Emil Slavíček

O jednotkách rovinného a prostorového úhlu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 2, 72--78

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138667

Zdrojem mechanické energie ve fotosféře je vodíková konvektivní zóna. Stoupající horká oblaka se zastavují na dně fotosféry, vyzařují svou energetickou zásobu, ochlazují se, houstnou a padají zpět ke dnu konvektivní zóny. Pokud jsou nahoře, pozorujeme je po dobu 6–8 minut jako jasnou granuli, o průměru asi 1 500–2 000 km. Kinetická energie horkého oblaku se na dně fotosféry mění v chaotické turbulentní pohyby. Energie turbulence přechází jednak v teplo, jednak ve zvukové vlny různých délek.

Při pohybu zvukových vln nahoru, to jest do míst s klesající hustotou, roste rychlost částic ve vlně. Zvukové vlny se mění v rázové, které se absorbují nad fotosférou a zahřívají na vysokou teplotu chromosféru a korónu. Celý řetěz přeměn energie, jíž je zahřívána chromosféra a koróna, lze tedy schematicky zapsat (viz schema na str. 71).

Takovým způsobem dnes vysvětluje sluneční fyzika prudký zvrat teploty nad fotosférou a celou stavbu Slunce a obyčejných hvězd.

O JEDNOTKÁCH ROVINNÉHO A PROSTOROVÉHO ÚHLU

EMIL SLAVÍČEK, Praha

ÚVOD

V tomto článku se budu zabývat postavením rovinného úhlu a prostorového úhlu v soustavě veličin, resp. postavením jednotek těchto úhlů v mezinárodní soustavě jednotek.

Důvodem, který mne k tomu vede, jsou stálé dohady o tom, zda jednotky radián a steradián jsou jednotkami základními nebo jednotkami odvozenými. Nejednotnost názorů na tuto velmi závažnou otázku se projevila např. na jednáních o revizi ČSN 01–1301 „Fyzikální veličiny a jednotky ve vědě a praxi“ a byla do jisté míry podporována tím, že XI. Generální konference pro míry a váhy vytvořila pro radián a steradián zvláštní skupinu „doplňkových jednotek“ (unités supplémentaires), aniž toto rozhodnutí zdůvodnila nebo komentovala.

ZÁKLADNÍ POZNATKY Z TEORIE

Pojem *veličina* (fyzikální veličina) považujeme za základní pojem a nedefinujeme jej. Zhruba řečeno veličina je každý fyzikální pojem, který má kromě významu kvalitativního i význam kvantitativní. Mohli bychom také říci, že veličinou je každá měřitelná a srovnávatelná vlastnost objektivní reality.

Veličiny A, B patří ke stejnému druhu, jestliže má (fyzikální) smysl je navzájem srovnávat (případně sčítat, odečítat).

A x i ó m 1: V množině všech fyzikálních veličin vždy existuje neprázdná podmnožina veličin, které nazýváme základní veličiny. Veličiny nepatřící do této podmnožiny se nazývají odvozené.

Takto formulovaný axióm je všeobecně uznávanou základní větou. Uvádějí ji ve svých učebnicích fyziky např. ILKOVIČ [1], HORÁK [2]. Z monografických autorů cituji např. OBERDORFERA [3], WALLOTA [4]. Často se dodává: veličiny odvozené se definují na základě veličin základních pomocí definičních rovnic. Patrně je možno větu dokázat na základě představ o možném matematickém tvaru fyzikálních rovnic. Důkaz však jednak není příliš elementární, jednak by svým teoretickým pojetím ani příliš nezapadal do tohoto článku, jehož aspekty jsou spíše praktického rázu.

D e f i n i c e 1: Jednotka veličiny je určitá veličina, vzatá za základ měření ostatních veličin stejného druhu.

Jednotku veličiny budeme označovat symbolem veličiny v hranatých závorkách.

D e f i n i c e 2: Číselná hodnota veličiny je podíl veličiny a její jednotky.

Číselnou hodnotu veličiny budeme označovat symbolem veličiny ve složených závorkách.

Z uvedených definic plyne bezprostředně

v ě t a 1: Každou veličinu lze považovat za součin její číselné hodnoty a jednotky:

$$A = \{A\} . [A] . \tag{1}$$

D e f i n i c e 3: Každá relace mezi veličinami ve formě rovnice, která má fyzikální smysl, se nazývá fyzikální rovnice, též veličinová rovnice, rovnice mezi veličinami.

V ě t a 2: Každou fyzikální rovnici (veličinovou rovnici) lze rozložit na rovnici mezi číselnými hodnotami a na rovnici mezi jednotkami.

Důkaz plyne z věty 1. Nechť rovnice má např. tvar

$$C = k . A . B , \tag{2}$$

kde k je pouhé číslo. Pak dosazením podle rovnice (1) najdeme

$$\{C\} [C] = k\{A\} [A] \{B\} [B] ,$$

odkud jednak

$$\{C\} = pk\{A\} \{B\} , \tag{3}$$

jednak

$$[C] = \frac{1}{p} [A] [B] , \tag{4}$$

kde p je koeficient úměrnosti (opět pouhé číslo), jehož hodnota vyplyne z rovnice (4) po zvolení jednotek $[A]$, $[B]$, $[C]$.

Definice 4: Koherentní systém jednotek je takový systém, ve kterém každá rovnice mezi číselnými hodnotami má stejný tvar jako příslušná rovnice mezi veličinami.

Takový systém je vždy možný; postačí totiž zvolit jednotky tak, že v každé rovnici mezi jednotkami je $p = 1$. Jmenovitě vyplývá z věty 2 tato

věta 3: K určité rovnici mezi veličinami existuje nekonečně mnoho rovnic mezi číselnými hodnotami.

Důkaz: Nechť opět rovnice mezi veličinami má tvar (2). Zvolme v rovnici (4) určité (ale jinak libovolné) jednotky $[A]_1$, $[B]_1$, $[C]_1$ veličin A, B, C. Ty dosazeny do (4) dávají určitou hodnotu koeficientu p

$$p_1 = [A]_1 \, [B]_1/[C]_1 \, .$$

Příslušná rovnice mezi číselnými hodnotami má tedy tvar

$$\{C\}_1 = kp_1\{A\}_1 \, \{B\}_1 \, .$$

Při jiné volbě jednotek vyjde obecně jiný koeficient p; takových voleb však můžeme alespoň teoreticky) najít nekonečně mnoho, čímž je věta dokázána.

Poznámka: Na rovnice tvaru (2) můžeme zavedením nových vhodných veličin převést každou rovnici složitějšího tvaru. Např. pro rovnici

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

píšeme postupně

$$a = gt \, , \quad s_1 = \tfrac{1}{2}at \, , \quad s_2 = v_0t \, , \quad s = s_0 + s_1 + s_2 \, .$$

Poslední rovnice vyjadřuje ovšem relaci mezi pouze jediným druhem veličin (délkami). Obecný důkaz si zajisté provede laskavý čtenář sám, uzná-li to za nutné. Viz též knihu Oberdorferovu [3].

ROZBOR PROBLÉMU

Podle věty 2. existují pouze dvě možnosti korektního zavedení veličiny úhel. Buďto ji prohlásíme za veličinu odvozenou (na základě určité definiční rovnice), nebo za veličinu základní. Obdobné tvrzení platí pro příslušné jednotky: buďto je jednotka úhlu jednotkou základní, nebo jednotkou odvozenou. Jiné možnosti není.

Prozkoumáme obě uvedené možnosti.

ÚHEL JAKO ODVOZENÁ VELIČINA

Rovinný úhel definujeme rovnicí

$$\varphi = \frac{s}{r} \, , \tag{5}$$

kde φ je středový úhel, příslušný oblouku s kružnice o poloměru r. Na základě této rovnice určíme koherentní jednotku rovinného úhlu (v dalším pouze úhel), pro kterou musí podle věty 4. platit

$$(6) \qquad \{\varphi\} = \frac{\{s\}}{\{r\}} .$$

Dosadíme do (5) $\varphi = \{\varphi\}[\varphi]$, $s = \{s\}[s]$, $r = \{r\}[r]$, takže

$$(7) \qquad \{\varphi\} = \frac{\{s\}}{\{r\}} \frac{[s]}{[r][\varphi]} .$$

Porovnáním s rovnicí (6) odtud vyplývá, že koherentní jednotka úhlu je

$$(8) \qquad [\varphi] = [s]/[r] = 1 ,$$

neboť obě délky s, r měříme stejnou jednotkou. Koherentní odvozené jednotky nazýváme hlavní; je tedy hlavní jednotkou úhlu číslo 1. Pro označení této jednotky je možno použít zvláštního názvu radián (symbol : rad) v případě nutnosti odlišení od jiných jednotek úhlu nebo v jiných případech zřetele hodných.

Vedlejší jednotky rovinného úhlu zavedeme definičně přepočítacím faktorem vůči jednotce hlavní:
pravý úhel $\llcorner = \pi/2$ radiánů $= \pi/2$ (opět pouhé číslo), stupeň $^\circ = \pi/180$, grad $^g = \pi/200$ atp.

Zcela obdobně zavedeme prostorový úhel ω jako odvozenou veličinu definiční rovnicí

$$(9) \qquad \omega = S/r^2 ,$$

kde S je plocha na kouli o poloměru r, vytknutá středovým úhlem ω. Takto definovaná veličina je opět bezrozměrná; její hlavní jednotkou je číslo 1.

Pro tuto jednotku je možné podobně jako v případě rovinného úhlu zavést zvláštní označení steradián; zdá se mi však, že to nemá žádného praktického významu.

Poznámka: Jednotky dalších důležitých veličin vázaných na prostorový úhel vyplývají obdobně z definičních rovnic příslušných veličin. Z rovnice $d\Phi = I\,d\omega$ plyne jednotka světelného toku $[\Phi]$ = kandela se zvláštním názvem lumen; z rovnice $L = I/S$ plyne jednotka $[L]$ jasu kandela na čtverečný metr se zvláštním názvem nit; z rovnice $H = \Phi/S$ vychází jednotka $[H]$ světlení kandela na čtverečný metr (bez zvláštního názvu); z definiční rovnice $E = \Phi/S$ vyplývá jednotka $[E]$ osvětlení kandela na čtverečný metr se zvláštním názvem lux atp.

Úhel jako veličina základní

Veličinu základní v tomto případě nedefinujeme. Její jednotku určíme např. předpisem nebo prototypem. Označme ji zatím obecně $[\varphi]$. Relace mezi úhlem jako základní veličinou a ostatními základními veličinami mají v tomto případě charakter základního fyzikálního zákona, který vyjadřuje přímou úměrnost mezi délkou oblouku s, poloměrem kružnice r a středovým úhlem φ,

$$s = k \,.\, r\varphi \,, \tag{10}$$

konstanta úměrnosti je uvedenou rovnicí definována. Její jednotkou je

$$[k] = \frac{[s]}{[r]\,[\varphi]} = [\varphi]^{-1} \,, \tag{11}$$

neboť $[s] = [r]$; její číselná hodnota je

$$\{k\} = \frac{\{s\}}{\{r\}\,\{\varphi\}} \,. \tag{12}$$

Přejdeme nyní k realizaci jednotek úhlu. Např. můžeme zavést jednotku úhlu jako úhel, který vytíná na kružnici se středem ve vrcholu úhlu oblouk rovný co do délky poloměru kružnice. Označíme ji jako radián (rad). V tom případě dosazení $\{s\} = \{r\}$, $\{\varphi\} = 1$ do rovnice (12) dává $\{k\} = 1$, takže

$$k = 1 \text{ rad}^{-1} \,. \tag{13}$$

Můžeme však také zavést jako jednotku úhlu 1/360 plného úhlu a označit ji stupeň (°). Pak $\{s\} = \{r\} \,.\, 2\pi/360$ a dosazení do (12) [současně s $\{\varphi\} = 1$] dává $\{k\} = 180/\pi$, tedy

$$k = \frac{180}{\pi} (\text{stupeň})^{-1} \,. \tag{14}$$

Zřejmě existují další možné volby jednotky úhlu, přičemž každé odpovídá zcela určitá hodnota koeficientu úměrnosti k v rovnici (10). S tímto koeficientem se ovšem setkáme nejen v rovnici (10), ale ve všech dalších rovnicích, které jsou na ní založeny nebo ji obsahují jako část, např.

$$v = k \,.\, r\omega \,, \tag{15}$$

jako vztah mezi rychlostí kruhového pohybu, poloměrem r dráhy a úhlovou rychlostí,

$$a_t = k \,.\, r\varepsilon \tag{16}$$

pro výpočet tečného zrychlení kruhového pohybu z úhlového zrychlení a poloměru apod.

Závažné potíže však máme především při aplikacích známých matematických relací

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \,, \tag{17}$$

(18) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

(19) $$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

a dalších. Zde všude žádáme rozměrovou homogennost rovnic, a té lze při zachování jednoduchého tvaru relací dosáhnout jen při x bezrozměrném, tedy nikoliv při základní veličině. Další možné řešení je ovšem místo úhlu v rovnicích (17) až (19) dosazovat pouze číselné hodnoty úhlu $\{\varphi\}$ a uvedené rovnice deklasovat na pouhé rovnice mezi číselnými hodnotami, jejichž tvar závisí na zvolené jednotce úhlu.

Obdobně můžeme zavést jako základní veličinu prostorový úhel ω a jeho jednotku $[\omega]$ zvolit nezávisle na ostatních základních jednotkách soustavy. Místo definiční rovnice (9) máme nyní fyzikální rovnici mezi prostorovým úhlem, délkami a plochami,

(20) $$S = K \,.\, \omega r^2\,,$$

ve které musíme (zásadně) konstantu K zjišťovat pokusně. Jestliže zavedeme jako základní jednotku úhlu steradián (sr) definovaný známým způsobem, pak vychází

$$K = 1/sr = (sr)^{-1}\,.$$

Při jiném zavedení základní jednotky číselná hodnota K nebude jednotková. Např. když zvolíme za jednotku plný prostorový úhel (symbol : spat), vyjde

$$K = 4\pi/\mathrm{spat} = 4\pi\,(\mathrm{spat})^{-1}\,.$$

Rozměrová konstanta K se ovšem opět objeví (obdobně jako k u rovinného úhlu) ve všech vztazích, ve kterých se uplatňuje relace (5).

Často se odůvodňuje zavádění základní jednotky steradián „z rozměrových důvodů“ nebo „pro možnost kontroly jednotkami“. Přesvědčil jsem se, že např. ve fotometrii tato kontrola nesahá dále než za definici světelného toku a je proto zcela bezcenná. Čtenář nechť ji posoudí sám podle tří jednoduchých fotometrických vztahů.

a) Vztah mezi světelným tokem $d\Phi$ vysílaným do prostorového úhlu $d\omega$ a svítivostí I zdroje

(21) $$d\Phi = I\, d\omega$$

je v pořádku; kontrola jednotkami dává

$$\mathrm{lm} = \mathrm{cd}\,.\,\mathrm{sr}\,.$$

b) Vztah mezi osvětlením E plošky, její vzdáleností r od zdroje, svítivostí I zdroje a úhlem φ sevřeným normálou plošky a spojnicí se zdrojem

(22) $$E = \frac{I \cos\{\varphi\}}{r^2}$$

(viz např. Ilkovič, [1], Horák, [2]) je v tomto tvaru rozměrově nesprávný; dosazení $[E] = \mathrm{lm/m^2}$, $[I] = \mathrm{cd}$ dává

$$[\cos\{\varphi\}] = \mathrm{lm/cd} = sr(?) .$$

c) Ve vztahu mezi světelným tokem φ z kosinového zářiče a jeho normálovou svítivostí I_n

$$\Phi = \pi \,.\, I_n$$

(kde koeficient π je pouhé číslo) vychází přímo

$$\mathrm{lm} = \mathrm{cd} \quad (?).$$

Podobně je tomu v některých dalších rovnicích. Proč? Poněvadž se v nich neobejdeme bez geometrických relací mezi prostorovým úhlem, plochami, délkami a rovinnými úhly, které jsou zatíženy konstantami k, K. Za předpokladu platnosti rovnic (10) a (20) dává korektní odvození správný tvar rovnic (22), (23), totiž

$$E = K \frac{I \cos\{\varphi\}}{r^2} , \tag{22a}$$

$$\Phi = K \,.\, \pi I_n . \tag{23a}$$

ZÁVĚR

Z rozboru vyplývá, že chápání jednotek rovinného a prostorového úhlu jako základních jednotek není vhodné. Vede k nadbytečným rozměrovým konstantám k, K v rovnicích (10), (20) a v rovnicích z nich vyplývajících nebo na nich závislých. Vede dále ke komplikacím např. při rozvíjení goniometrických funkcí do řad a při aplikacích Eulerovy věty. Tyto potíže nemá zavedení obou jednotek jako jednotek odvozených, které proto obecně doporučuji.

Z provedených úvah dále vyplývá, že je nezbytné v našich normách jednoznačně uvést, zda veličiny rovinný a prostorový úhel mají povahu veličin základních nebo odvozených, a zda tedy „doplňkové jednotky" radián a steradián jsou jednotkami základními či hlavními.

Literatura

[1] Ilkovič D., *Fyzika*, SNTL Bratislava 1962.

[2] Horák Zd., Krupka F., Šindelář V., *Technická fyzika*, SNTL Praha 1960.

[3] Oberdorfer G., *Das Internationale Maßsystem und die Kritik seines Aufbaus*, Fachbuchverlag Leipzig 1969.

[4] Wallot J., *Grössengleichungen Einheiten und Dimensionen*, J. A. Barth Leipzig 1957.