Jan Vyšín

Co nového přináší Nico?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 2, 104--107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138528

dostatečná připravenost posluchačů, vyplývající z toho, že se posluchači nepřipravují samostatně a soustavně během semestru.

Autor zastává názor, že zadávání úloh odstraňuje pasivitu posluchačů a vede je k samostatnosti (posluchač může přijít při delším čase na přípravu na originální řešení). Odpadá zdlouhavé čtení a zadávání textu, výběr příkladů prováděný pedagogem zaručuje vhodný stupeň obtížnosti a metodickou návaznost, spíše se projeví iniciativa učitele v uvedení několika způsobů řešení dané úlohy (mnohdy jednodušší cestou) nebo poukazem na to, že nevyčerpali zcela danou problematiku. Zavádění volného příkladu vede k seznámení s jinou literaturou, při cvičení mají posluchači možnost soustředit se na daný výběr úloh a takto se orientovat v rozsáhlé látce a porovnat, co je důležité.

Způsob a metodu řešení fyzikálních úloh je třeba vybrat podle vyspělosti posluchačů (těžší formy ve vyšších ročnících studia). Metoda se bude lišit i podle úrovně posluchačů v jednotlivých studijních skupinách a na jednotlivých oborech studia. V každém případě však záleží na vedení cvičení a na volbě metody řešení fyzikálních úloh. V jejich výběru by se měla projevit osobnost pedagoga.

CO NOVÉHO PŘINÁŠÍ NICO?

JAN VYŠÍN, Praha

Sešit Nico 8 z května 1971 obsahuje mimo drobnější příspěvky a zprávy šest větších článků. Předně je tu otištěna přednáška PETERA HILTONA (USA) o topologii na střední škole, kterou autor proslovil na konferenci o vyučování geometrii na středoškolské úrovni, pořádané universitou Southern Illinois v Carbondale. Dále tu najdeme text přednášky JEANA DRABBEHO, proslovené r. 1970 na mezinárodní stáži belgického *Centra* v Knokke a pojednávající o použití barevných diagramů v logice (výrokové algebře). Třetí článek o řešení soustav lineárních rovnic od pracovnice *Centra* paní GILBERTE CAPIAUX uplatňuje důsledně vektorové pojetí rovnic. Další článek PIETERA CHESQUIEREA o nezávislosti tří jevů náleží do série článků, které se zabývají otázkou vyučování základům teorie pravděpodobnosti na střední škole. Příspěvek paní FRÉDÉRIQUE, nazvaný *Rimbambelles*, je zaměřen opět k elementárnímu stupni a popisuje provedení pokusu, kterým se měly devítileté děti pomocí grafů přivést k rozlišování konečné a nekonečné množiny. Šestý ze zmíněných článků je od prof. PAPYHO a jmenuje se *Věta o dimenzi vektorových prostorů.*

Různé zahraniční materiály ukazují, že otázka zařazení topologie do středoškolských osnov je živá a je předmětem mnoha diskusí; proto se k tomuto tématu vrátíme v některém z příštích čísel *Pokroků*. Totéž platí i o základech teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Ze zbývajících čtyř článků zasluhuje asi nejvíce pozornosti didaktický nápad G. Papyho — proto si ho všimneme podrobněji.

Začíná se vzrušenou obhajobou „linearizace“ matematiky, tj. vektorových prostorů jako nosného pilíře modernizace školské matematiky. Je lineární vektorová algebra těžká či lehká? Profesor Peter Hilton se prý kdysi v Southamptonu dožadoval s jistou dávkou anglosaského humoru filosofického výkladu skutečnosti, proč lineární algebra — přece tak jednoduchá — doslovně láme vaz tolika studentům v prvních dvou letech universitního studia. Přes veškeré ujišťování matematiků-profesionálů *není* lineární algebra lehká – praví Papy. Proto je tak důležitá otázka, jak lineární algebře vyučovat hlavně na střední škole. Mnoho zla působí její formální komplikovanost; tu neodstraníme, když specializujeme dimenzi vektorového prostoru – naopak tím leckdy zatemníme obecnost metod. K vektorovému prostoru máme přistupovat strukturálně, přes pojem aditivní grupy Γ a skalárního násobení prvky přidruženého tělesa $\mathscr{T}$ (užívá se strukturálního zápisu $(\mathscr{T}, \Gamma, +)$). Explicitní uvedení axiómů (afinního) vektorového prostoru má hlavně ten význam, že ukazuje možnost ztotožnit obě množiny Γ, $\mathscr{T}$. V strukturálním přístupu nefiguruje pojem *dimenze vektorového prostoru*; je to klad a zároveň zápor: z matematického hlediska se bez pojmu dimenze neobejdeme, z hlediska pedagogického stojíme před těžko řešitelným problémem: dokázat bez tradičního aparátu (hodnost matic a věty o řešení soustav lineárních rovnic) jednoduše, názorně a přece zcela obecně větu o dimenzi vektorového prostoru:

Má-li vektorový prostor jednu konečnou bázi o n prvcích, pak každá jeho báze má právě n prvků.

Papy potřebuje pro svůj výklad několik základních pojmů:

(a) Vektor $\mathbf{v} \in \Gamma$ je *lineární kombinací vektorů* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \Gamma$, právě když existují prvky $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{T}$ (z přidruženého tělesa) tak, že

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n .$$

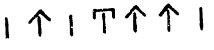
Pro tento pojem se zavádí slovní zkratka „combili“ (combinaison linéaire).

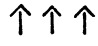
(b) Konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru $(\mathscr{T}, \Gamma, +)$ se nazývá *volná*, není-li žádný z jejích prvků lineární kombinací ostatních.

(c) Konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru $(\mathscr{T}, \Gamma, +)$ se nazývá *tvořící* (generující), je-li každý vektor z prostoru $(\mathscr{T}, \Gamma, +)$ lineární kombinací vektorů této posloupnosti.

(d) Konečná posloupnost, která je volná a zároveň tvořící, se nazývá *báze*.

Základem manipulace je tzv. *hra s klobouky*. Vektory se znázorňují „kuželkami“ (v zápisu čárkami), na něž se posazují klobouky různých tvarů (barev). Tak např. záznam

 (1)

značí, že vektor  je lineární kombinací vektorů  .

Pro nenulové vektory a nenulové součinitele platí základní pravidlo (P) hry s klobouky:

> Každá permutace klobouků převede pravdivé tvrzení typu (1) v pravdivé tvrzení.

Toto pravidlo se dokáže snadno početně, ukázkově pro určitý počet vektorů — metoda je však obecně platná. Podle pravidla (P) odvodíme např. z pravdivého tvrzení (1) pravdivé tvrzení (2)

(2)

K důkazu základní věty o dimenzi stačí dokázat lemma (L):

> Obsahuje-li vektorový prostor volnou posloupnost o n členech, pak každá jeho tvořící posloupnost obsahuje aspoň n členů.

Z lemmatu (L) plyne věta bezprostředně: Jsou-li B_1, resp. B_2 dvě báze o n_1, resp. n_2 prvcích, je podle (L) $n_1 \geqq n_2$, $n_2 \geqq n_1$, tj. $n_1 = n_2$.

Důkaz lemmatu (L) zapisuje Papy do formy filmového scénáře ve zkrácené formě asi takto:

Volná posloupnost $\underline{\underline{\mathrm{I}}}$

| | | | | | | | |

Tvořící posloupnost $\underline{\underline{\mathrm{II}}}$

⊥ ⊥ ⊥ ⊥

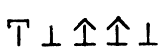
(typ ⊥ značí jinou barvu kuželek)

Jeden prvek volné posloupnosti se připojí k tvořící posloupnosti; vznikne

| ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ,

což je tvořící posloupnost.

Proto vektor | je lineární kombinací ostatních, např.

 *)

*) Koeficienty 0 nejsou přípustné!

Věta (P) dává

$$\hat{\mid}\ \perp\ \bar{\perp}\ \hat{\perp}\ \perp$$

Proto posloupnost

$$\mid\ \perp\ \perp\ \perp$$

je tvořící.

(Zatím je jeden prvek z $\underline{\underline{II}}$ nahrazen jedním prvkem z $\underline{\underline{I}}$; pokračujeme.)
K tvořící posloupnosti

$$\perp\ \mid\ \perp\ \perp$$

připojíme další prvek z volné posloupnosti $\underline{\underline{I}}$; vyjde

$$\mid\ \perp\ \mid\ \perp\ \perp \quad *)$$

Umístíme klobouky např. takto

$$\bar{\mid}\ \perp\ \hat{\mid}\ \hat{\perp}\ \perp$$

Věta (P) dává

$$\hat{\mid}\ \perp\ \hat{\mid}\ \bar{\perp}\ \perp$$

Protože posloupnost

$$\mid\ \perp\ \mid\ \perp\ \perp$$

je tvořící, je i posloupnost

$$\mid\ \perp\ \mid\ \perp$$

tvořící.

(Teď už jsme nahradili dva prvky z $\underline{\underline{II}}$ dvěma prvky z $\underline{\underline{I}}$).

Postupujeme-li tak dále a má-li posloupnost $\underline{\underline{I}}$ více prvků než $\underline{\underline{II}}$, dospějeme ke sporu s předpokladem, že $\underline{\underline{I}}$ je volná. Tím je dokázáno lemma (L) i věta o dimenzi.

Myšlenkově je načrtnutý důkaz mnohem více než hra, i když se zdá, že užívá formy příliš primitivní. Uvážíme-li však jeho eleganci, průzračnost a matematickou instruktivnost ve srovnání s těžkopádným tradičním způsobem i jeho adekvátnost pro věkovou úroveň 15–16 let, určitě vyhraje na celé čáře. A to jsme se vůbec nezabývali otázkou, které věty tradiční lineární algebry se dají odvodit jako důsledky věty o dimenzi!

Poznámka. Komentář k učebnicím pro II. tř. našich gymnasií uvádí větu o dimenzi bez důkazu.

---

*) Situace $\bar{\mid}\ \perp\ \hat{\mid}\ \perp\ \perp$ je nemožná, neboť posloupnost $\underline{\underline{I}}$ je volná.