

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Beloslav Riečan

Na množinovou tému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 6, 338--342

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138540>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1978

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

resp. derivací zprava, funkce f podle x v bodě a . Obě tato čísla charakterizují rychlost změny funkční hodnoty $f(x)$ při narůstání hodnot argumentu x ve směru zleva vpravo, a to v prvním případě vzhledem k jistému levému okolí bodu a , ve druhém případě vzhledem k jistému pravému okolí bodu a . Přitom termín derivace zprava vyvolává představu, jakobychom zkoumali a charakterizovali změnu plynoucí ze změny hodnot argumentu při postupu zprava vlevo, tj. jakobychom zkoumali derivaci ve směru $-i$. Obdobně tomu je ve vícerozměrných prostorech.

Tomuto terminologickému rozporu by snad bylo možno předejít zavedením názvů

levá derivace, resp. pravá derivace

funkce f v bodě a .

Ostatní upřesnění, tj. explicitní vyjádření směru s nebo jeho zamlčení, jde-li o triviální jednorozměrný případ, nepůsobí potíže.

Obdobně by bylo možno názvy „limita zleva, limita zprava“ nahradit termíny „levá limita, pravá limita“. Příslušné pojmy se vztahují k jednostranným okolím bodů, pro která již zdomácněly názvy „levé okolí, pravé okolí“.

Tento námět je nejspíše napadnutelný v souvislosti s jednostrannou spojitostí, kde by vyžadoval zásahy nejméně netradiční.

Např.:

dosavadní pojmenování	nové pojmenování
spojitost zleva (zprava)	levá (pravá) spojitost
funkce spojitá zleva (zprava)	levospojité (pravospojité) funkce

Na první pohled „nejcizější“ názvy „levospojité“ a „pravospojité“ mají v jazyce své užitečné a zcela běžné předchůdce:

levotočivá, levoběžná, levobřežní atd.

Uvedené ukázky chtějí především upozornit na důvěru, s jakou se lidé různých pracovních zájmů chtějí opírat o matematiku nejen při řešení konkrétních úloh, s nimiž se setkávají, ale i při vyjasňování pojmů, názvů, symbolů apod. Spoléhají přitom na schopnost matematiky zavádět do věci řád. V zájmu celku by jistě bylo vhodné využívat této důvěry (a přiměřeným způsobem ji opět navracet) tak často a tak intenzívně, jak je možné.

Josef Schmidtmayer

Na množinovou tému

Beloslav Riečan, Bratislava

Iste nie som jediný, na koho hlboko zapôsobil článok P. HILTONA. *Čo je moderná matematika*, uverejnený v *Pokrokoch*. Zaimponovali mi jeho výstraha pred „protireformáciou“, podnecovanie tvorivých matematikov k tomu, aby sa zaoberali problémami matematickej výchovy, a skutočnosť, že za základný problém považuje otázku úrovne učiteľov a ich školenia. Ak sa po prečítaní článku napísaného v takom štýle a koncepcii odhodlávam sám k vyjadreniu niektorých svojich názorov, robím to tak v presvedčení, že jestvujú otázky, ktoré si musíme vyriešiť sami. Takou je aj otázka matematickej výchovy mládeže, pri ktorej musíme mať na zreteli napr. úroveň našich učiteľov, možnosti našich tvorivých matematikov – skutočných i potenciálnych spolupracovníkov na školskej problematike, naše tradície odborné i metodické a pod. Preto nemožno prebrať bez zmien celý, hotový a trebárs overený zahraničný projekt, čo ako by to bolo pohodlné. Pri každom projekte treba intenzívne myslieť na jeho realizáciu. Pravda, vytváranie vlastných koncepcií nemusí (a ani by nemalo) ešte znamenať izoláciu, ignorovanie cudzích výsledkov, neinformovanosť.

U nás ešte len stojíme pred splnením hlavnej úlohy; mohli by sme všetko poukázať, ale aj všeličo zlepšiť, ponaprávať. V školských rokoch 1980/81–1983/84 sa bude postupne v 5.–8. ročníku základnej školy zavádzať nový obsah vyučovania matematiky. Vzhľadom na to, že ide o II. stupeň – oblasť neobvyčajne citlivú a zároveň oblasť kľúčového významu, máme

veľkú šancu, ktorú by sme nemuseli celkom premárniť. Toho by si mala byť vedomá celá matematická verejnosť. Otázka vyučovania matematiky je vecou nás všetkých, prinajmenej ako rodičov. Neobstojí pohodlnícky argument, že sa v tejto problematike nevyznáme, že nemáme odpovedajúcu pedagogickú prax, že teória vyučovania matematiky je samostatná disciplína, v ktorej (a to je pravda) sa málokto z nás vie orientovať. Nejde totiž o systematické znervózňovanie ľudí, ktorí vzali na seba ťarchu zodpovednosti, nejde o nevhodné zasahovanie do ich kompetencie. Ide či malo by ísť o sústavnú odbornú pomoc našej školy, bez ktorej ťažko dospejeme k rozhodnému úspechu. Pokiaľ ide o prácu, je jej tu (a nielen tu) dosť pre každého matematika.

Množiny a aplikácie

Leitmotívom diskusií uvádzaných v Hiltonovom článku bola otázka užitočnosti matematiky, otázka vzťahu čistej a aplikovanej matematiky. Pretože mi názov aplikovaná matematika nie je veľmi sympatický, budem hovoriť radšej o aplikáciách matematiky.

Vďaka teórii množín vznikli mnohé nové matematické disciplíny, iné sa zas od základu prebudovali. Celá matematika s obľubou a úspešne používa množinovú terminológiu a označenia. Tieto argumenty možno, pravda, zoslabiť tým, že ich prehlásime za vlastnosti čistej matematiky. Lenže množiny majú zásadný význam aj pre aplikácie. Existuje tu prinajmenej časová (ale ona bude aj príčinnou) súvislosť medzi rozvojom teórie množín a podstatným rozšírením aplikácií matematiky. Veď práve toto storočie (v matematike „množinové“) zaznamenalo proces, ktorému sa

hovorí matematizácia vedy. Bolo by tomu tak, keby sa súčasná matematika (nepochybne množinovo orientovaná) vzdaľovala iným odborom, či ich dokonca celkom ignorovala?

Uvediem tri príklady. Azda najväčšiu reklamu matematike dnes robia samočinné počítače. Pomocou počítačov bolo možné rozriešiť množstvo rôznorodých praktických problémov, ktoré boli bez nich neriešiteľné. Pritom v pozadí stoja viaceré abstraktné matematické teórie. Odborníci, špecialisti v matematickej informatike, presadzujú, aby sa toto pozadie premietlo aj do vyučovania, aby sa vyučovanie neobmedzovalo na nácvik technologických postupov. Iným aspektom používania počítačov je zvýšenie požiadavok na presnosť vyjadrovania sa.

Druhou najpoužívanejšou matematickou disciplínou je pravdepodobne matematická štatistika. Pomáha vidieť zákonitosti tam, kde vládne na prvý pohľad úplná ľubovôľa. A či práve tejto disciplíne nedal A. N. KOLMOGOROV pevnú pôdu pod nohami svojou množinovou axiomatikou?

Konečne všimnime si aplikácie tak povediac klasické, javy popísané napr. diferenciálnymi rovnicami. I tu nastali v metodike riešenia priam prevratné zmeny, charakterizované najmä funkcionálnou analýzou, nemysliteľnou bez množinového stanoviska.

Množiny a geometria

Možno niektoré modernizačné projekty podcenili úlohu geometrie. Pravda je však aj to, že ak zavádzame do výučby nové prvky, metódy a fakty, zavedenie ktorých si vyžaduje rozvoj matematiky i sám život (počítače, štatistika), musí sa niečo aj vy-

nechať. Pritom množiny sa nebijú s geometriou. Naopak, taká funkcionálna analýza na mňa vždy pôsobila dojmom geometrizácie teórie funkcií i algebraických štruktúr. Myslím, že aj metodicky je množinová symbolika prínosom pre geometriu. V prvom rade je to zápis faktov typu: bod A je priesečníkom priamok p, q , teda napr. $\{A\} = p \cap q$ a pod. Ďalej sú viaceré geometrické názvy (napr. geometrické miesto bodov, rovinný útvar), ktoré môžu byť nahradené jednotiacim pojmom množina. Napokon chápanie obsahu či objemu ako zobrazenia pomáha tieto názvy začleniť do všeobecnejších súvislostí. A či nie je fascinujúca tá okolnosť, sprostredkovaná teóriou množín, že pravdepodobnosť i obsah majú tú istú štruktúru? Pritom tu ide o otázky vôbec nie komplikované a už aj metodicky vyskúšané.

Kedy zaviesť množiny?

Zdá sa, že otázka nie je v tom, či zaviesť do výuky množiny, ale kedy tak urobiť. Podľa mojej mienky niet dôvodu proti tomu, aby sa základné pojmy nezaviedli čo najskôr. Bráni nám v tom vrodená či získaná konzervatívnosť a opatrnosť. Podobne postupujeme aj v niektorých iných klasických prípadoch a tiež na škodu vecí.

Tak napr. riešenie rovníc. Existujú pracovné listy pre malé deti, v ktorých sa na elementárnej výpočtovej úrovni, ale v bežnej miere abstrakcie riešia rovnice. Viacerí sme si na vlastných deťoch overili reálnosť takéhoto postupu. Pritom sa systematický výklad o rovniciach zvykol odkladať až do 8. triedy. Pravdaže, deti viaceré príklady dokážu vyriešiť vtipnejšie, bez ťažkopádneho zostavovania rovníc. Ale aj tak sa im zamlčuje veľmi účinný a jednoduchý prostriedok k riešeniu praktických úloh.

Iným príkladom sú základy diferenciálneho a integrálneho počtu, také dôležité pre niektoré partie fyziky. Tradícia „vyššej matematiky“ ich však nemilosrdne zaraďuje na vysokú školu. V zajatí spomienok na vlastnú výchovu zabúdame, že sa infinitezimálny počet dá vykladať na rôznej úrovni a v rôznom rozsahu. I celkom elementárne.

Všeobecne sa neodporúča učiť deti v predškolskom veku čítať. A predsa stačia dve písmená M a A, aby dieťa vedelo prečítať slovo MAMA. Aj čítať sa dá na rôznej úrovni. Všetci si myslíme, že vieme dobre čítať, ale o čo onakvejšie je čítanie členov činohry Národného divadla? Tak isto možno na rôznej úrovni vyučovať rovnice, derivácie i množiny.

Matematika a prax

Nezdá sa mi správne ani vhodné delenie matematiky na čistú a aplikovanú. Veď v podstate celú matematiku možno aplikovať a vo všetkých matematických disciplínach by sme mali o to usilovať. Keď už, hovoril by som o matematikoch – teoretikoch a matematikoch – praktikoch. Lenže čo je z jedného pohľadu prax, to je z iného čistá teória. Takto dospievame k menej vyhranenému, tolerantnejšiemu a zároveň pravdivejšiemu stanovisku. Ideálnym je, pravda, prípad matematika, zároveň teoretika i praktika, a k tomu ešte pokiaľ možno v širokej škále odborov. Nemožno očakávať, že sa takíto matematici budú vyskytovať veľmi často. Preto nám nezostáva nič iné ako sa špecializovať, každý si zastať svoje miesto na obrovitej stavbe matematiky, navzájom spolupracovať, učiť sa a podporovať.

V posledných desaťročiach začal pôsobiť aj v našej matematike nový faktor:

matematici pracujú už nielen na školách a vedeckých ústavoch, ale v stále rastúcom počte aj vo výrobných podnikoch, predovšetkým však vo výpočtových strediskách. Pritom sa časť z nich cíti byť intelektuálne a odborne nevyťaženu. V ich praxi prevláda stereotyp, často len zber údajov, matematický aparát nezvykne presahovať základné číselné operácie. Práca matematika býva skôr organizačná ako odborná. Netreba ju však podceňovať. To, čím by matematik najviac mohol prispieť praxi, je spôsob myslenia. Matematické myslenie je vhodným kontrastom k mysleniu inžinierskemu a nepôsobí dobre, ak niektorá z týchto komponent chýba. A otázka úrovne je relatívna, z niečoho treba začať; hlavné je nájsť s inžiniermi spoločný jazyk. Pritom je však žiaduce sledovať ďalej vývin vo svojom vlastnom odbore – matematike a udržiavať sa aspoň na dosiahnutej absolventskej úrovni.

Uvedené skutočnosti majú význam i pre vyučovanie matematiky. Špecialisti v teórii vyučovania už dávno zdôraznili význam aplikácií pre vyučovanie; hovoria o matematizácii reálnych situácií. Ak sa im tieto zásady nedarí plne realizovať v školskej praxi, súvisí to aj so všeobecnou úrovňou aplikácií, s atmosférou okolo nich, s matematikmi, ktorí sa im profesionálne venujú. Ako vyučujeme napr. pravdepodobnosť? Či už postupujeme tým či oným spôsobom, vždy hádzeme kockou, mincou, vyťahujeme guľky z urny a karty. Matematika budí nanajvýš dojem inteligentnej hry. Podobná odtrhnutosť od života sa prejavuje aj v iných oblastiach školskej matematiky. Má to dve príčiny. O jednej sme už hovorili. Súvisí s nedostatkom tradície, niet takých zbierok, z ktorých by sa dali vhodné príklady aplikačného charakteru odpisovať, a kto ich má vymýšľať? Druhá príčina je v tom, že umelé, školské príkla-

dy sú priezračnejšie, ľahšie sa na nich vysvetlí hlavný vtip, abstraktná logická štruktúra.

Tvorivosť

Keď som už tak perfektne presvedčal (a sám seba aj presvedčil), že čistá matematika vlastne neexistuje, žiada sa mi povedať niekoľko slov na jej obhajobu. Často sa kritizuje úroveň matematických prác, hodnota a užitočnosť dosiahnutých výsledkov (azda až príliš často). Vedie to k určitému dešpektu k matematickým prácam, ba až k tvrdeniu, že pôvodná matematická tvorba nemá zmysel. Lenže, kde vziať kritérium hodnoty matematickej práce? Overiť správnosť výsledkov, to sa zvyčajne viac-menej dá. Ale odmerať hodnotu niet ako. Keby k rozvoju matematiky stačili veľké objavy, ktoré časopisy by boli ochotné uverejňovať tie iné? Nadmerné, až deprimujúce zdôrazňovanie kvality zaváňa trochu fermatizmom. Fermatistami bol raz nazvan prof. KUROŠ matematik, ktorý nikdy nič nevyriešil, nedosiahol nové výsledky, ale sú opradení nimbom: riešia ťažkú úlohu. Niekedy dôležitejší ako výsledok je metóda, ktorou bol dosiahnutý. Pri úsilí o riešenie otvorených problémov, o dosiahnutie nových výsledkov, je zase dôležitejší onen proces myslenia. V tom je hlavný prínos tvorčej práce v matematike. Táto zložka matematického myslenia je dôležitá, ba nevyhnutná aj pre aplikácie, aj pre vyučovanie na skutočne kvalitnej úrovni.

Ešte o jednej téze nám pochybnosti: Ľahšie zovšeobecniť známy výsledok ako rozriešiť konkrétny problém. Tak predovšetkým, bez zovšeobecňovania by nebolo matematiky. Práve zovšeobecnenie môže znamenať niekedy podstatný prínos pre

danú oblasť. Možno primerané zovšeobecnenie daného konkrétneho problému by viedlo k riešeniu oveľa efektívnejšiemu a účinnejšiemu. Možno je daný problém rozriešený už vo všeobecnejšej podobe a len neznalosť abstraktnejšieho materiálu bráni riešiteľovi v jeho použití. I citovaná téza vznikla chybným zovšeobecnením konkrétnych skúseností.

Niečo pravdy však na tom bude. Súvisí to s výberom výskumnej problematiky a v tom niet receptu. Nebolo by výskumnej práce, keby bola dopredu známa optimálna cesta. To platí o výskume základnom, aplikáciach i vyučovacích metódach. Všade nás čaká len intenzívna práca a jej poctivé hodnotenie. S veľkým rizikom, že výsledky nebudú adekvátne vynaloženej námahe. Ale veď preto sme sa dali na matematiku, že nás baví sama osebe. Aj samotný proces tvorenia poskytuje určitú satisfakciu.

vyučování

25 let ATM
a její výroční konference

Blanka Kussová

Z iniciativy malé skupiny anglických učiteľů pod vedením profesora C. GATTEGNO bylo v roce 1952 založeno Sdružení pro vyučovací pomůcky v matematice (Association for Teaching Aids in Mathematics) – ATAM. Do této doby jedinou

platformou pro výměnu názorů na vyučování matematice byla Matematická společnost (Mathematical Association), vydávající časopis *Mathematical Gazette*, která však nedokázala uspokojit zájmy a potřeby široké učitelské veřejnosti. Ve své práci se totiž orientovala převážně na problematiku „grammar schools“ (u nás jim zhruba odpovídají výběrová gymnázia) a navíc ostentativně preferovala otázky týkající se změn obsahu matematiky, zatímco dalším aspektům souvisejícím s výukou matematice věnovala malou pozornost. Organizace ATAM vznikla jako přirozená reakce na dosavadní situaci. Mottem nově založené společnosti se stalo heslo: „Reforma ve vyučování matematice neznámá jen modernizací obsahu školské matematiky, ale – a to především – intenzivní rozvoj nových učebních metod.“ V roce 1962 byla ATAM přejmenována na *Association of Teachers of Mathematics – ATM* – neboť se ukázalo, že dosavadní název nevystihoval v plné šíři strukturu a činnost společnosti, která si po dobu své existence získala širokou popularitu v Británii i v zahraničí. V současné době počet členů ATM převyšuje 7000; přitom velké procento představují právě učitelé základních a středních škol nevýběrového typu.

I když ATM oslavovala v minulém roce teprve své „stříbrné jubileum“, přispěla za tuto dobu podstatně k modernizaci vyučování matematice, a to zejména – jak ostatně hlásá její krédo – na úseku rozvoje nových vyučovacích metod, vytváření moderní didaktické techniky a nových způsobů práce se třídou i s jednotlivci. Důležitosti postavení, jež ATM v anglickém školství zaujímá (je zastoupena prakticky ve všech národních komisích pro vyučování i v komisích pro přípravu testů k závěrečným zkouškám), bylo možné do-