Karel Mišoň; Zdeněk Pírko

Hmotová optimalizace složených raket [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 13 (1968), No. 4, 225--237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138700`

HMOTOVÁ OPTIMALIZACE SLOŽENÝCH RAKET*)

KAREL MIŠOŇ, ZDENĚK PÍRKO, Praha

14. SPECIALIZACE $U_i =$ idem; $q_i =$ idem

Zostříme-li ještě dále specializaci předchozího odstavce požadavkem $q_i =$ idem, zůstává

$$P = M/Z = ((q - 1)/(q \exp(-V_n/(nU)) - 1))^n \tag{14,1}$$

ve shodě s dřívějším výsledkem (10,1).

15. M-OPTIMALIZACE n-STUPŇOVÉ RAKETY; $\Lambda = 1/P =$ extrém

Minimum P nastává s maximem $1/P = \Lambda$, takže úlohu M-optimalizace lze také řešit soustavou

$$F(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 1/P + \Phi(V_n - \text{konst}), \quad \partial F/\partial r_i = 0 \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \, ,$$

kde P a V_n jsou dány týmiž rovnicemi jako v odstavci 12.

V dřívějším odstavci 4 jsme zavedli parametry $\bar{\sigma}_{1,2}$ pro dvoustupňovou raketu. Rozšiřme jejich zavedení na raketu n-stupňovou

$$\bar{\sigma}_i = S_i/M_i \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (\sigma_i < 1) \, . \tag{15,1}$$

Souvislost s parametry 1. druhu je tedy dána rovnicemi**)

$$\bar{\sigma}_i = \varepsilon_i(1 - \lambda_i) = \xi_i \varepsilon_i/(1 - \varepsilon_i) \, , \quad \text{tj.} \quad \bar{\sigma}_i = 1 - \lambda_i - \xi_i \, . \tag{15,2}$$

Máme pak

$$1/P = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \prod_{i=1}^{n} (1 - \bar{\sigma}_i - \xi_i) \, ,$$

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln r_i = - \sum_{i=1}^{n} U_i \ln (1 - \xi_i)$$

a (při předem daných V_n, $\bar{\sigma}_i$, U_i; $i = 1, 2, \ldots, n$) jako podmínky extrému vypočteme

$$\partial F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)/\partial \xi_i = -(1/P \, . \, 1/(1 - \bar{\sigma}_i - \xi_i) - \Phi U_i/(1 - \xi_i)) = 0$$

*) Dokončení z 2. č.

**) Srv. tabulku v Pokrocích MFA 9 (1964), 237.

a dále podmínky vedoucí k M-optimalizaci

$$(1 - \xi_i)/(1 - \xi_1) = U_i/U_1 \,.\, (1 - \bar{\sigma}_i - \xi_i)/(1 - \bar{\sigma}_1 - \xi_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - \xi_i = (1 - \xi_1)\, \bar{\sigma}_i U_i/(\bar{\sigma}_1 U_1 + (1 - \xi_i)(U_i - U_1)) \,; \quad i = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Na rozdíl od předchozích případů, v nichž jsme vyjadřovali optimální parametry daty posledního stupně, používáme nyní vyjádření daty stupně prvního.

V podmínkách optima tedy platí

$$P = M/Z = (\prod_{i=1}^{n} (1 - \bar{\sigma}_i - \xi_i))^{-1} =$$
$$= ((1 - \bar{\sigma}_1 - \xi_1)\, U_1)^{-n} \prod_{i=1}^{n} (\bar{\sigma}_1 U_1 + (1 - \xi_i)(U_i - U_1))/\bar{\sigma}_i \,,$$

kde ξ_1 je dáno transcendentní rovnicí

$$\sum_{i=1}^{n} U_i \ln ((1 - \xi_1)\, \bar{\sigma}_i U_i/(\bar{\sigma}_1 U_1 + (1 - \xi_1)/(U_i - U_1))) + V_n = 0 \,.$$

K jejímu řešení lze použít grafické metody, která je pozměněním postupu uvedeného v odstavci 2. Proto rovnici poněkud upravíme. Užijeme-li z (2) plynoucí

$$1 - \xi_1 = \bar{\sigma}_1 + \lambda_1 \,,$$

dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} U_i \ln ((1 + \lambda_1/\bar{\sigma}_1)\, \bar{\sigma}_i U_i) - \sum_{i=1}^{n} U_i \ln ((U_1 + (1 + \lambda_1/\bar{\sigma}_1)(U_i - U_1)) + V_n = 0$$

a dále

$$-V_n - \sum_{i=1}^{n} U_i \ln \bar{\sigma}_i = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln (1 + \lambda_1/\bar{\sigma}_1) - \sum_{i=1}^{n} U_i \ln (U_1/U_2 +$$
$$+ (1 + \lambda_1/\bar{\sigma}_1)(1 - U_1/U_i)) \,.$$

Zavedeme-li

$$\left.\begin{aligned} y &= -V_n/U_1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \ln \bar{\sigma}_i \,, \\ x &= \lambda_1/\bar{\sigma}_1 \,, \\ \mu_i &= U_i/U_1 \,, \end{aligned}\right\} \tag{15,3}$$

nabude rovnice konečného tvaru

$$y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \ln (1 + x) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \ln (1 + (1 - 1/\mu_i)\, x) \,. \tag{15,4}$$

Pro $n = 2$ se výsledek zjednodušuje na

$$y = \ln (1 + x) + \mu_2 \ln (1 + x) - \mu_2 \ln (1 + (1 - 1/\mu_2)\, x) \,, \tag{15,5}$$

což připomíná dřívější vztah (2,6).

Užívání grafické metody, která pro závislost (4) byla v odstavci 2 ještě poměrně jednoduchá, je s rostoucím počtem stupňů pracnější. Např. pro $n = 3$ plyne z (4)

$$y = (1 + \mu_2 + \mu_3) \ln (1 + x) - \mu_2 \ln (1 + (1 - 1/\mu_2)\, x) - \mu_3 \ln (1 + \\ + (1 - 1/\mu_3)\, x)\,.$$

Pro známou hodnotu $\mu_2 = U_2/U_1$ sestrojíme závislost $y \equiv y(x)$ pro různé hodnoty μ_3; numerický výpočet pak vedeme stejným postupem jako u dvojstupňové rakety.

Poznámka.

Fyzikální podstata podobnosti rovnic (2,6) a (15,5), na kterou jsme upozornili v hlavním textu, je nasnadě:

Specializujeme-li vazby (2,1), které vedly k odvození (2,6) požadavkem (4,1) $\sigma_{i1} = 0$ a identifikujeme-li $\sigma_{i2} \equiv \bar{\sigma}_i$; $i = 1, 2$, přejdou (2,1) ve (15,1), tj. ve vazby, jež vedly k výsledku (15,5). Pak ovšem úprava (4,1) provedená v (2,5), (2,6) musí odpovídat případu $n = 2$ v (15,3), (15,5). Srovnáním příslušných vztahů je tento závěr potvrzen.

16. CHARAKTERISTICKÁ VLASTNOST M-OPTIMALIZACE

Úloha M-optimalizace vedla ve zvláštním případě, kdy analyzovaná raketa byla q-idemparametrová (tj. též ε-idemparametrová) s týmiž výtokovými rychlostmi ve všech stupních U_i = idem, na p-idemparametrovou (λ-idemparametrovou) a tím i na ekviparametrovou raketu. Tato okolnost je pro M-optimalizaci charakteristická.

17. ZMĚNA OPTIMÁLNÍHO P ZE ZMĚNY JEDNOHO λ_i

Závěry předchozích úvah dávají přirozený podnět k této myšlence:

Sledujeme znova úlohu o extrému P, jehož činitelé $p_i = 1/\lambda_i$ = idem. Porušme podmínku optima změnou jednoho jediného optimálního λ na hodnotu $\lambda + \delta$, kde z definice λ plynoucí omezení $\lambda \in (0, 1)$ dává

$$\delta \in (-\lambda, 1 - \lambda)\,.$$

Místo optimálního $P = 1/\lambda^n$ nastoupí po této změně

$$P = \lambda^{1-n}/(\lambda + \delta)\,.$$

Pátráme-li po extrému funkce $P \equiv P(\delta)$ při vazbě dané numerickým předpisem charakteristické rychlosti V_n = konst a při předepsaných ε_i = idem a stejných výtokových rychlostech U_i = idem ve všech stupních, dostaneme patrně podmínku

$$\delta = 0\,. \tag{17,1}$$

Skutečně:

Při dané hodnotě

$$V_n = U \sum_{i=1}^{n} \ln r_i = -U \ln \prod_{i=1}^{n} (\varepsilon_i + (1 - \varepsilon_i)\,\lambda_i) =$$
$$= -U \ln ((\varepsilon + (1 - \varepsilon)\,\lambda)^{n-1}(\varepsilon + (1 - \varepsilon)\,(\lambda + \delta))) =$$
$$= -U \ln ((\lambda + \varepsilon(1 - \lambda))^{n-1}(\lambda + \varepsilon(1 - \lambda) + (1 - \varepsilon)\,\delta))$$

lze psát vazbu vztahem

$$(\lambda + \varepsilon(1 - \lambda))^{n-1}(\lambda + \varepsilon(1 - \lambda) + (1 - \varepsilon)\,\delta = \text{konst}\,. \tag{17,2}$$

K tomu podmínka extrému

$$\partial P/\partial\delta = \partial P/\partial\lambda\, \mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\delta + \partial P/\partial\delta =$$
$$= ((1 - n)\,\lambda^{n-1}/(\lambda + \delta) - \lambda^{1-n}/(\lambda + \delta)^2)\,\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\delta - \lambda^{1-n}/(\lambda + \delta)^2 = 0 \tag{17,3}$$

dává

$$\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\delta = \lambda/((1 - n)\,\delta - n\lambda)\,. \tag{17,4}$$

Hodnota této derivace je vázána závislostí (2), která poskytuje

$$(1 - \varepsilon)\,(\lambda + \varepsilon(1 - \lambda))^{n-2}((n - 1)\,(\lambda + \varepsilon(1 - \lambda) + (1 - \varepsilon)\,\delta)\,\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\delta +$$
$$+ (\lambda + \varepsilon(1 - \lambda))\,(1 + \mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\delta)) = 0\,,$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\delta} = -\frac{\lambda + \varepsilon(1 - \lambda)}{(n - 1)\,(\lambda + \varepsilon(1 - \lambda) + (1 - \varepsilon)\delta) + \lambda + \varepsilon(1 - \lambda)}\,. \tag{17,5}$$

Srovnáním obou hodnot (4) (5) dostaneme po krátké úpravě $(1 - n)\,\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ pro všecka $n > 1$, jak jsme v (1) předpokládali. Podmínka $\delta = 0$ vede zřejmě k minimu P; optimální raketa je nutně λ-idemparametrová, a tedy dokonce ekviparametrová (srv. předchozí odstavec).

Pro praxi má patrně jistý význam zjištění odchylky od optimálního P vyvolané individuálními odchylkami parametrů λ_i od teoretického požadavku λ_i = idem. Přihlédneme k případu, kdy se odchyluje jediné λ. Z (3) pak plyne

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}\delta = -\lambda^{-n}(\lambda/(\lambda + \delta)^2)\,((n\lambda + (n - 1)\,\delta)/\lambda\,.\,\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\delta + 1)\,.^{*})$$

Pro optimální ekviparametrovou n-stupňovou raketu je $P = \lambda^{-n}$; proto píšeme

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}\delta \approx -P\lambda/(\lambda + \delta)^2\,((n\lambda + (n - 1)\,\delta)/\lambda\, \mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\delta + 1)\,.$$

*) V podmínce optima je podle (4) třetí činitel roven nule.

Zanedbáme-li pro dostatečně malá $|\delta|$ $(1 - n)\,\delta$ vedle $n\lambda$, redukuje se (4) v aproximaci

$$\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\delta \approx -1/n$$

a máme

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}\delta \approx P\lambda/(\lambda + \delta)^2\,((n\lambda + (n - 1)\,\delta)/(n\lambda) - 1) =$$
$$= P(n - 1)/n\,.\,\delta/(\lambda + \delta)^2\,.$$

Interpretujeme-li $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\delta$ jako změnu P vyvolanou vzrůstem λ na $\lambda + \delta$, tj.

$$\Delta P/\delta = \mathrm{d}P/\mathrm{d}\delta\,,$$

dospíváme k této aproximaci relativní změny optimálního P n-stupňové rakety vyvolané malou aditivní změnou jediného λ o δ:

$$(\Delta P/P)_n = \delta/P\;\mathrm{d}P/\mathrm{d}\delta \approx (n - 1)/n\,((\delta/\lambda)/(1 + \delta/\lambda))^2\,.$$

Přechodem od n k $n + 1$ získáme

$$(\Delta P/P)_{n+1} = n/(n + 1)\,((\delta/\lambda)/(1 + \delta/\lambda))^2\,,$$

a tedy

$$(\Delta P/P)_n : (\Delta P/P)_{n+1} = 1 - 1/n^2\,.$$

Shledáváme:

Relativní změna optimálního P vyvolaná malou změnou jednoho parametru λ s rostoucím n klesá. To je názorově zřejmé.

18. LINEÁRNÍ VAZBY MEZI CHARAKTERISTIKAMI A PARAMETRY; WILLIAMSOVY KOEFICIENTY

Úlohu M-optimalizace složené rakety lze formulovat a řešit v pestřejším výběru vazeb mezi hmotovými charakteristikami, než k jakým jsme dosud přihlédli (srv. součinitele σ_{ij} odst. 2, $\bar{\sigma}_i$ odst. 4 a α_i, β_i odst. 7). Zvláště lze také uvažovat vazby mezi parametry stupňů, popř. subraket.

Praxe ukazuje možnost závislosti mezi užitečným a energetickým parametrem prvého druhu (řeckým) i-té subrakety a ukazuje, že vystačíme s lineárním zákonem

$$\lambda_i = \mu_i - \nu_i\xi_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

kde μ_i, ν_i jsou jisté bezrozměrné konstanty (WILLIAMSOVY koeficienty). Poněvadž $\lambda_i = Z_i/M_i$; $\xi_i = E_i/M_i$, je touto rovnicí mezi parametry vyjádřen i jistý vztah mezi hmotovými charakteristikami E_i, Z_i, M_i na i-té subraketě.

$$Z_i = \mu_i M_i - \nu_i E_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{18,1}$$

Ukážeme souvislost učiněného předpokladu s koeficienty zavedenými dříve: Poněvadž

$$M_i = Z_i + S_i + E_i\,,$$

máme s COLEMANOVÝMI součiniteli odst. (7) $S_i = \alpha_i E_i + \beta_i$ a s právě zavedenými WILLIAMSOVÝMI koeficienty μ_i, ν_i lineární vztah mezi M_i, E_i:

$$M_i = \gamma_i E_i + \delta_i\,; \quad \gamma_i = (1 - \nu_i + \alpha_i)/(1 - \mu_i)\,, \quad \delta_i = \beta_i/(1 - \mu_i)\,.$$

S GOLDSMITHOVOU závislostí (2,1)

$$S_i = \sigma_{i1} E_i + \sigma_{i2} M_i \Rightarrow M_i = S_i/\sigma_{i2} - E_i \sigma_{i1}/\sigma_{i2}$$

a s uvedeným WILLIAMSOVÝM předpokladem (1)

$$M_i = Z_i/\mu_i + E_i \nu_i/\mu_i$$

získáváme lineární vztah mezi charakteristikami S_i, E_i, Z_i:

$$S_i = \varrho_{i1} E_i + \varrho_{i2} Z_i\,; \quad \varrho_{i1} = (\nu_{i1}/\mu_i + \sigma_{i1}/\sigma_{i2})\,\sigma_{12}\,; \quad \varrho_{i2} = \sigma_{i2}/\mu_i\,.$$

19. M-OPTIMALIZACE SLOŽENÉ RAKETY; $\lambda_i = \mu_i - \nu_i \xi_i$

V předchozím odstavci uvedená závislost $\lambda_i = \mu_i - \nu_i \xi_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$ klade pro M-optimalizaci požadavek

$$P = \prod_{i=1}^{n} 1/(\mu_i - \nu_i \xi_i) = \text{extrém} \tag{19,1}$$

při vazbě

$$V_n = -\sum_{i=1}^{n} U_i \ln(1 - \xi_i) = \text{konst}\,.$$

Nutné podmínky lokálního extrému

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = P + \Phi(V_n - \text{konst})\,, \quad \partial F/\partial \xi_i = 0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

poskytují

$$\partial F/\partial \xi_i = \nu_i/(\mu_i - \nu_i \xi_i) \prod_{j=1}^{n} 1/(\mu_j - \nu_j \xi_j) + \Phi U_i/(1 - \xi_i) = 0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dělením rovnic odpovídajících subraketám $i = i$, $i = n$

$$\nu_i/(\mu_i - \nu_i \xi_i) \prod_{j=1}^{n} 1/(\mu_j - \nu_j \xi_j) = -\Phi U_i/(1 - \xi_i)\,,$$

$$\nu_n/(\mu_n - \nu_n \xi_n) \prod_{j=1}^{n} 1/(\mu_j - \nu_j \xi_j) = -\Phi U_n/(1 - \xi_n)$$

získáme

$$v_i/v_n(\mu_n - v_n\xi_n)/(\mu_i - v_i\xi_i) = U_i/U_n(1 - \xi_n)/(1 - \xi_i) .$$

Pro CIOLKOVSKÉHO čísla odtud

$$r_i = 1/(1 - \xi_i) = U_n/U_i\, r_n(\xi_n - \mu_n/v_n)/(\xi_i - \mu_i/v_i)$$

a po krátké úpravě

$$r_i = r_n(1/r_n + U_n/U_i(1 - 1/r_n - \mu_n/r_n))/(1 - \mu_i/v_i) ; \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

CIOLKOVSKÉHO číslo r_n poslední subrakety je zřejmě určeno transcendentní rezolventou

$$V_n - \sum_{i=1}^{n} U_i \ln (r_n(1/r_n + U_n/U_i(1 - 1/r_n - \mu_n/r_n))/(1 - \mu_i/v_i)) = 0 . \qquad (19,2)$$

Poznámka.

V alternativním pojetí lze místo minimalizace (1) uvažovat maximalizaci

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - v_i\xi_i) = \text{extrém} .$$

20. SPECIALIZACE U_i = idem

V případě společné hodnoty výtokových rychlostí U_i ve všech stupních $U_i = U$ se výsledky předchozího odstavce zjednodušují na

$$r_i = r_n(1 - \mu_n/v_n)/(1 - \mu_i/v_i) ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

a rezolventa (19,2)

$$V_n/U - \sum_{i=1}^{n} \ln (r_n(1 - \mu_n/r_n)/(1 - \mu_i/r_i) = 0$$

dovoluje explicitní vyjádření

$$r_n = (\exp (V_n/(nU)))/(1 - \mu_n/v_n) \prod_{i=1}^{n} (1 - \mu_i/v_i) .$$

21. OPTIMÁLNOST IDEMPARAMETROVÝCH RAKET

Případ optimálních idemparametrových raket se objevil v předchozích úvahách jako specializace obecnějších případů a byl při této příležitosti — alespoň principiálně — sledován. Praktický význam idemparametrové rakety vede k několika doplňujícím poznámkám, jimž jsou věnovány dva příští odstavce.*)

*) Srv. také odstavce 11, 12 a 13 dřívějšího článku: Pokroky MFA *12* (1967), 341.

Hledejme M-optimální raketu mezi všemi $\bar{\sigma}$-idemparametrovými raketami, kde parametr $\bar{\sigma}_i \equiv S_i/M_i$ (srv. odst. 4). Podle (15,2) je

$$\bar{\sigma}_i = \varepsilon_i(1 - \lambda_i) = (1 - 1/p_i)/q_i = (1 - 1/p_i)(p_i - r_i)/(p_i - 1)\, 1/r_i =$$
$$= 1/r_i - 1/p_i = 1/r_i - \lambda_i \Rightarrow r_i = 1/(\lambda_i + \bar{\sigma}_i)\,.$$

Vzhledem k předpokladu $\bar{\sigma}$-idemparametrové rakety píšeme nadále

$$r_i = 1/(\lambda_i + \bar{\sigma})\,; \quad i = 1, 2, \dots, n\,.$$

Nutné podmínky lokálního extrému pro

$$P = \prod_{i=1}^{n} 1/\lambda_i = \text{extrém} \tag{22,1}$$

při vazbě

$$R = \exp(V/U) = \prod_{i=1}^{n} 1/(\lambda_i + \bar{\sigma}) = \text{konst}$$

jsou vyjádřeny rovnicemi

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{j=1}^{n} 1/\lambda_j + \Phi \prod_{j=1}^{n} 1/(\lambda_j + \bar{\sigma})\,; \quad \partial F/\partial \lambda_i = 0\,; \quad i = 1, 2, \dots, n\,.$$

Vychází

$$\prod_{j=1}^{n} (\bar{\sigma} + \lambda_j)/\lambda_j + \Phi \lambda_i/(\sigma + \lambda_i) = \,; \quad i = 1, 2, \dots, n\,.$$

Odtud ihned podmínky

$$\lambda_i/(\bar{\sigma} + \lambda_i) = \text{idem} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 1/p_i = \text{idem}\,,$$

vedoucí zřejmě k minimu P, resp. M:

M-optimální, $\bar{\sigma}$-idemparametrová raketa je p-idemparametrová, a tedy ekviparametrová (geometricky standardizovaná).

Pro tuto raketu platí

$$P = p^n = 1/\lambda^n\,, \quad R = 1/(\lambda + \bar{\sigma})^n \Rightarrow P = 1/(R^{-1/n} - \bar{\sigma})^n\,, \tag{22,2}$$

$$R^{-1/n} = \bar{\sigma} + \lambda = (1 + p\bar{\sigma})/p\,. \tag{22,3}$$

Poznámka.

Místo minimalizace P (1) jsme mohli maximalizovat $\Lambda = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

V souvislosti s oběma konečnými rovnicemi předchozího odstavce vystupuje tato myšlenka:

Logaritmická derivace poslední ze závislostí (22,2)

$$P = \left(R^{-1/n} - \bar{\sigma}\right)^{-n} \tag{23,1}$$

poskytne

$$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} \ln\left(R^{-1/n} - \bar{\sigma}\right)^n = -\ln\left(R^{-1/n} - \bar{\sigma}\right) - \frac{1}{\mathrm{n}}\frac{R^{-1/n}\ln R}{R^{-1/n} - \bar{\sigma}}.$$

Z rovnice $\partial P/\partial n = 0$ (a z výrazu pro $\partial^2 P/\partial n^2$) nalezneme pro minimum funkce $P \equiv P(n)$ zadané v (1) podmínku

$$n\left(R^{-1/n} - \bar{\sigma}\right)\ln\left(R^{-1/n} - \bar{\sigma}\right) + R^{-1/n}\ln R = 0\,,$$

která s užitím (22,3) přechází v

$$n/p \ln(1/p) + (1 + p\bar{\sigma})/p \ln\left((1 + p\bar{\sigma})/p\right)^{-n} = 0\,,$$

tj.

$$p\bar{\sigma}\ln p - (1 + p\bar{\sigma})\ln(1 + p\bar{\sigma}) = 0\,.$$

Při a priori dané hodnotě $\bar{\sigma}(p)$ určuje tato transcendentní rovnice onu hodnotu $p(\bar{\sigma})$, která minimalizuje optimální P dané závislostí (1) vzhledem k n, tj. určuje nejmenší počet stupňů M-optimální $\bar{\sigma}$-idemparametrové rakety. S takto numericky vázanou dvojicí p, $\bar{\sigma}$ je minimální počet stupňů n při předem daném R (rozuměj prostřednictvím U, V_n) stanoven celočíselnou funkcí plynoucí z (22,3)

$$n = E\left[\frac{\ln R}{\ln p/(1 + p\bar{\sigma})}\right] = E\left[\frac{V_n}{U\ln(p/1 + p\bar{\sigma})}\right].$$

Poměrně rychle vede k cíli grafická metoda stanovení tohoto „*optima n k optimu P*“:

Na uvažované raketě jakožto geometrické raketě platí*)

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} p^{1-i}S_1 = S_1(1 - 1/p^n)/(1 - 1/p) =$$
$$= S_1 p^{1-n}(p^n - 1)/(p - 1) = S_n(p^n - 1)/(p - 1)$$

čili

$$S/Z = (p^n - 1)/(p - 1)\, S_n/Z\,,$$

*) Srv. Pokroky MFA *12* (1967), (12; 1) 354, rov. (12,1).

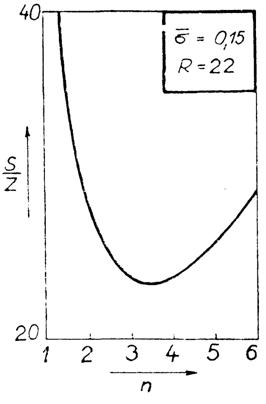
kde

$$S_n = \bar{\sigma} M_n\,, \quad M_n = pZ\,,$$

takže konečně

$$S/Z = \bar{\sigma} p(p^n - 1)/(p - 1) = \bar{\sigma} P^{1/n}(P - 1)/(P^{1/n} - 1)\,;$$

stále v podmínkách M-, resp., Λ-, resp. P-optima. Sestrojíme-li tedy závislost S/Z na n při daných $\bar{\sigma}$, R (s odpovídajícím p) podle této rovnice, najdeme minimální n z příslušného bodu na grafu. Např. pro $\bar{\sigma} = 0{,}15$, $R = 22$ čteme $3 < n < 4$ (obr. 2).



Obr. 2. Závislost poměru úhrnné strukturní hmoty S a užitečného zatížení Z na počtu stupňů n geometricky standardizované M-optimální rakety při daném úhrnném CIOLKOVSKÉHO čísle R a předepsaném poměru strukturní a počáteční hmoty stupňů ($\bar{\sigma} =$ idem). Abscisa bodu s minimální ordinátou stanoví optimální počet stupňů M-optimální rakety.

24. EKONOMICKO-OPTIMÁLNÍ DVOUSTUPŇOVÁ RAKETA

Vedle teoretických požadavků vystupuje ovšem v praxi i hledisko ekonomické. Naznačíme jeden okruh otázek tohoto druhu:

Uvažujeme dvoustupňovou raketu s předepsanou hodnotou charakteristické rychlosti

$$V_2 = U_1 \ln (M_1/K_1) + U_2 \ln (M_2/K_2)\,.$$

K její ekonomické analýze se ukazuje početně vhodným zavést jednak *mezistupňové parametry*

$$\gamma_1 = M_2/S_1\,; \quad \gamma_2 = Z/S_2\,,$$

jednak *stupňové parametry*

$$\delta_i = S_i/M_i\,; \quad i = 1, 2\,.$$

Souvislost s parametry 1. a 2. druhu je dána rovnicemi

$$\gamma_1\delta_1 = M_2/M_1 = Z_1/M_1 = \lambda_1\,, \quad \gamma_2\delta_2 = Z/M_2 = \lambda_2\,,$$

tj.

$$\gamma_i\delta_i = \lambda_i = 1/p_i\,; \quad i = 1, 2\,.$$

Snadno nalezneme*)

$$\delta_i = \varepsilon_i(1 - \lambda_i) = (p_i - 1)/(p_i q_i)\,; \quad i = 1, 2\,,$$

takže

$$\gamma_i = \lambda_i/\delta_i = \lambda_i/(\varepsilon_i(1 - \lambda_i)) = q_i/(p_i - 1)\,.$$

Je tedy

$$M_1/K_1 = M_1/(S_1 + M_2) = 1/(S_1/M_1 + M_2/M_1) = 1/((1 + \gamma_1)\,\delta_1)\,,$$

$$M_2/K_2 = M_2/(S_2 + Z) = 1/(S_2/M_2 + Z/M_2) = 1/((1 + \gamma_2)\,\delta_2)$$

a rovnice pro charakteristickou rychlost s těmito parametry nabývá tvaru

$$V_2 = -U_1 \ln((1 + \gamma_1)\,\delta_1) - U_2 \ln((1 + \gamma_2)\,\delta_2)\,. \tag{24,1}$$

Označíme-li μ_i náklad na jednotku energetické hmoty a ν_i náklad na jednotku strukturní hmoty i-ho stupně, je úhrnný náklad na raketu (ovšem bez užitečného zatížení $Z \equiv Z_2$!)

$$A = \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \nu_1 E_1 + \nu_2 E_2\,.$$

Poněvadž

$$E_1 = M_1 - S_1 - M_2\,, \quad E_2 = M_2 - S_2 - Z\,,$$

je

$$A/Z = \mu_1(M_1/Z - S_1/Z - M_2/Z) + \mu_2(M_2/Z - S_2/Z - 1) + \nu_1 S_1/Z + \nu_2 S_2/Z\,.$$

Příslušné hmotové parametry vyjádříme užitím parametrů γ_i, δ_i:

$$\begin{aligned} M_1/Z &= S_1/M_2\,.\,S_2/Z\,.\,M_1/S_1\,.\,M_2/S_2 = 1/(\gamma_1\gamma_2\delta_1\delta_2)\,,\\ S_1/Z &= S_1/M_2\,.\,S_2/Z\,.\,M_2/S_2 = 1/(\gamma_1\gamma_2\delta_2)\,,\\ M_2/Z &= S_2/Z\,.\,M_2/S_2 = 1/(\gamma_2\delta_2)\,,\\ S_2/Z &= 1/\gamma_2\,. \end{aligned}$$

Rovnice pro náklad rozpočetný na dopravu jednotky užitečného zatížení obdrží konečně tvar:

$$\begin{aligned} A/Z = {} & \mu_1/(\gamma_2\delta_2)\,(1/(\gamma_1\delta_1) - 1/\gamma_1 - 1) + \mu_2(1/(\gamma_2\delta_2) - 1/\gamma_2 - 1) + \\ & + \nu_1/(\gamma_1\gamma_2\delta_2) + \nu_2/\gamma_2\,. \end{aligned} \tag{24,2}$$

Ekonomicko-optimální dvoustupňovou raketu definujeme požadavkem minimalizace nákladu A/Z při pevně daných hodnotách V_2, U_i, δ_i, μ_i, ν_i; $i = 1, 2$. Pod-

*) Srv. Pokroky MFA *9* (1964), 237 (tabulka).

mínku pro A/Z = extrém při vazbě V_2 = konst vyjádříme rovnicemi

$$F(\gamma_1, \gamma_2) = A/Z + \Phi(V_2 - \text{konst})\,; \quad \partial F/\partial \gamma_i = 0\,; \quad i = 1, 2\,,$$

kde A/Z je dáno rovnicí (2) a V_2 rovnicí (1). Obě podmínky $\partial F/\partial \gamma_i = 0$; $i = 1, 2$ poskytnou

$$(\nu_1 + (1 - \delta_1)\, \mu_1/\delta_1)/(\delta_2 \gamma_1^2 \gamma_2) + \Phi U_1/(1 + \gamma_1) = 0\,,$$

$$(\nu_2 - \mu_1/\delta_2 + (1 - \delta_2)\, \mu_2/\delta_2 + (\nu_1/\delta_2 + (1 - \delta_1)\, \mu_1/\delta_1)/\gamma_1) +$$
$$+ \Phi U_2/(1 + \gamma_2) = 0$$

a po vyloučení LAGRANGEOVA multiplikátoru Φ

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{1 + \gamma_1}{1 + \gamma_2} \frac{\gamma_2(\nu_1 + \mu_1(1 - \delta_1)/\delta_1)}{\gamma_1^2(\mu_2 - \mu_1 + \delta_2(\nu_2 - \mu_2)) + \gamma_1(\nu_1 + \mu_2(1 - \delta_1)/\delta_1)}\,. \tag{24,3}$$

Pro přehlednou interpretaci redukujeme úlohu na (fiktivní!) případ rovných nákladů

$$\mu_1 = \mu_2 = \nu_1 = \nu_2\,.$$

Závislost (3) se tak zjednodušuje na

$$U_1/U_2 = (1 + \gamma_1)/(1 + \gamma_2)\, \gamma_1/\gamma_2$$

čili

$$1/((U_1/U_2 - 1)\, \gamma_1) + 1/((U_2/U_1 - 1)\, \gamma_2) = 1\,; \quad U_1 \neq U_2\,,$$

resp.

$$\gamma_1 = \gamma_2\,; \quad U_1 = U_2\,.$$

To je zcela jednoduchá souvislost mezistupňových parametrů $\gamma_{1,2}$ s výtokovými rychlostmi $U_{1,2}$ uvažované fiktivní rakety.

Literatura *)

[1] ALEXANDROV, FROLOV: Sovětskije sputniki i kosmičeskaja raketa (1959).

[2] ASME: Publ. Paper Number 59-AV-33.

[3] BLANC: Mém. Artill. franc. *26* (1952), 705.

[4] COLEMAN: Ars Journal *31* (1961), 259 a *32* (1962), 104.

[5] GOLDSMITH: Jet Prop. *27* (1957), 415.

[6] HALL, ZAMBELLI: Jet Prop. *28* (1958), 463.

[7] KRAUSE: Weltraumfahrt *3* (1953), 52.

*) Je současně literaturou pro předchozí článek: Pokroky MFA *12* (1967), 341.

[8] Kölle: práce užité sub. [7].
[9] Miele: *Theory of flight Paths* (1962), též ruský překlad: *Mechanika poleta* (1965).
[10] Mišoň, Pírko: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie *9* (1964), 223, 267.
[11] Mišoň, Pírko: Práce ČVUT 1965, řada 4, č. 8.
[12] Pírko: Práce ČVUT, řada IV 1964, 49.
[13] Subotowicz: Jet Prop. *28* (1958), 460.
[14] Vertregt: Journ. Brit. Interplan. Soc. *14* (1955), 20, 152.
[15] Weisbord: Jet Prop. *28* (1958), 164.
[16] Williams: Journ. Brit. Interplan. Soc. *16* (1957), 211.

CHARAKTERISTICKÉ ZTRÁTY ENERGIE ELEKTRONŮ V PEVNÝCH LÁTKÁCH

Mojmír Láznička, Praha

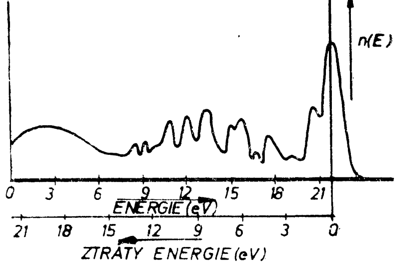
ÚVOD

Franckovy-Hertzovy experimenty ukázaly, že při nepružném rozptylu elektronů na atomech plynů ztrácejí rozptylované elektrony část své energie.

V případě pevných látek pozoroval poprvé v roce 1941 Ruthemann ztráty energie elektronů, které prošly tenkou fólií Al.

Výsledky experimentů na plynných atomech bylo možno s velmi dobrou shodou porovnat s energetickými stavy atomů, a to pomocí optických spekter.

Interakce elektronů s pevnou látkou je mnohem komplikovanější, neboť poměry vzájemného působení primárních elektronů a okolí uvnitř pevné látky jsou velmi složité.



Obr. 1. Energetické spektrum odražených a sekundárních elektronů pro monokrystal NaCl. Enegie primárních elektronů $E = 21{,}5$ eV.

Dodnes není mechanismus vzájemného působení primárních elektronů s pevnou látkou objasněn. Bylo zjištěno, že vedle interakcí analogických interakcím s plynnými atomy dochází v pevné látce k vzájemnému působení primárních elektronů a elektronového plynu pevné látky.