Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Kuřina

Netradiční cesta k euklidovské geometrii (o knize Zofie Krygowské: Geometria - podstawowe własności płaszczyzny)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 4, 229--239

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138642`

VYUČOVÁNÍ MATEMATICE A FYZICE

NETRADIČNÍ CESTA K EUKLIDOVSKÉ GEOMETRII (O KNIZE ZOFIE KRYGOWSKÉ GEOMETRIA – PODSTAWOWE WŁASNOŚCI PŁASZCZYZNY)

FRANTIŠEK KUŘINA, Hradec Králové

V roce 1963 přinesly Pokroky článek Vítězslava JOZÍFKA, Modernizace vyučování geometrii (Pokroky MFA, *8* (1963), str. 275), ve kterém se zdůvodňuje, že geometrie ve svém klasickém pojetí není vhodná pro axiomatický postup na střední škole. Zároveň se konstatuje, že metodika moderního pojetí geometrie není zpracována. Dnes již moderní učebnice geometrie existují. V tomto článku pojednáme o jedné z nich (Zofia KRYGOWSKA *Geometria – podstawowe własności płaszcyzny* Warszawa 1965).

Abychom si učinili představu o charakteru knihy a jejím pojetí, uveďme několik myšlenek, jak je autorka formuluje v úvodu.

Kniha Geometria není v pravém slova smyslu ani učebnicí ani vědeckou prací, není publikací populárně vědeckou ani metodickým průvodcem. Je jistým didaktickým návrhem, který se týká vyučování prvé části planimetrie v polském lyceu (střední škola odpovídající naší střední všeobecně vzdělávací škole). Návrh se týká jak vědecké konstrukce, tak i didaktického zpracování geometrie pro mládež od 15 let v etapě, kdy se začíná realizovat modernizace vyučování matematice.

I když kniha není určena bezprostředně pro školní potřebu a i když obsahuje mnohé části učiva, které by musily být ve škole vynechány nebo probrány jen informativně pro nedostatek času, obrací se autorka na samého žáka, užívá jeho jazyka, a jeho úrovni přizpůsobuje příklady, cvičení a přesnost výkladu.

Planimetrie probíraná v knize má strukturu dvojrozměrného metrického prostoru. Jisté množiny tohoto prostoru se nazývají přímky, axiomaticky se charakterizují vztahy mezi nimi a metrika prostoru. Základní pojmy rovina, přímka a vzdálenost jsou charakterizovány deseti tzv. základními vlastnostmi. Tento systém stačí k plnému vytvoření celé tradiční geometrie (nově ovšem pojaté) i k jejímu přirozenému doplnění novými prvky svázanými především s množinovým chápáním geometrických útvarů, s pojmem uspořádání a orientace a s některými pojmy algebraickými a topologickými (které se nejen výslovně zavádějí, ale kterých se i užívá). Z důvodů teoretických se axiómy nazývají základními vlastnostmi. Z didaktických důvodů jsou totiž silnější, než by bylo nutně třeba a nejsou nezávislé.

Autorčiny názory na postavení geometrie v moderním vyučování matematice jsou tyto:

Ke geometrii jako vědě lze zaujmout různá stanoviska. Z metodických důvodů je však třeba tato stanoviska jasně formulovat. Deduktivní kurs geometrie lze z osnov lycea vynechat a za hlavní cíl vyučování této disciplíně lze považovat jednak to, aby si žáci osvojili geometrické vědomosti a dovednosti potřebné pro praxi, jednak to, aby byli připraveni pro studium vlastní matematiky, v níž by geometrické pojmy byly jen názornými modely. K dosažení těchto cílů plně stačí vhodně sestavený kurs geometrie na základní škole. Na lyceu není nutno geometrii jako zvláštní předmět zavádět a čas tím získaný je možno věnovat jiným oddílům matematiky. Lze však zaujmout i stanovisko odlišné: systematický kurs geometrie chápat jako úvod do deduktivní metody. Tak je pojata kniha Geometria. Nutnou, ne však postačující podmínkou k tomu, aby se žák mohl seznámit s deduktivní metodou na příkladu geometrie je, podle Z. Krygowské, splnění těchto požadavků:

1. Všechny specifické předpoklady geometrie (axiómy) musí být výslovně formulovány a jejich systém musí vystačit k deduktivní konstrukci geometrie.

2. Interpretace určených základů musí být pokud možno moderní, správná a nedvojznačná.

3. Kurs geometrie musí zdůrazňovat pojmy důležité i v jiných oddílech školní matematiky, od kterých geometrie nesmí být oddělována. Geometrie musí využívat obecných matematických struktur při studiu vlastního materiálu.

V dosavadní školní praxi byl prvý z těchto požadavků zřídka realizován. Obyčejně se formulovaly jen některé axiómy à autoři byli nuceni pašovat další axiómy skrytě v průběhu důkazů. Zřejmě potom výklad o podstatě deduktivního systému (celou geometrii lze odvodit z axiómů) nebyl správný.

Autorka za základ celé planimetrie považuje deset základních vlastností, které postupně uvádí v druhé kapitole knihy. I když nedokazuje v knize všechna tvrzení, jsou na základě axiómů dokazatelná.

Druhý z požadavků se týká významu názvu základní vlastnost. Formulací základních vlastností určujeme, jak rozumět základním pojmům. Každý, kdo chápe základní pojmy tak jako my, říká autorka, tj. každý kdo uzná základní vlastnosti, musí uznat všechna tvrzení, která získáme jako důsledky těchto vlastností. Školní zkušenosti ukazují, že toto pojetí (systém axiómů je definicí jisté struktury) je pro žáka přirozenější než koncepce axiómů jako zřejmých pravd. Při ní lze jen těžko vysvětlit smysl deduktivní konstrukce geometrie a smysl důkazů vůbec. Axiomatika má při ní absolutní charakter a vyjadřuje jakési apriori dané nezvratné pravdy.

Třetí požadavek se týká využití obecných matematických pojmů tak, aby při syntetickém pojetí vynikla co nejvíce struktura geometrie. V knize se užívá pojmů množina, uspořádání, zobrazení, relace ekvivalence a některých pojmů topologických. Zvláště se využívá grupy shodností, grupy přímých shodností a grupy translací k jednotné formulaci definice shodnosti, rovnosti orientovaných úhlů a rovnosti vektorů.

Mimo nový obsah je v učebnici zpracována celá tradiční geometrie základní školy. Tím vzrostl objem knihy. Autorce šlo o to ukázat, že lze a jak lze celou tradiční geometrii základní školy studovat novým způsobem. Rozsah knihy dále vzrostl didaktickým zpracováním materiálu. Kniha má často problémový charakter, žák má příležitost pracovat aktivně a uvědoměle. Vážnou didaktickou úlohu při výkladu hraje analogie a kontrast. V knize je řada řešených příkladů a komentářů. Z tradičních důvodů dává autorka někdy přednost konstruktivnímu postupu před postupem ryze teoretickým.

Mimořádná péče je věnována symbolice. Různé pojmy mají různé symboly. Přitom symboly mají „charakter dopravních značek" (z jejich tvaru lze usuzovat na jejich obsah). Vztahy množinového charakteru se zapisují množinově. Uveďme několik příkladů.

$\bar{A}\bar{B}$ značí úsečku s krajními body A, B,
AB velikost úsečky $\bar{A}\bar{B}$.
$AB^{\rightarrow}$ značí polopřímku s počátkem A a vnitřním bodem B,
$\overrightarrow{AB}$ vektor s počátkem A a koncem B.
$|\overrightarrow{AB}| = AB$ znamená velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$.
$pr\ AB$ je označení přímky určené body AB (přímka se řekne polsky prosta),
(A) znamená svazek přímek o středu A.
$a \cap b = \{C\}$ znamená, že přímky a, b mají společný jediný bod C.
$(A) \cap (B) = \{pr\ AB\}$ znamená, že průnikem svazků o vrcholech A, B je přímka AB.

Ilustrace knihy jsou zpracovány netradičním způsobem. Obrázky jsou z technických důvodů jen dvojbarevné. Barvě v matematice je věnována značná pozornost; je chápána jako jeden z prostředků neverbálního vyjadřování, které pomáhá pochopení podstaty věci.

Kniha byla napsána v roce 1963, vyšla tiskem v roce 1965 a opírá se o rozsáhlou experimentální práci na krakovských školách. Je rozdělena do tří kapitol, má 239 stran.

V prvé kapitole je zavedeno několik pojmů obecného matematického charakteru, které usnadní výstavbu vlastní geometrie. Především jde o názorný výklad o množinách (prvek množiny, podmnožina, totožnost dvou množin, sjednocení, průnik a rozdíl množin). Množiny se znázorňují Vennovými schématy a od počátku se pracuje s množinovou symbolikou. Pojmy sjednocení a průnik množin jsou zaváděny spolu s výkladem o logické disjunkci a konjunkci. Úvod do názorné teorie množin je tak přirozeně spojen s výklady elementů logiky. Na několika příkladech vysvětluje autorka dále zobrazení množiny Z na množinu Z', jako množinu všech uspořádaných dvojic, v nichž každý prvek množiny Z je prvým prvkem právě jedné dvojice, každý prvek množiny Z' je druhým prvkem aspoň jedné dvojice. Uspořádání množiny je definováno jako asymetrická, trichotomická a tranzitivní relace na množině. Definují se následovník, předchůdce a vztah mezi.

Autorka důsledně vychází z rozboru žákům blízkých příkladů, ukazuje různé možnosti v chápání pojmů a vede žáky k samostatnému uvažování o různých „matematických situacích". Žák tak není odsouzen k roli pasívního konzumenta učeností, které si kdysi kdosi vymyslel, ale od počátku matematiku v jistém smyslu „tvoří". Například pojem vzdálenost dvou bodů je uveden odstavcem „Vzdálenost dvou bodů v praxi" a v odstavci „Vlastnosti vzdálenosti" se diskutuje o situaci dvou much (jedna v krychli, druhá na krychli), aby se na závěr formulovaly čtyři vlastnosti vzdálenosti:

A. *Dvojici bodů X, Y odpovídá právě jedno nezáporné číslo XY, které je vzdáleností bodů X, Y.*

B. *Vzdálenost bodů X, Y je rovna nule tehdy a jen tehdy, je-li* $X = Y$.

C. *Vzdálenost bodů X, Y je táž jako vzdálenost bodů Y, X.*

D. *Součet vzdáleností bodů X, Y a Y, Z je větší nebo roven vzdálenosti bodů X, Z.*

Významnou roli při rozvíjení samostatné práce žáků hrají úlohy. O jejich postavení v knize si učiníme představu, uvedeme-li soubor úloh, které žák řeší při probírání paragrafu „Body a geometrické útvary, vzdálenost dvou bodů".

1. Počítáme-li objem třídy, považujeme ji za kvádr. Prohlédni si dobře třídu a vyjmenuj několik vlastností, které pomíjíme, protože nemají praktický význam při výpočtu.

2. Inženýr kreslí plán rozvodu potrubí, dělník v továrně odlévá stěny tohoto potrubí. Ve tvaru jakého geometrického útvaru si představuje potrubí inženýr, jak si představuje potrubí dělník? Čeho si tedy nevšímají?

3. Narýsujte dva obdélníky p_1 a p_2 tak, aby
a) útvar $p_1 \cup p_2$ byl obdélník a útvar $p_1 \cap p_2$ byl úsečkou,
b) útvar $p_1 \cup p_2$ byl obdélník a útvar $p_1 \cap p_2$ byl rovněž obdélník,
c) útvar $p_1 \cap p_2$ byl jednobodovou množinou,
d) útvar $p_1 \cap p_2$ byl množinou prázdnou.

4. Ve městě je kolej jednosměrné okružní dráhy O. Pro průvodčího a cestující v této tramvaji znamená vzdálenost stanic A, B na dráze tramvaje velikost dráhy, kterou musí ujet vůz mezi stanicemi A, B. Splňuje takto chápaný pojem vzdálenost dvou míst na dráze O základní vlastnosti vzdálenosti? Jestliže ne, které nejsou splněny?

5. Po zakončení turnaje v kopané neměly žádné dva kluby týž počet bodů. Každý klub zaujímá v tabulce určité místo. „Vzdálenost dvou klubů v tabulce" vypočteme jako absolutní hodnotu rozdílu počtu získaných bodů těchto klubů. Má takto definovaná „vzdálenost" všechny vlastnosti vzdálenosti?

Závěr první kapitoly je věnován výkladu o definicích a větách.

Druhá kapitola má název Základní geometrické útvary a vztahy. Jejím cílem je zavedení deseti základních vlastností geometrie roviny. Uvažuje se jistá množina bodů, která se nazývá rovina π. Podmnožiny roviny π jsou geometrické útvary, jisté její podmnožiny se nazývají přímky.

Podejme nyní stručný přehled obsahu druhé kapitoly s doslovnou citací základních vlastností geometrie roviny.

Základní vlastnost I (v dalším označujeme základní vlastnosti písmeny ZV) zní:

ZV I: a) *Přímka je geometrický útvar, který obsahuje nekonečně mnoho bodů.* b) *Každý bod roviny náleží nekonečně mnoha přímkám.*

Po definici svazku přímek se formuluje:

ZV II: *Dvěma různými body prochází jedna a jen jedna přímka.*

Množinově se zavádí pojem přímky rovnoběžné a formuluje se

ZV III: *Každý svazek přímek obsahuje právě jednu přímku rovnoběžnou s danou přímkou.*

Důsledkem této vlastnosti je věta, že relace rovnoběžnosti je reflexívní, symetrická a tranzitivní.

Další vlastnosti se týkají metriky. V první kapitole byla zavedena vzdálenost dvou bodů jako nezáporné číslo. Po formulaci nominálních definic kolineárních a nekolineárních bodů požaduje autorka platnost tzv. trojúhelníkové nerovnosti jako

ZV IV: *Každé dvojici bodů X, Y odpovídá nezáporné číslo XY, které se nazývá vzdáleností bodu X od bodu Y (to znamená, že platí $XY = 0 \Leftrightarrow X = Y$, $XY = YX$, $XZ \leqq XY + YZ$) tak, že* a) *Body A, B, C jsou kolineární tehdy a jen tehdy, když platí buď $AB = AC + CB$, nebo $BC = BA + AC$, nebo $CA = CB + BA$.* b) *Body A, B, C nejsou kolineární tehdy a jen tehdy, když platí $AB < AC + CB$ a $BC < BA + AC$ a $CA < CB + BA$.*

Co je uspořádání množiny, znají žáci z úvodní kapitoly. Chápání přímky jako uspořádané množiny bodů a základní vlastnosti tohoto uspořádání zajišťuje

ZV V: *Množinu bodů přímky lze uspořádat dvěma a jen dvěma způsoby tak, že platí:* a) *Je-li bod A před bodem B v jednom uspořádání, je bod B před bodem A v druhém uspořádání.* b) *Jsou-li A, B, C různé body, leží bod B mezi body A a C tehdy a jen tehdy, když $AC = AB + BC$.*

Lze tedy definitoricky prohlásit každé z možných uspořádání přímky za smysl přímky. Uspořádání přímky se v dalším jeví jako vhodný prostředek k zavedení důležitých geometrických pojmů. Definuje se polopřímka (Polopřímkou $\overrightarrow{AB}$ nazýváme část přímky AB tvořené bodem A a všemi body přímky, které následují po A v uspořádání od A k B) a polopřímky navzájem opačné.

Další základní vlastnost se týká shodnosti a spojitosti.

ZV VI: *Na každé polopřímce existuje právě jeden bod, jehož vzdálenost od počátku polopřímky se rovná danému nezápornému číslu.*

Velmi jednoduše se definuje úsečka, nulová úsečka, prodloužení úsečky AB za bod B (zápis $AB^{\rightarrow} - \bar{A}\bar{B}$), velikost úsečky (vzdálenost jejich krajních bodů), shodné úsečky, porovnávání úseček. Pro snadné vyjadřování dalších vlastností se zavádí pojem l o m e n á č á r a a o b y č e j n á l o m e n á č á r a.

Po potřebných definicích se formuluje

ZV VII: *Rovnoběžné promítání na přímku zachovává uspořádání libovolné přímky, která nepatří směru promítání.*

Tato vlastnost je ekvivalentní tradičnímu Paschovu axiómu a mimo jiné umožňuje přenést uspořádání bodů přímky „do roviny" jako uspořádání směru (množinově chápaného). To je pak velmi vhodné při zavádění pojmů polorovina a pás. Tradičním způsobem se definuje kružnice a kruh, poloměr, tětiva, průměr, kruhový oblouk a další pojmy. Na větě *Vzdálenost dvou bodů kruhu poloměru r je rovna nejvýše 2r* se demonstruje důkaz jako myšlenkový pochod jdoucí od předpokladů k tvrzení. Důkaz (který je jednoduchý, ale vlastně prvý v celé knize) je ilustrován schématem logických vztahů, ne však obrázkem geometrické situace. Definují se útvary omezené a neomezené. Potom se přechází k formulacím definic tradičně „neškolních" pojmů topologického charakteru: o k o l í b o d u, h r a n i č n í, v n i t ř n í a v n ě j š í b o d ú t v a r u. Tyto pojmy se zavádějí nejdříve na příkladech (hranice státu atp.) a jsou dobrou příležitostí k seznámení s kvantifikací (bez symboliky). Následují definice útvarů uzavřených a otevřených. V z d á l e n o s t b o d u o d n e p r á z d n é h o ú t v a r u se definuje jako velikost poloměru největšího okolí, jehož vnitřek neobsahuje body útvaru.

Dále se formuluje

ZV VIII: a) *Úsečka (oblouk kružnice), jejíž (jehož) jeden krajní bod je vnitřním, druhý vnějším bodem útvaru, má společné body s hranicí útvarů.* b) *Úsečka (oblouk kružnice), jejíž (jehož) jeden krajní bod je vnitřním, druhý vnějším bodem kruhu, má s hranicí kruhu právě jeden společný bod.*

Odtud vyplývají důležité důsledky pro lomenou čáru, vzájemnou polohu polopřímky a kružnice a přímky a kružnice.

Pojetí k o n s t r u k č n í ú l o h y ř e š e n é p r a v í t k e m a k r u ž í t k e m je vysvětleno na úloze: *Jsou dány dvě kružnice k (A, a) a k (B, b), (a ≧ b) a úsečka c. Sestrojte kružnici poloměru c, která se vně dotýká daných kružnic.* (k je označení kružnice, ne však pojmenování kružnice, jak jsme zvyklí u nás; v originále se libovolná kružnice značí písmenem *o* (okręg), písmenem *k* se značí libovolný kruh (koło).) Symbolika, které se v knize užívá, umožňuje jasně formulovat rozbor úlohy.

$$\begin{array}{ccc|l}
k(X, c) \text{ se vně dotýká } k(A, a) & \text{a} & k(X, c) \text{ se vně dotýká } k(B, b) & \text{Z podmínek úlohy} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & \\
AX = a + c & & BX = b + c & \text{Podle věty o vnějším dotyku kružnic} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & \\
X \in k(A, a + c) & & X \in k(B, b + c) & \text{Definice kružnice} \\
 & \Downarrow & & \\
 & X = k(A, a + c) \cap k(B, b + c)\,. & &
\end{array}$$

Symbolicky se zapisuje rovněž konstrukce, důkaz i diskuse úlohy. V konstrukčních úlohách se klade důraz na „logickou" stránku řešení. Proto se v knize vyskytuje konstrukčních úloh poměrně málo (celkem kolem 40), nejsou umělé, ale využívají vyložené teorie. Tam, kde by žákům činilo potíže najít samostatně souvislost s teoretickými partiemi, jsou zařazeny úlohy, které ukazují „přirozenou" cestu. Např. před úlohou *Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho základen a úhlopříček* je uvedena úloha *Jsou dány kružnice f_1, f_2 a vektor $\vec{v}$. Sestrojte vektor rovný vektoru $\vec{v}$, jehož počátek je bodem kružnice f_1 a konec bodem kružnice f_2.*

Mimo konstrukční úlohy řeší žáci úlohy „na rýsování" (patrně především s cílem naučit se formulovat jisté závěry na základě pozorování před důkazem).

V paragrafu o konvexních útvarech se zavádějí potřebné pojmy, dokazuje se konvexnost kruhu a vnitřku kruhu a věta o průniku konvexních útvarů.

Po definici rozdělení roviny na části* se formuluje

ZV IX: *Obyčejná uzavřená lomená čára dělí rovinu na dva souvislé útvary, z nichž jeden je omezený, druhý neomezený.*

Tím je připravena půda pro jednotné pojetí pojmů úhel, mnohoúhelník atp. (Mnohoúhelníkem nazýváme útvar složený z obyčejně uzavřené lomené čáry a z omezeného útvaru, který tato čára vytíná z roviny.) Dále se studují trojúhelníky a čtyřúhelníky a definuje se shodné zobrazení.

Soupis základních vlastností geometrie dovršuje

ZV X: *Jsou-li dány dva různé body roviny, existuje neidentické shodné zobrazení, ve kterém jsou tyto body samodružné.*

Jí se zaručuje existence osové souměrnosti. Vlastnosti I—X jsou základem celé planimetrie.

---

* Říkáme, že útvar f dělí rovinu na dva souvislé útvary f_1 a f_2, jestliže a) f je společnou hranicí útvarů f_1 a f_2, b) sjednocením f, f_1 a f_2 je celá rovina, c) útvary f_1 a f_2 jsou otevřené, neprázdné a disjunktní, d) každé dva body útvaru $f_1(f_2)$ lze spojit obyčejnou lomenou čarou, která celá leží v $f_1(f_2)$.

Všimněme si podrobněji paragrafu o zobrazení, abychom si uvědomili, nakolik jsou propracované potřebné pojmy (dříve než se probírá klasifikace shodností ve III. kapitole) a jaký je způsob samostatné práce žáků v kapitole zabývající se touto abstraktní tematikou. V textu se uvádějí příklady těchto zobrazení:

1. Zobrazení $\mathbf{R}$ (průmět čtyřúhelníka $ABCD$ na kružnici jemu opsanou, je-li střed promítání středem této kružnice).
2. Středová souměrnost $\mathbf{S}_0$ o středu O.
3. Zobrazení $\mathbf{Q}$, které převádí přímku v konchoidu.

Po probrání zobrazení vzájemně jednoznačného a některých pojmů pomocných se definuje skládání zobrazení. Přitom je zavedena tato symbolika: Je-li X' obraz bodu X v zobrazení $\mathbf{P}$, píšeme $\mathbf{P}(X) = X'$. V důsledku tohoto pojetí zapisujeme skládání zobrazení v pořadí opačném k provádění skládání. Prvý příklad na součin zobrazení je netriviální: $\mathbf{QS}_0$. Zápis $\mathbf{QS}_0(X) = X''$ ovšem znamená, že $\mathbf{S}_0(X) = X'$, $\mathbf{Q}(X') = X''$. Ukazuje se, že skládání zobrazení nemusí být komutativní ($\mathbf{S}_B\mathbf{S}_A \neq \mathbf{S}_A\mathbf{S}_B$), dokazuje se, že je asociativní. Dále se definuje inverzní zobrazení k danému zobrazení ($\mathbf{P}^{-1}$) a bez názvu se uvádí involutorní zobrazení ($\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0^{-1}$). Cvičení mají opět charakter tvořivé práce. Uveďme ukázky několika z nich.

1. Vymysli si aspoň dvě různá vzájemně jednoznačná zobrazení jedné ze dvou soustředných kružnic na druhou.
2. Je dán jistý bod O. Zobrazení $\mathbf{P}$ je definováno takto: a) $\mathbf{P}(O) = O$, b) Je-li $A \neq O$, potom je $\mathbf{P}(A) = A'$, $A' \in \overrightarrow{OA}$, $OA' = 2OA$. Zvol několik bodů a urči jejich obrazy v zobrazení $\mathbf{P}$. Co je obrazem kružnice o středu O v zobrazení $\mathbf{P}$?
3. Bod O náleží přímce k. Nakresli (barevnými tužkami) obraz v souměrnosti $\mathbf{S}_0$ a) poloroviny s hranicí k, b) libovolné polopřímky s počátkem O, c) libovolné kružnice o středu O, d) libovolného dutého úhlu s vrcholem O.
4. Urči obrazy několika bodů v zobrazení $\mathbf{S}_0\mathbf{P}$. Urči obrazy týchž bodů v zobrazení $\mathbf{PS}_0$. Co pozoruješ? Formuluj tvrzení a odůvodni ho.
5. Definuj zobrazení $\mathbf{P}^{-1}$ inverzní k zobrazení $\mathbf{P}$. Urči zobrazení $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{S}_0\mathbf{PS}_0$.
6. Urči zobrazení a) $\mathbf{S}_0\mathbf{QS}_0$, b) $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}_0\mathbf{Q}$, c) $\mathbf{QQ}$, $\mathbf{QQQ}$. Kresli obrázek.

Třetí kapitola se jmenuje Shodná zobrazení a shodnost útvarů. Po odvození základních vlastností shodnosti se studují vlastnosti shodných útvarů, osová souměrnost kružnice, přímky a úsečky, kolmost přímek, vzdálenost bodu od přímky, vzájemná poloha přímky a kružnice, shodnost trojúhelníků, vztahy mezi stranami a úhly v trojúhelníku, středová souměrnost a vlastnosti trojúhelníků. Přitom se vydatně využívá souměrností a každá partie má ucelený charakter.

Ačkoliv je již na začátku knihy zavedena vzdálenost dvou bodů (jako nezáporné číslo), studují se v celé knize jen ty vlastnosti vzdálenosti, které jsou nezávislé na jednotkové úsečce. Otázka míry a měření úsečky se v knize neřeší. S problematikou míry seznamuje však autorka žáky na příkladu míry úhlu. Po jednoduchých příkladech z praxe formuluje definici míry: Říkáme, že na množině úhlů je definována míra úhlu, je-li každému úhlu přiřazeno kladné číslo zvané jeho míra tak, že

a) shodné úhly mají rovné míry,

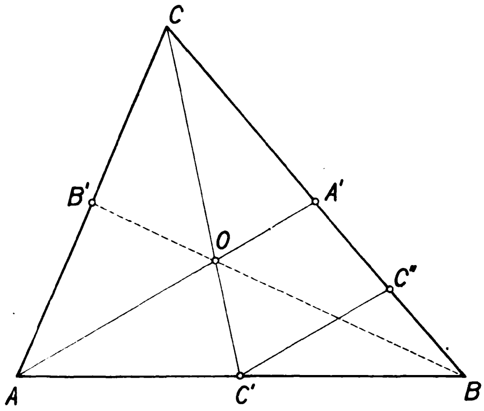
b) míra úhlu, který je součtem dvou úhlů, je rovna součtu měr těchto úhlů.

Naznačme stručně postup určení míry úhlu pomocí „teoretického úhloměru“. Množinu bodů polokružnice nad průměrem MN o středu U uspořádejme (X je před $Y \Leftrightarrow X \neq Y$ a $\overrightarrow{UX} \in \sphericalangle NUY$) a konstruujme na ní „dvojkové stupnice“

$$0\,\frac{\omega}{2^n},\quad 1\,\frac{\omega}{2^n},\quad 2\,\frac{\omega}{2^n}, \ldots, 2^n\,\frac{\omega}{2^n}, \ldots, 2^{n+1}\,\frac{\omega}{2^n}$$

pro libovolné přirozené n (ω je libovolné kladné číslo přiřazené pravému úhlu). Libovolnému bodu X uvažované polokružnice přiřadíme číslo x jako horní hranici čísel přiřazených bodům všech stupnic kružnice, které bodu X předcházejí v uspořádání. Číslo x je mírou úhlu NUX. Je samozřejmé, že zcela exaktní zavedení míry úhlu není v tomto věku žáků možné; představa o problémech měření je však uvedeným postupem dobře vysvětlena.

Všimněme si dále podrobněji studia shodností. Výsledek, že součin dvou osových souměrností o osách k sobě kolmých je středová souměrnost, je podnětem k otázkám: Jaké shodnosti dostaneme, skládáme-li jiné osové souměrnosti? Lze každou shodnost nahradit součinem osových souměrností? Řešení úlohy: „*Jsou dány dvě trojice bodů A, B, C a A', B', C' tak, že $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$. Zjisti, zda je možno sestrojit shodnost složenou z osových souměrností, která převádí bod A do bodu A', bod B do bodu B', bod C do bodu C'*“ vede postupně ke konstrukci tří vhodných osových souměrností a k poučce *sss* o shodnosti trojúhelníků. Potom je přirozená věta: *Každé shodné zobrazení je buď osovou souměrností, nebo součinem dvou či tří osových souměrností.* Důkaz (a nejen tento důkaz) rozehrává autorka jako soupeření s fiktivním protivníkem, který „si myslí jistou shodnost, ale neřekl nám o ní nic“ a my máme přijít na to, o jakou shodnost jde. Maně si vzpomeneme, že akademik Jarník se rovněž nebál vzít do hry svého ε-nepřítele, ale důkazy v našich učebnicích pro děti jsou dost suchopárné. V průběhu důkazu se samozřejmě odvodí i věta, že shodnost je určena třemi nekolineárními body a jejich obrazy. Po pozorování konstrukce obrazu bodu v součinu dvou osových souměrností o rovnoběžných a různoběžných osách se definuje posunutí a otočení (a hledají se samodružné body těchto shodností). Součin tří osových souměrností se zatím probere jen částečně (osy patří témuž svazku) a klasifikace shodností v rovině se uzavírá originálním způsobem po probrání jistých vlastností vektorů. Posunuté zrcadlení je definováno jako součin posunutí a osové souměrnosti, přičemž vektor posunutí je rovnoběžný s osou souměrnosti. Dále se studují vektory a posunutí. Vektor je definován jako uspořádaná dvojice bodů. V úvodu paragrafu se ukazuje potřeba (i praktická) takového pojmu. Studuje se obraz vektoru v posunutí a dochází se k definici rovnosti vektorů. (Vektor $\vec{a}$ je rovný vektoru $\vec{b}$ ($\vec{a} \equiv \vec{b}$), je-li vektor $\vec{b}$ obrazem vektoru $\vec{a}$ v jisté translaci.) Takovéto pojetí velmi snadno řeší otázky o vlastnostech rovnosti vektorů (relace ekvivalence) a součtu vektorů. Důležité je rovněž zavedení rozkladu vektoru na vektory. Dále se dokazuje, že každá translace je množinou jistých vektorů. Vlastností vektorů se průběžně užívá ke studiu planimetrických vět. Jako příklad schematického zápisu důkazu uveďme důkaz věty o těžišti O $\triangle ABC$. Je dokázána věta 24,9: „*Rovnoběžné průměty rovných vektorů na přímku jsou rovné vektory*". Nejdříve se dokáže, že těžnice $\overline{AA'}$ a $\overline{CC'}$ mají společný bod O. Následuje tento důkaz rovnosti $OC = 2OC'$ (C'' je průmět bodu C' na přímku BC směrem AA' (obr. 1)).



Obr. 1.

$CA' = A'B$ a $AC' = C'B$ a $C'C'' \parallel AA'$	Z předpokladů
$\Downarrow$	
$A'C'' = C''B$	V 24,9
$\Downarrow$	
$CA' = 2A'C''$	
$\Downarrow$	
$CO = 2OC'$	V 24,9

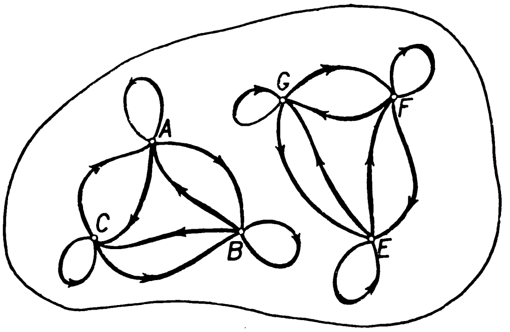
Potom se dokazuje, že i třetí těžnice prochází bodem O.

Některé důležité pojmy jsou v knize zaváděny postupně. Tak např. *relace ekvivalence* se studuje nejdříve jako vlastnost rovnoběžnosti přímek a ukazují se příklady relací, které nejsou ekvivalencemi (relace protínání přímek a relace uspořádání). Dále se dokazuje, že relací ekvivalence je relace shodnosti útvarů ($f \equiv f'$) a relace rovnosti vektorů ($\vec{a} \equiv \vec{b}$). Studium ekvivalence je v knize dovršeno rozkladem množiny na třídy vzhledem k relaci ekvivalence. Zde se vychází z rozkladu množiny na třídy tak, že platí:

1. Každý prvek množiny náleží do jedné a jen jedné třídy.
2. Prvek X patří do téže třídy s prvkem Y tehdy a jen tehdy, je-li X v relaci s Y.

Na příkladech rozdělení žáků do skupin podle relací a) mít touž známku z matematiky, b) být přítelem, c) být před někým v seznamu (kromě příkladů matematického charakteru) se odvozuje, že uvažovaná relace musí být reflexívní, symetrická a tranzitivní. Na obrázku (v originále dvojbarevném) (obr. 2) množiny, ve které je definována relace ekvivalence, se ilustrují šipkami vlastnosti této relace a rozdělení množiny na třídy. Přitom prvky množiny (označené body) mohou být stejně dobře vektory, žáci, geometrické útvary, pro něž je definována shodnost atp. Je tak pěkně ukázána polyvalence matematických schémat a abstraktní charakter ekvivalence.

Postupné zavádění tak abstraktních pojmů jako relace ekvivalence je patrně výhodné, neboť žák si může dobře uvědomit podstatu pojmu. Z druhé strany však tak pozdní zavedení rozkladu množiny na třídy vzhledem k relaci ekvivalence neumožňuje plně využít ekvivalence při zavádění nových pojmů.



Obr. 2.

V souvislosti s rotací se zavádí orientovaný úhel, velikost orientovaného úhlu a souměrnost útvarů.

Teoretická příprava umožňuje před koncem knihy zavést pojem grupy zobrazení. Opět se ukazují nejen příklady grup, ale i příklady množin, které grupami nejsou (množina všech středových souměrností roviny). Zajímavými příklady grup jsou grupy přímých shodností, které reprodukují danou síť roviny (čtvercovou, obdélníkovou atp.).

Geometria Zofie Krygowské je velmi poučná kniha o tom, jak moderním způsobem pojímat geometrii na střední škole. Zásadní roli v ní hrají geometrická zobrazení, která se stávají skutečným základem geometrie. Kniha je psána živým jazykem, patrně do značné míry přístupným žákům. Důležitým prostředkem ve vyučování je schéma. Slouží jednak k jasnému vyjadřování stavby důkazů, odhaluje však i proces abstrakce při tvoření pojmů. Typický je příklad schématu ekvivalence. Pojmy jsou zaváděny přirozeným způsobem.

Kniha Geometria je svým pojetím i zpracováním bezesporu netradiční učebnicí geometrie. V současné etapě naší práce na modernizaci vyučování matematice je její studium velmi užitečné.