učebnic a poněkud neúplné přípravné texty učebnice pro větev literárně pedagogickou. Z tohoto materiálu si můžeme utvořit představu o povaze modernizačních směrů ve Švýcarsku. Podrobně se budu zabývat učebnicí Calamovou, protože její pojetí spíše odpovídá našim potřebám a bude asi podkladem pro naše vlastní modernizační pokusy ve vyučování matematice na školách II. cyklu.

Jak již bylo řečeno, je tato učebnice první ze tří svazků určených pro poslední tři ročníky švýcarských gymnasií a škol podobného typu, které odpovídají třem ročníkům našich středních všeobecně vzdělávacích škol, pokud jde o věk žactva.

Celkový charakter učebnice, jak je uvedeno v předmluvě, je částečně experimentální a mnohdy intuitivní. Zkušenost totiž ukázala, že je vyloučeno podávat patnáctileté mládeži vyučování čistě deduktivně. Ale jakmile žák objeví přísnou axiomatickou stavbu, pak žádný z probíraných pojmů nesmí být pozměněn, poněvadž tato axiomatická výstavba je podkladem pro látku probíranou v tomto kurse.

Kniha není určena pro dogmatický výklad „ex cathedra", naopak má sloužit k samostatnému studiu žáků.

Uvedu nyní stručný přehled obsahu.

Látka je rozdělena do osmi kapitol. První kapitola, která tvoří asi 9 % učebnice, zavádí pomocí příkladů pojem množiny a jejího určení, speciálně množiny číselné. Je definována podmnožina a rovnost množin. Z operací se probírají nejen průnik a sjednocení, ale i symetrický rozdíl, což je množina komplementární k průniku vzhledem na sjednocení. Dále je definován pojem komplementárních množin a pojem množin disjunktních. Kapitola pokračuje rozdělením množiny na všechny možné neprázdné, po dvou disjunktní množiny a končí definicí a příklady kartézského součinu.

Druhá kapitola, asi stejného rozsahu jako první, zavádí binární relace v množině, a to relaci ekvivalence, kongruence, uspořádání a geometrické incidence.

Stejný rozsah jako první a druhá kapitola má i kapitola třetí, která pojednává o zobrazení obecně a pak speciálně o zobrazení na množinu, do množiny a o zobrazení vzájemně jednoznačném.

Poněkud obsáhlejší je kapitola čtvrtá, která tvoří asi 14 % textu. Pojednává o zákonech vnitřních spojení. Ze speciálních případů sčítání, odčítání, násobení a dělení se přechází na obecný zákon spojení a zkoumají se jeho vlastnosti, tj. asociativnost a komutativnost. Dále se definuje neutrální prvek e.

$$x \quad x * e = e * x = x$$

a absorbující prvek a

$$x \quad x * a = a * x = a\,.$$

Pojednává se o distributivnosti vnitřní operace vzhledem k jiné vnitřní operaci. Je definován distributivní zákon zleva a zprava a oboustranný distributivní zákon. Kapitola je zakončena pojmem homomorfního a izomorfního zobrazení množiny E s operací $*$ do množiny F s operací $\circ$.

Další, to jest pátá kapitola, je nejobsáhlejší ze všech. Tvoří plnou pětinu textu a jejím obsahem jsou grupy. Nových pojmů není mnoho. Jsou to pojmy: grupa, podgrupa, grupy cyklické, symetrické, homomorfní a izomorfní. U všech těchto pojmů se vychází z příkladů a definované pojmy jsou znovu ilustrovány novými příklady. Ke konci kapitoly je uvedeno čtrnáct tabulek pro různé typy grup. Mimo tyto základní pojmy je definována vnitřní operace v grupě.

Zatímco ostatní kapitoly učebnice zhruba odpovídají rozsahem přípravnému textu, je kapitola o grupách podstatně obsáhlejší. Zdá se to svědčit o tom, že pokusy pravděpodobně předčily očekávání autora, pokud jde o možnosti pochopení této části učiva.

V šesté kapitole, která se svým podílem 9 % textu řadí k prvním třem kapitolám, se definuje vektorový prostor, a to velmi obecně. Jako příklady jsou uvedeny nejen třída ekvivalentních orientovaných úseček, ale mimo jiné také grupa posunutí, přímý součin množiny racionálních čísel s ní samou, grupa algebraických mnohočlenů libovolného stupně. Následkem toho se v této kapitole probírají operace a lineární závislost a nezávislost nejen pro vektory, ale i pro algebraické mnohočleny, posunutí a podobně. Kapitola je zakončena definicí vektorového podprostoru.

Sedmá kapitola je opět rozsáhlejší, tvoří asi 15,5 % textu a jejím předmětem je rovinná afinní geometrie. Pozoruhodné je zde rozlišení přímky jako množiny bodů a přímky jako celku, to jest elementu dvojrozměrného prostoru, a rovněž rozlišení roviny jako množiny bodů nebo množiny přímek a konečně jako celku, to jest elementu trojrozměrného prostoru. V afinní soustavě se odvozuje parametrické a algebraické vyjádření přímky, úloha o středu úsečky, těžišti trojúhelníka a vzájemné poloze dvou přímek. V textu je definován dělicí poměr, ve cvičeních se uvádí jako nový pojem dvojpoměr, harmonická čtveřina bodů, afinní tvar Pascalovy věty a věta Menelaova. Zajímavé je seskupení některých zobrazení, např. posunutí, identity, středové souměrnosti a stejnolehlosti pod pojem dilatace. Je to zobrazení bodového pole do něho samého, v kterém vektor určený dvěma body a vektor určený obrazy těchto bodů jsou lineárně závislé. Degenerovaná dilatace je ta, která zobrazuje všechny body pole do jednoho bodu. Je ukázáno, že regulární dilatace tvoří nekomutativní grupu. Nakonec je probrán pojem obsahu, hlavně obsahu rovnoběžníka, a jeho vlastnosti. Z toho se pak odvodí některé vlastnosti determinantů druhého stupně, který se vyskytne v odvozování obsahu rovnoběžníka, vyjádříme-li určující vektory pomocí číselných složek. Jsou-li určující vektory

$$\mathbf{v}_1 = (X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2) \quad \mathbf{v}_2 = (X'\mathbf{e}_1 + Y'\mathbf{e}_2),$$

je obsah tohoto rovnoběžníka

$$s(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2) = s(X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2\,; \quad X'\mathbf{e}_1 + Y'\mathbf{e}_2)$$

a z vlastnosti obsahu plyne

$$s(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2) = XY' - X'Y = \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix}.$$

Stejného rozsahu jako sedmá kapitola je i poslední osmá. Vychází z grafů obecného zobrazení, kterými jsou nejen spojité křivky, ale i izolované body, poloroviny, úsečky apod. Přechází pak na přímou úměrnost, lineární funkci a kvadratickou funkci tvaru

$$y = ax^2$$

a dochází pomocí transformace souřadnicové soustavy k obecnému tvaru kvadratické funkce a k jejímu grafu parabole. Jsou rozebrány všechny případy polohy paraboly a osy x v souvislosti s diskriminantem.

Odtud je už jen krok ke kvadratické rovnici ve všech tvarech, ke vztahům mezi koeficienty a kořeny kvadratické rovnice a rozkladu kvadratického trojčlenu na součin dvou lineárních dvojčlenů.

O vzhledu dalších svazků si můžeme učinit představu jednak z přípravných textů, jednak z poznámky v předmluvě k prvnímu dílu učebnice.

Druhý svazek bude věnován doplňkům o kvadratických rovnicích, ale jeho podstatnou částí bude trigonometrie, rovinná geometrie metrická a afinní a metrická geometrie v trojrozměrném prostoru. Druhá důležitá partie by měla být z oboru algebry, a to rozšíření číselné množiny na čísla reálná. Autor dále ohlašuje binomické koeficienty, faktoriály a binomickou větu. Učebnice má být zakončena úvodem do axiomatických metod a studiem grup, okruhů a těles.

Třetí svazek bude věnován analýze. V přípravných textech se setkáváme s pojmem derivace a diferenciál, s průběhem funkce a derivací vektoru. Poněvadž přípravné texty, které jsou k dispozici, nejsou úplné, bude pravděpodobně zahrnut do této učebnice i počet integrální. Autor pak v předmluvě ke své učebnici uvádí, že tento třetí svazek bude ukončen některými vybranými kapitolami se stručným podáním vektorových a eukleidovských prostorů z axiomatického hlediska.

Úlohy z vyložené látky jsou velmi různorodé a jsou dvojího druhu. Jsou to jednak příklady vyřešené v textu, které tvoří podstatnou část kursu a mají být podle pokynu autora řešeny žáky, jednak cvičení, která jsou obyčejně na konci kapitoly nebo po ukončení určité partie. Cvičení je značný počet. Za kapitolami o množinách, zobrazeních a struktuře vektorového prostoru je jich přes čtyřicet, za kapitolou věnovanou afinní geometrii v rovině sedmdesát osm, za kapitolou o grupách rovných osmdesát. Cvičení jsou z velké části velmi náročná, většinou se v nich musí provádět důkazy. Jen ve velmi málo případech jde o mechanickou aplikaci teoretické látky. Řešení náročných cvičení vyžaduje nejen formální znalost učiva, ale i hluboké pochopení a samostatný úsudek. Autor sám v předmluvě doznává, že cvičení jsou často obtížnější, a doporučuje určitá z nich ke studiu ve skupinách v dalších letech studia. Někdy se žádá od žáků, aby graficky – často barevně – vyjádřili nějaký problém. Tento požadavek vyžaduje vedle zvládnutí pojmů i vytvoření správných představ a jejich správnou asociaci.

Uvedu z každé kapitoly několik příkladů.

1. Je dán trojúhelník ABC. Budiž

   E množina bodů stejně vzdálených od A a B,
   F množina bodů stejně vzdálených od B a C,
   G množina bodů stejně vzdálených od C a A.

   Které jsou prvky množin

   $E \cap F, F \cap G, G \cap E, (E \cap F) \cap G, E \cap (F \cap G)$?

   Tímto bodem je zřejmě střed kružnice opsané trojúhelníku.

2. V množině přirozených čísel označujeme $D(a)$ množinu dělitelů čísla a. Najděte $D(48), D(60), D(72), D(100)$.

   Určete

   $A = D(48) \cap D(60), B = D(60) \cap D(72)\ C = D(72) \cap D(100),$
   $F = A \cap D(72), G = D(48) \cap B.$

   Jde zde o společné dělitele.

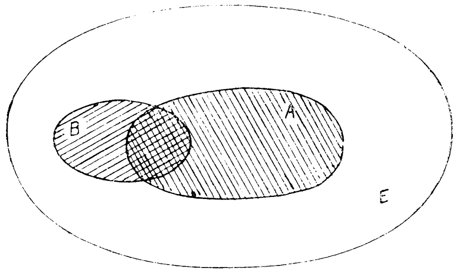
3. Určete množinu E a její tři podmnožiny A, B, C, víte-li, že

   $\complement_E(A \cup B \cup C) = \{1, 8, 12\}\quad B \cap C = \emptyset,$
   $A \cap C = \{5\}\quad A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\},$
   $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 11\},$
   $\complement_E B = \{1, 2, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}.$

Řešení: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,
$A = \{2, 3, 4, 5\}$,
$B = \{3, 4, 7, 9\}$,
$C = \{5, 6, 10, 11\}$.

4. Ukažte pomocí diagramu, že symetrický rozdíl

$$A \triangle B = \complement_{A \cup B}(A \cap B) = (A \cap \complement_E B) \cup (\complement_E A \cap B) .$$



Obr. 1.

5. V pravidelném šestiúhelníku uvažujme středové úhlopříčky a šest stran. Studujte relaci rovnoběžnosti v této množině devíti přímek a najděte třídy ekvivalence.

6. Uspořádejte množinu

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,

víte-li, že a předchází před b ve třech následujících případech:

jsou-li a a b sudá, když $a < b$,
jsou-li a a b lichá, když $a > b$,
je-li a sudé a b liché.

7. Budiž P množina konvexních mnohoúhelníků v rovině.
Každému mnohoúhelníku lze přiřadit součet
a) vnitřních úhlů,
b) vnějších úhlů.
Studujte zobrazení P do R^+. Které jsou třídy ekvivalence, které indukuje toto zobrazení?

8. Studujte následující aplikace:

$$f\colon x \mapsto |x - 1| + |x + 2| ,$$

$$g\colon x \mapsto \frac{|x|}{2} - |x - 3| ,$$

$$h\colon x \mapsto \frac{|x^2 - 1|}{2} + |x| .$$

Z příkladů ke kapitole IV. je vidět, že se předpokládá například znalost shodných zobrazení, protože je úkol skládat dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami, s různoběžnými osami, dvě posunutí, dvě rotace s týmž středem, dvě středové souměrnosti s různými středy a podobně. Při tom je dán i úkol zkoumat platnost komutativního zákona pro tato skládání.

Vedle těchto geometrických cvičení jsou cvičení typu skládání funkcí.

9. Jsou dána zobrazení

$$f\colon x \searrow\!\!\nearrow \frac{x}{x-1} \qquad g\colon x \searrow\!\!\nearrow \frac{1}{x}.$$

Má se definovat

$f * f, f * g, g * f, g * g$.

V dalším jsou cvičení, která předpokládají znalost pojmů aritmetický, geometrický a harmonický průměr. Objevují se tu i zbytkové třídy modulo n.

Jak již bylo řečeno, je nejvíc cvičení za kapitolou věnovanou grupám. Také text této kapitoly je hustě proložen příklady, protože si autor byl zřejmě jist důležitostí a nutností pochopení definice grupy a s tím spojených dalších pojmů, ale i jejich nezvyklosti a tím způsobených potíží při jejich osvojování.

V některých prvních cvičeních se má rozhodnout, proč některé množiny jsou anebo nejsou grupy. Další cvičení jsou obtížnější. Žádá se z daných grup vybírat cyklické, homomorfní a izomorfní podgrupy. Ve cvičení jsou definovány involutorní prvky a některá cvičení dávají hledat involutorní prvky různých zobrazení nebo involutorní prvky multiplikativní grupy nenulových reálných čísel.

Počáteční cvičení ke kapitole o vektorovém prostoru jsou snadná. Jde v nich o sestrojení součtu, rozdílu a násobků vektorů. Ale již v druhé polovině cvičení jsou opět příklady důkazové.

10. Dokažte, že množina

$$J = \{\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{3}\,;\quad \alpha, \beta \in Q\}$$

má všechny vlastnosti vektorového prostoru.

11. Sestrojte vektorový prostor v množině

$$L = \{\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{3} + \gamma\sqrt{5}\,;\quad \alpha, \beta, \gamma \in Q\}\,.$$

Poslední cvičení se týkají homomorfismu a izomorfismu vektorových prostorů.

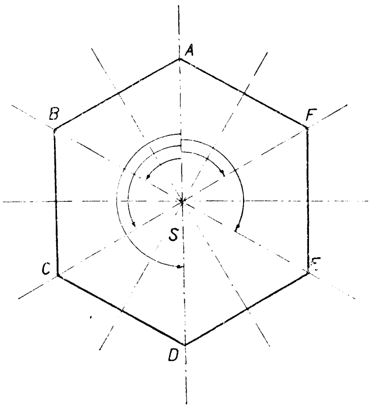
Cvičení ke kapitole o afinní rovinné geometrii jsou z počátku podobná cvičením s vektory. Ani další část cvičení není obtížná, jejich úkolem je vyjádření přímky, dvojice přímek a podobně. V druhé polovině jsou definovány a na příkladech procvičovány pojmy dvojpoměr, harmonická čtveřina bodů. Ani tyto příklady nejsou zvlášť obtížné. Výjimku tvoří snad jen afinní vyjádření věty Pascalovy a věty Menelaovy.

Příklad z lineárního programování je ukázkově zařazen sice jako cvičení, ale s podrobným návodem řešení.

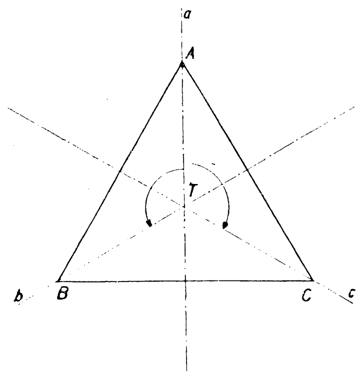
Cvičení ke kapitole osmé, jejímž předmětem jsou lineární a kvadratické funkce, jsou vesměs mechanická řešení poměrně jednoduchých kvadratických rovnic.

Tato jednoduchost je společný rys všech cvičení, jež se řeší mechanickým způsobem výpočtu na základě vět a vzorců. Ani v textu, tím méně pak ve cvičeních se nevyskytují složité algebraické výrazy, ani uměle komplikované rovnice, jaké můžeme najít v našich učebnicích. Složené zlomky například jsou v celé učebnici dva, a to ještě v průběhu řešení, nikoli v zadání.

Také cvičení, kterým se v našich učebnicích říká slovní úlohy, se v učebnici nevyskytují. Za jediné dvě výjimky by se dalo počítat zmíněné již cvičení z lineárního programování a cvičení z relací, v němž se má podle šesti daných podmínek přiřadit třem osobám po dvou ze šesti určených povolání.



Obr. 2.



Obr. 3.

Zajímavá je okolnost, že se některý příklad vyskytne jak v textu, tak ve cvičeních při různých příležitostech. Uvedu jeden geometrický a jeden aritmetický příklad.

Grupou rovnostranného trojúhelníka se rozumí grupa zobrazení, která daný trojúhelník reprodukují. Jsou to zřejmě tři osové souměrnosti podle výšek trojúhelníka a tři rotace se středem v těžišti o úhly 0°, 120° a −120°. Nejprve se ukazuje, že tato zobrazení jsou vzájemně jednoznačná. V kapitole o zákonech vnitřních spojení se ukazuje, že identické zobrazení, to jest rotace se středem v těžišti o úhel 0°, je neutrální prvek skládání zobrazení a že ke každému zobrazení existuje zobrazení inverzní. Zjišťuje se, že osová souměrnost mění orientaci trojúhelníka, kdežto rotace ji zachovává. Sestavuje se tabulka skládání těchto zobrazení a zjišťuje se, že toto skládání je vnitřní operace v množině šesti uvedených zobrazení. V kapitole o grupách se používá tohoto příkladu pro definici grupy a ukazuje se, že je to nekomutativní grupa 6. řádu.

V odstavci o podgrupách se uvádí množina šesti osových souměrností a šesti rotací, které reprodukují pravidelný šestiúhelník. Uvažuje se podgrupa rotací šestiúhelníka a podgrupa pravidelného trojúhelníka, jejichž průnikem je grupa otáčení rovnostranného trojúhelníka.

Ve cvičeních jsou zadávány obdobné příklady, v nichž se uvažuje grupa pravidelného čtyřstěnu, grupa krychle a podobně.

Jako ukázku aritmetického příkladu uvedu zbytkové třídy modulo n. S kongruencí se setkáváme již v kapitole o binárních relacích, kde se ukazuje, že kongruence (mod 5) je relací ekvivalence, tj. že je reflexívní, symetrická a tranzitivní. V kapitole o zobrazeních je zbytková třída (mod 5) příkladem zobrazení množiny celých čísel na množinu

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} .$$

V kapitole o zákonech vnitřních spojení je definováno sčítání a násobení v množině zbytkových tříd (mod 5) a jsou uvedeny tabulky

$+$	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_0	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_0
C_2	C_2	C_3	C_4	C_0	C_1
C_3	C_3	C_4	C_0	C_1	C_2
C_4	C_4	C_0	C_1	C_2	C_3

$\bullet$	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_0	C_0	C_0	C_0	C_0	C_0
C_1	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_2	C_0	C_2	C_4	C_1	C_3
C_3	C_0	C_2	C_1	C_4	C_2
C_4	C_0	C_4	C_3	C_2	C_1

Při tom se uvádí, že C_0 je neutrální prvek sčítání a absorbující prvek násobení. V kapitole o grupách se ukazuje, že zbytkové třídy (mod n) tvoří komutativní aditivní grupu. Inverzní prvky jsou konkrétně uvedeny pro zbytkové třídy (mod 5). Dále jsou aditivní grupy zbytkových tříd (mod n) ukázkou cyklických grup s vytvářejícím prvkem C_1, ale hned se dovozuje, že vytvářejícím prvkem může být i jiný prvek. Stačí, aby jeho index byl nesoudělitelný s modulem n.

Pro stručnost uvedu příklad pro vytvářející prvek C_3 pro $n = 4$.

$$\begin{aligned} &C_3 = C_3 , \\ &C_3 + C_3 = C_2 , \\ &C_3 + C_3 + C_3 = C_1 , \\ &C_3 + C_3 + C_3 + C_3 = C_0 , \end{aligned}$$

V učebnici je uveden příklad s C_3 pro $n = 8$.

Z právě uvedeného je zřejmé, že aritmetika, algebra a geometrie nejsou v učebnici Calamově odděleny do samostatných partií. S výjimkou kapitoly o afinní rovinné geometrii, která má výlučně geometrický charakter, střídají se aritmetické a geometrické příklady ke všem teoretickým problémům.

Tak se při rovnosti množin E a F zkoumá jednak případ

$$E = \{x; x = 3y - 1; y \in N\} \quad F = \{x; x = 3y + 2; y \in N\},$$

jednak případ E = množina čtyřúhelníků se dvěma osami souměrnosti,
F = množina pravoúhelníků.

Sjednocení, průnik a symetrický rozdíl se sestrojuje jak pro množiny číselné, například pro množiny násobků daných čísel

$$A = M(4) \cap M(6) \quad B = M(6) \cap M(12) \quad C = M(12) \cap M(25),$$

tak pro množiny bodové, například již uvedený průnik množin bodů stejně vzdálených od vrcholů trojúhelníka.

Relace se zkoumají opět jednak mezi čísly, například relace dělitelnosti, jednak mezi geometrickými prvky, například relace rovnoběžnosti nebo incidence.

Také zobrazení se zkoumá jednak mezi elementy algebraickými, například

$$x \searrow\!\!\nearrow -\frac{1}{x}; \quad x \searrow\!\!\nearrow |x - 1| + |x + 2|,$$

jednak mezi elementy geometrickými, například pravoúhlé promítání bodů kružnice na libovolnou její tětivu.

Z těchto ukázek a z toho, co již bylo řečeno, získáváme dostatečnou představu o této stránce učebnice.

Až potud jsme se zabývali obsahovou stránkou učebnice. Myslím, že je třeba si všimnout i její vnější stránky. Již v předešlém bylo použito několika symbolů. V učebnici se jich používá přes padesát. Symbolika je velmi rozvinutá, i když za každým symbolickým zápisem je jeho slovní vyjádření. Opět několik příkladů:

Budiž množina E opatřená vnitřní operací $*$ a množina F opatřena vnitřní operací $\circ$. Zobrazení množiny E do množiny F je homomorfismus, jestliže obraz spojení dvou libovolných prvků množiny E se rovná spojení obrazů těchto prvků v množině F.

Zápis:

f je homomorfismus $\forall x_1 \; \forall x_2 \qquad f(x_1 * x_2) = f(x_1) \circ f(x_2)$.

Definice neutrálního a absorbujícího prvku:

$\exists\, a$ takové, že $\forall b \; a * b = b * a = b \Leftrightarrow a$ je neutrální prvek,
$\exists\, b$ takové, že $\forall a \; a * b = b * a = a \Leftrightarrow b$ je absorbující prvek,

Označením se rozlišují i různá pojetí přímky a roviny. $\mathscr{D}$ je přímá řada bodová, d je nositelka této řady, tedy přímka jako celek nebo element roviny. $\dot{\pi}$ je bodové pole, $\bar{\pi}$ je přímkové pole, π je rovina jako celistvý prvek trojrozměrného prostoru.

Někdy se zdá symbolika až přehnaná, když je třeba zapsána podmínka

$$x \in \mathsf{C}_R 0,$$

což se může přehledněji zapsat $x \in R$, $x \neq 0$.

Symboly jsou přehledně i s vysvětlením významu sestaveny v tabulce na začátku učebnice.

V učebnici je na osmdesát černobílých obrázků, které jsou velmi přesně narýsovány a bezvadně reprodukovány. Jejich charakter je výhradně matematický. Sjednocení, průnik, symetrický rozdíl a jejich vztahy jsou znázorněny dvanácti tabulkami, z nichž některé jsou až tříbarevné. Barevné čáry se přesně kryjí s čarami, které zdůrazňují.

Učebnice je vytištěna bezvadným tiskem na křídovém papíře. Symbolické zápisy vět a definic jsou světle modře podloženy.

V dalším se podává jen velmi stručně přehled učebnice Suterovy určené pro vědeckou větev. Ta je na rozdíl od učebnice Calamovy rozdělena na část algebraickou s 87 stránkami a na část geometrickou se 165 stránkami.

Algebraická část vychází z pojmu množiny a definuje množinové operace podobně jako u učebnice Calamovy. Ve shodě s touto učebnicí pokračuje relacemi a zobrazeními. Pak však opouští postup učebnice Calamovy a obrací se k rozšiřování číselných oborů. Vychází z množiny přirozených čísel, kterou rozšíří o nulu, a definuje sčítání, odčítání a násobení v této množině. Relativní čísla se zavádějí jako relace ekvivalence v kartézském součinu

$$(N \cup O) \times (N \cup O)\,.$$

Definuje se dále sčítání, násobení a k nim inverzní operace odčítání a dělení. Čísla racionální se definují jako relace ekvivalence v kartézském součinu

$$Z \times \complement_z\{O\}\,.$$

Tato partie končí definicí grupy, okruhu a tělesa, k nimž jsou uvedeny příklady. Kapitola o reálných číslech pozůstává z důkazu, že rovnice $x^2 = 2$ nemá racionální kořen a že tedy těleso racionálních čísel není úplné. Doplňuje se, jak autor sám uvádí, naivním způsobem, jen o iracionální čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, žákům známá. Čísla komplexní jsou zavedena opět jako relace ekvivalence v kartézském součinu $R \times R$, definuje se rovnost, početní výkony, zavádí se imaginární jednotka i a tvar $a + b$i komplexního čísla.

Předmětem osmé a deváté kapitoly jsou algebraické mnohočleny nad množinou reálných čísel a operace s nimi. Při dělení se používá Hornerova schématu. Definují se nulové body mnohočlenu a uvádějí se pod názvem Viétova formule symetrické funkce kořenů.

Poslední tři části algebraické partie pojednávají na pouhých čtrnácti stránkách o rovnostech, identitách a rovnicích, nerovnostech a nerovnicích. Řeší se kvadratická rovnice a nerovnice, rovnice s kvadratickými rezolventami jako bikvadratické, reciproké a iracionální.

Geometrická část začíná množinou vektorů v rovině jako ukázkou vektorového prostoru, definuje operace a pokračuje afinní analytickou geometrií v rovině a v trojrozměrném prostoru a metrickou geometrií v rovině. Tyto partie jsou hodně obsáhlé. Používá se principu duality.

Pátá a šestá kapitola je věnována zobecnění pojmů oblouků a úhlů. Pomocí jednotkové kružnice se definují goniometrické funkce a odvozují vztahy mezi nimi.

Obsah sedmé kapitoly tvoří geometrické aplikace vlastností komplexních čísel. Vyvozuje se goniometrický tvar komplexního čísla, poučka Moivrova. Jako geometrické znázornění operací s komplexními čísly se definuje posunutí, otáčení, stejnolehlost a kruhová inverze.

Předposlední, to jest osmá kapitola se opět vrací k analytické geometrii. Jejím obsahem je metrická geometrie v trojrozměrném prostoru. V odstavci o smíšeném součinu tří vektorů jsou probrány stručně vlastnosti determinantů třetího stupně a později jejich použití při řešení soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých. Poznamenává se, že toto Cramerovo pravidlo se dá použít nejen při řešení soustav tří rovnic o třech neznámých, ale že se dá zevšeobecnit pro případ n rovnic o n neznámých.

V poslední kapitole se doplňuje trigonometrie o větu kosinovou, sinovou a tangentovou, odvozuje se trigonometrický vzorec pro obsah trojúhelníka, vzorec pro obsah trojúhelníka pomocí poloměru vepsané kružnice a Heronův vzorec. Poslední dvě stránky jsou věnovány základům sférické trigonometrie. Definuje se sférický trojúhelník a odvozuje se věta sinová a kosinová pro strany a úhly sférického trojúhelníka.

Druhý díl má obsahovat úvodní kapitolu o metodách axiomatické vědy, tři kapitoly s deduktivním výkladem některých algebraických struktur, šest kapitol z afinní, projektivní a metrické geometrie a osm kapitol o analýze.

Třetí svazek bude věnován lineární algebře a analýze.

Obsahem závěrečného svazku pro žáky všech větví má být statistika a užitá matematika.

Je samozřejmé, že při studiu obou švýcarských učebnic čtenář mimovolně a někdy i úmyslně porovnává jejich obsah s obsahem našich učebnic pro SVVŠ. Švýcarské učebnice jsou založeny na pojmu množiny. V Calamově učebnici se tomuto pojmu věnuje přibližně 10 % textu, v naší učebnici pro II. ročník SVVŠ zaujímá teorie množin dvě stránky teorie a jednu stránku cvičení.

Zobrazení, které má v Calamově učebnici rozsah 17 stran a v Suterově 10 stran, má v našich učebnicích vymezeny opět dvě strany teorie a jednu cvičení.

Grupa se v našich učebnicích vůbec nevyskytuje.

Také ostatní pojmy jako relace, zákony spojení jsou mnohem obecněji definovány, také obecně se zkoumá jejich asociativnost a komutativnost, hledají se neutrální a absorbující prvky, a to opět na příkladech algebraických, např.

$$x * y \Rightarrow (x - 2y)(x + y) = 3x^2 ,$$

i geometrických, např. skládání středové a osové souměrnosti a jiných dvojic zobrazení.

S vektorem se setkáváme nejprve v kapitole o grupách, kde se dokazuje, že třídy ekvivalentních orientovaných úseček tvoří komutativní aditivní grupu, z čehož se vektor definuje jako třída ekvivalentních orientovaných úseček. Ale již v šesté kapitole se definuje obecně vektorový prostor jako komutativní grupa opatřená vnější operací, jejíž množina operátorů je množina racionálních nebo reálných čísel, a říká se, že prvky vektorového prostoru nazýváme obecně vektory, i když tyto prvky nejsou geometrického charakteru.

Při tom ohlašuje autor ve třetím svazku ještě obecněji definovaný vektorový prostor s jinými množinami operátorů.

Jak již bylo dříve řečeno, nevyskytují se ve švýcarských učebnicích slovní úlohy řešené např. pomocí rovnic, ale ani konstruktivní příklady např. na použití geometrických míst bodů nebo některých zobrazení jako stejnolehlosti nebo osové souměrnosti.

Jak je vidět z příkladů a cvičení použitých v učebnici, předpokládá se zřejmě dokonalá znalost elementární geometrie, dobrá početní technika, dovednost při řešení lineárních rovnic a nerovností. Ve cvičeních se vyskytuje např. úkol z daných podmínek pro přirozená čísla a, b, c, d, e

$$a + b = c \quad a + e = b + d \quad c - 10 = e + 10 = d \quad e = a + 20\,;$$

nejprve je nutno tato čísla uspořádat a pak vypočítat.

Je zřejmé, že takové pojetí matematického vyučování klade značné požadavky na žáky nejen po stránce vědomostí a dovedností, ale také pokud jde o připravenost a vyspělost jejich schopnosti abstrakční a generalizační. Klade však také velké požadavky na učitele, kteří byli dlouhou dobu zvyklí učit tradičním způsobem a pro něž nové pojetí znamená nejen studium nových metod, ale jistě v mnohých případech i studium samé látky. K zvládnutí těchto úkolů bude třeba vynaložit mnoho úsilí. Protože však jeho výsledkem bude zvýšená úroveň matematického vzdělání žáků našich SVVŠ, nebude jistě žádný skutečný učitel matematiky litovat práce vynaložené na tomto úseku.

Číslicový počítač na palubě civilního letadla

se vyplatí zejména proto, že vzhledem k přesnější navigaci, volbě optimálního kursu a optimální dráhy stoupání ušetří pohonné látky. Vhodný mikrominiaturní počítač váží méně než 15 kg a má objem menší než 15 dm^3. U dálkového tryskového dopravního letadla Boeing 707 je spotřeba ve výši 1000 m asi 8100 kg/hod., v cestovní výšce kolem 10 km asi 6000 kg/hod.; úspora při jednom mezikontinentálním letu snadno dosáhne 1000 kg paliva.

Sk

Není snadné dělat televizní reportáž

o příletu kosmonautů, zejména když přistanou na moři, odkud je přímý přenos obrazu pro velkou vzdálenost vyloučen. Americký reportér na letadlové lodi řešil zpravodajství o přistání Conrada a Coopera tak, že fotoaparátem Polaroid-Land zhotovil 29 nepohyblivých snímků, během 20 s z nich měl použitelné obrázky, které pak na pevninu přenesl systém Videx, podobný tomu, který přenášel na zem snímky Měsíce ze sondy Mariner.

Sk