Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Šik

Užití fuzzy množin v rozhodování za neurčitosti

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 30 (1985), No. 2, 92--105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138451

[14] J. MILNOR and D. HUSEMOLLER (1973): *Symmetric Bilinear Forms*. Springer-Verlag, New York
[15] E. MOISE (1952): *Affine structures on 3-manifolds*. Ann. Math. *56*, 96—114.
[16] T. PARKER (1982): *Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds*. Commun. Math. Phys. *85*, 1—40.
[17] F. QUINN (1982): Ends III. J. Diff. Geom. *17*, 503—521.
[18] T. RADO (1925): *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*. Acta Litt. Sci. Univ. Szegd. *2*, 101—121.
[19] J. H. RAWNSLEY (1981): *Differential Geometry of Instantons*. Communications of Dublin Institute for Advanced Studies, Series A (Theoretical Physics), No. 25.
[20] V. A. ROCHLIN (1974): *New results in the theory of 4-dimensional manifolds* (Russian). Dokl. Akad Nauk. SSSR, *84*, 221—224.
[21] L. SIEBENMANN (1978—1979): *Amorces de la chirurgie en dimension quatre: Un $S^3 \times$ R exotique (d'après A. Casson and M. Freedman)*. Sem. Bourbaki, No. 536.
[22] L. SIEBENMANN (1981—1982): *La conjecture de Poincaré topologique en dimension 4 (d'après M Freedman)*. Sem. Bourbaki, No. 588.
[23] C. H. TAUBES (1982): *Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds*. J. Diff. Geom. *17*, 139—170.
[24] J. H. C. WHITEHEAD (1940): *On C^1 complexes*. Ann. Math. *41*, 809—832.
(Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112)

Přeložil a Dodatky zpracoval Oldřich Kowalski.

Užití fuzzy množin v rozhodování za neurčitosti

František Šik, Brno

1. Úvod

Autoři článku [2] M. Černý, J. Nekola a V. Novák obšírně vysvětlili, co to je teorie fuzzy množin, vyložili, jak bohatě se tato teorie rozvětvila, které oblasti matematiky jsou již metodami fuzzy množin propracovávány a jaké jsou perspektivy dalšího vývoje. Čtenář, který zná tento článek, je jistě už na straně fuzzy teorie – aspoň jednou nohou. Aby byl oběma, potřebuje konkrétní aplikace. Cílem tohoto článku je přinést ukázku aplikace. K pochopení je nutná tak malá dávka teorie fuzzy množin, že se dá vyložit a také bude vyložena v několika odstavcích.

V úvodu bývají často anticipovány myšlenky, které by měly být rozvedeny předtím. Je to snad proto, aby navodily věci příznivou atmosféru. Věřím, že ta bude vyvolána citací několika řádků z knihy D. Duboise a H. Prada [3]. „Tato teorie je atraktivní, protože je založena na velmi intuitivní, i když poněkud subtilní myšlence, schopné vytvářet mnoho rozumně a přitažlivě působících závěrů, které umožňují nový pohled na staré, často diskutované otázky. Názory na důležitost teorie fuzzy množin se ještě rozcházejí. Někteří tvrdí, že mnohé příspěvky jsou prostě cvičeními ve zobecňování. Ale nedávná doba přinesla různé významné a originální výsledky, jež mohou přesvědčit ty, kteří ještě váhají. V každém případě mlhavost (fuzziness) není věc estetiky; není však ani příspěvkem ke zhotovování suchých formálních konstrukcí; je to nezrušitelný rys většiny humanistických systémů a s jako takovou je s ní třeba zacházet." A navrch ještě motto této knihy: The more, the fuzzier.

Z této knihy přebírám také údaj, že za třináct let od vzniku teorie (1965–1978) bylo publikováno na 550 prací (v angličtině, němčině a franštině), nehledě na články v ruštině (početné) a v jiných jazycích (méně četné). Komu se zdá toto číslo malé, nechť uváží, že přírůstkové číslo za rok 1965, rok zrodu disciplíny, bylo jeden kus a že i zde platí „čím dál, tím houšť".

2. Trocha teorie

Příklad, který je hlavním bodem článku, se týká rozhodovacího procesu. *Rozhodovací proces* je popsán těmito součástmi: 1. *řízený systém*, který má 2. *cíl* a 3. *omezení*. Cíle se má dosáhnout (na jisté úrovni – minimum, maximum) při splnění zadaných omezujících podmínek – 4. *rozhodnutí*. Rozhodovacím procesem ve fuzzy prostředí (tj. za neurčitosti) se pak rozumí rozhodovací proces, v němž cíl nebo omezení (ale ne nutně řízený systém) nejsou známy přesně.

Dělat kvantitativní úvahy s nepřesnými daty znamenalo obvykle používat pravděpodobnostních technik. Nepřesnost – ať byla jakékoli povahy – rovnala se náhodnosti. Je však rozdíl mezi náhodností (randomness) a mlhavostí (fuzziness). Mlhavost není a priori zřejmý pojem a vyžaduje výklad. Zakladatel teorie fuzzy množin Lotfi A. Zadeh precizuje svoje představy o mlhavosti na mnoha místech své obšírné publikační činnosti (z jeho prací citujeme pouze [1] a [7]). Z jeho myšlenek zde některé volně interpretujeme. Např. výrok „Josef je vysoký člověk" je fuzzy povahy, protože ‚vysoký' je fuzzy pojem, kdežto výrok „pravděpodobnost, že se Josef do roka ožení, je 0,8" není fuzzy, protože jde o výrok týkající se prvku (obyčejné) množiny. Jiný příklad: „Závod X má moderní vybavení" je nepřesný v důsledku mlhavosti pojmu ‚moderní vybavení', zatímco konstatování „pravděpodobnost, že závod X je ztrátový, je 0,8" udává míru nejistoty, týkající se příslušnosti závodu X mezi ztrátové podniky – a ty tvoří obyčejnou množinu.

S mlhavostí souvisí tzv. *fuzzy množiny*, tj. množiny, v nichž není ostrý přechod od příslušnosti (prvku do množiny) k nepříslušnosti. Např. třída zelených předmětů je fuzzy množina. O některých předmětech se dá totiž těžko říci, zda ještě patří do třídy nebo už ne. Podobně je tomu s dalšími adjektivy, která vymezují nějakou třídu předmětů jako velký, malý, podstatný, důležitý, jednoduchý, přibližný atd. Na rozdíl od množiny v matematice většina množin reálného světa nemá jasné hranice oddělující prvky, které do množiny patří, od těch, které do ní nepatří. Přes nepřesnost výroky jako „x je mnohem větší než y", „A je o pár centimetrů menší než B" nesou informaci, a je možno s nimi počítat. Dá se tvrdit, že hlavní rozdíl mezi lidskou inteligencí a inteligencí stroje spočívá v lidské schopnosti manipulovat s fuzzy pojmy a reagovat na fuzzy instrukce, čehož dnešní počítače (zatím) nejsou schopny. Zopakujme si ještě jednou (a naposledy) rozdíl mezi náhodností a mlhavostí. Náhodnost má co činit s neurčitostí týkající se příslušnosti nebo nepříslušnosti do (obyčejné) množiny. Mlhavost se týká tříd, v nichž může být zadán stupeň příslušnosti někde mezi úplnou příslušností a nepříslušností.

Po tom, co jsme se pokusili motivovat potřebu fuzzy množin a pověděli jejich názornou definici, řekneme ji teď přesně.

Definice. *Nechť* $X = \{x\}$ *je soubor objektů (bodů) označovaných symbolem* x. *Pak* fuzzy množinou A *v* X *je (obyčejná) množina uspořádaných dvojic*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} ,$$

kde $\mu_A : X \to M$ je *funkce z* X (univerzum) *do* M (prostor příslušnosti), *nazývaná* funkcí příslušnosti *množiny* A. $\mu_A(x)$ *se nazývá* stupeň příslušnosti bodu x *do* A.

Když M obsahuje pouze dva body 0 a 1, A není fuzzy a její funkce příslušnosti je charakteristická funkce (obyčejné) množiny A. V dalším budeme pracovat s fuzzy množinami, pro něž M je interval reálných čísel $[0, 1]$, kde 0, resp. 1 představuje nejmenší, resp. největší stupeň příslušnosti.

Zmíníme se jen o dvou dalších pojmech.

Podmnožina. *Fuzzy množina* A *je obsažena (nebo je podmnožinou) fuzzy množiny* B, *psáno* $A \subseteq B$, *když* $\mu_A(x) \leqq \mu_B(x)$ *pro všechna* $x \in X$.

Průnik. *Průnik fuzzy množin* A *a* B, *značený* $A \cap B$, *je největší fuzzy množina (ve smyslu předešlé definice obsahování) obsažená v* A *a* B. *Jeho funkce příslušnosti je pak*

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} , \quad x \in X .$$

Tato definice je diskutabilní a nebyla všeobecně přijata, jak to v dalším zdůvodníme. Nebude asi možné najít jednotné vyjádření logického spojení „a", tedy průniku, pro všechny reálné situace; potvrzují to empirická vyšetřování [8]. V našem příkladě se jako vhodné ukáže vyjádření ve formě součtu funkcí příslušnosti. Předcházející definice ve formě minima se interpretuje jako „tvrdá" nebo v „tvrdém" smyslu a je smysluplně aplikovatelná, když se nepřipouští jakákoli závislost mezi funkcemi μ_A a μ_B (závislost, která by vyplynula z povahy jevů modelovaných těmito funkcemi). Pro některé situace bylo nalezeno lepší spojení ve formě součinu, pro jiné aritmetického nebo geometrického průměru apod. Byly zkoumány i jiné agregace fuzzy množin a jejich funkce příslušnosti. Malou exkurzi do empirických ověřování si uděláme na konci článku (oddíl 4.).

Jak už bylo řečeno, hlavní složky rozhodovacího procesu jsou 1. množina alternativ [řízený systém], 2. množina omezení, jimiž se předpisuje výběr z množiny alternativ [přípustné alternativy] a 3. funkce, která přiřazuje každé alternativě hodnotu (číslo — řekněme zisk — které se obdrží, vybereme-li tuto alternativu) [cílová funkce]. V obvyklém přístupu k rozhodování omezení vymezují obyčejnou část množiny alternativ X a cílová funkce je funkce z X do jiného prostoru (třeba $\mathbb{R}$). Naproti tomu při rozhodování ve fuzzy prostředí máme výhodu symetrie, která spočívá v tom, že cíl i omezení jsou popsány funkcemi, obojí na téže množině alternativ.

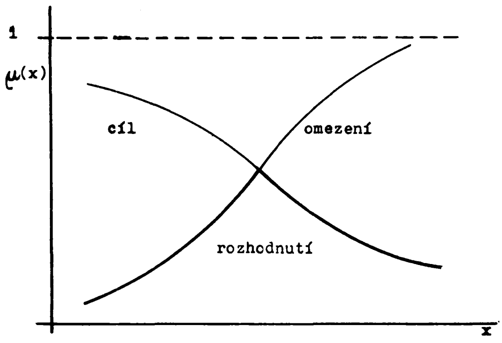
Podrobněji: Nechť $X = \{x\}$ je množina alternativ. Pak (fuzzy) cíl může být identifiková́n s nějakou fuzzy množinou G na X. Např. nechť fuzzy množina na $X = \mathbb{R}$ je popsána výrokem „x je podstatně větší než 10"; její funkce příslušnosti může být třeba taková

$$\mu_G(x) = 0, x \leqq 10\,,$$
$$\mu_G(x) = [1 + (x - 10)^{-2}]^{-1}, x > 10\,.$$

Rovněž fuzzy omezení ztotožníme s fuzzy množinou; např. omezení „x má být v blízkosti 15" může být vyjádřeno jako fuzzy množina C na $X = \mathbb{R}$ pomocí funkce příslušnosti, řekněme

$$\mu_C(x) = [1 + a(x - 15)^m]^{-1}\,,$$

kde $a > 0$ je konstanta a m sudé přirozené číslo, vybrané tak, aby odráželo smysl, v němž se rozumí aproximace k číslu 15. V tomto příkladu G a C jsou vázány logickým „a"; vytvoříme tedy průnik obou fuzzy množin a máme rozhodnutí (jež je zase fuzzy množina). Graficky je to znázorněno na obr. 1.



Obr. 1.

3. Aplikace

Nyní přistoupíme k ohlášenému příkladu, na němž ilustrujeme jistý rozhodovací proces ve fuzzy prostředí [4, 5, 6].

V jistém krajinném areálu (vymezené části krajiny, která zahrnuje různé typy oblastí, např. průmyslovou, městskou, rekreační) jsou zdroje znečišťující ovzduší, zdroje exhalátů (továrny). Jde o stanovení nutné redukce znečištění (exhalátů), které produkují jednotlivé zdroje tak, aby se v celém areálu dosáhlo (aspoň) předepsaného zákonného standardu čistoty ovzduší. Protože vyžadovaná redukce je nákladná a má horní hranici dosažitelnosti, za níž je nezbytné omezení výroby, má se stanovit její nezbytná míra.

Zformulovaný problém neobsahuje neurčitosti, není „fuzzy". Na jeho řešení je vhodná standardní metoda lineárního programování, jak by se ukázalo po bližší analýze zadání i jak z dalšího bude patrné. Zatím to však není problém, jaký chceme řešit. Náš problém vznikne z předešlého vnesením neurčitosti, tj. postulováním dalších požadavků, tentokrát fuzzy povahy. (V matematické hantýrce se tomu postupu říká „fuzzyfikace" – z anglického fuzzifying. To je slovo, které bezpochyby jednou proklouzne před strážci čistoty jazyka do matematického slovníku, domnívám se od chvíle, kdy se začne psát fazy místo fuzzy.) Protože pro řešení takovýchto úloh s neostrými podmínkami není vypracována žádná přímá vypočetní metoda, pokusíme se o její novou formulaci, tentokrát s vyloučením neurčitosti. Pokus bude úspěšný a výsledkem bude formulace ve tvaru standardní úlohy lineárního programování. Pro osvěžení paměti připomeneme (v největší stručnosti), co je to problém LP; popsané schéma nám pak bude vodítkem v úvahách o úloze s neurčitostí.

Problém LP

Je zádána (homogenní) lineární funkce (tzv. *cílová funkce*)

(a) $$z = c^T x, \; x \in E^n$$

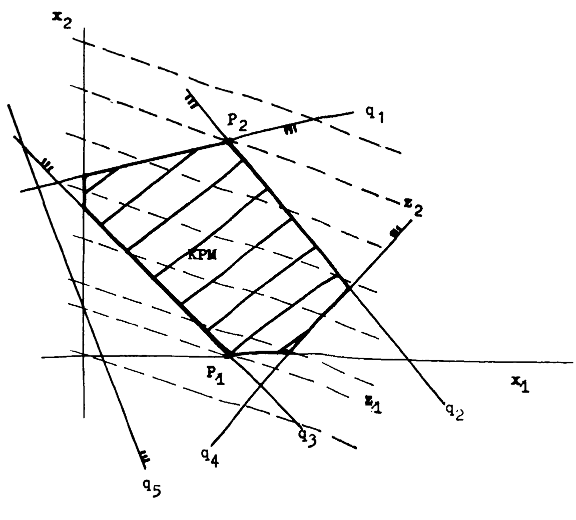
a systém lineárních nerovností (*restrikcí, omezení*)

(b) $$Ax \leqq b \,,$$

(c) $$x \geqq 0 \,.$$

Hledá se optimum (minimum nebo maximum) cílové funkce (a) na oboru definovaném vztahy (b) a (c) (*přípustný obor* – část *množiny alternativ*, jíž je E^n). Symbol c značí konstantní n-vektor, b konstantní m-vektor a A konstantní $m \times n$ matici. Každá nerovnost v systému (b) představuje poloprostor ohraničený nadrovinou, jejíž rovnice se obdrží náhradou znaménka $\leqq$ znaménkem $=$ v příslušné nerovnosti. Vyčlenění nerovnosti (c) (jež by mohla být zahrnuta do (b)), vyžadující nezápornost všech složek vektoru x, je motivována tím, že každá složka vektoru x v konkrétních úlohách je veličinou, pro niž záporné hodnoty nemají reálný obsah, např. počet kusů nějakého výrobku, váha, objem ap. Nerovnosti (b) vyjadřují např. omezující podmínky výroby, jako jsou omezení daná kapacitou strojového parku, skladu materiálu, pracovních sil ap.

V jednoduchém případě $n = 2$ představuje (b) a (c) konvexní polyedrickou množinu v rovině (tedy konvexní polygon i s vnitřkem), např. v obr. 2 vyšrafovanou část KPM roviny, ohraničenou přímkami q_1 až q_4 (přímka q_5 nepřispívá k omezení přípustného



Obr. 2.

oboru) a $z = c^T x$ vyjadřuje osnovu rovnoběžných přímek s parametrem z. Zřejmě pro hodnoty parametru z_1, resp. z_2 dosahuje funkce (a) jedné, resp. druhé extrémní hodnoty na KPM, takže z_1 nebo z_2 je (podle požadavku) žádaná optimální hodnota funkce (a) a té se dosahuje v bodě P_1 nebo P_2.

Vraťme se k našemu příkladu. Máme J zdrojů (továren) a I kontrolních bodů (receptorů). Přenosová funkce $s_j(x_1, x_2)$ j-tého zdroje ($j \in J$) jako funkce polohy bodu (x_1, x_2) je známá, takže známe koncentraci exhalátů v i-tém receptoru ($i \in I$), způsobenou zdrojem j; označme ji

$$s_{ji} = s_j(x_1^i, x_2^i),$$

kde bod (x_1^i, x_2^i) určuje polohu i-tého receptoru.

Označme $E_j (\in [0, 1])$ úroveň redukce nečistot pro zdroj $j \in J$. Když proměnná E_j představuje poměrnou část z celkové produkce nečistot, bude

$(1 - E_j) s_{ji}$ koncentrace nečistot v receptoru i způsobená zdrojem j po redukci;

$\sum_{j \in J} (1 - E_j) s_{ji}$ koncentrace nečistot v receptoru i vyvozená všemi zdroji po příslušných redukcích.

V dosavadní formulaci nejsou žádné nepřesnosti. Ty tam však budou vneseny dalšími požadavky:

I Znečištění $\sum_{j \in J} (1 - E_j) s_{ji}$ ($i \in I$) nesmí překročit standard d (požadavek „ostrý"); pokud možno však má jít ještě níž, pod úroveň e_i ($e_i \leqq d$), což je žádoucí horní úroveň koncentrace exhalátů pro podoblast, v níž leží receptor i (požadavek fuzzy).

Zapisujeme to ve tvaru

$$\sum_{j \in J} (1 - E_j) s_{ji} \lessapprox e_i; d, \quad i \in I. \tag{1}$$

Podobně druhý typ fuzzy omezení:

II Zajistit (pro $j \in J$), aby redukce E_j nepřekročila kritickou hodnotu $\bar{E}_j$ (maximální dosažitelná redukce, za níž následuje omezení výroby – požadavek „ostrý") a pokusit se jít pod w_j ($w_j \leqq \bar{E}_j$) (odpovídá přijatelné výši nákladů na redukci – požadavek fuzzy).

Zapisujeme ve tvaru

$$E_j \lessapprox w_j; \bar{E}_j, \ j \in J, \tag{2}$$

$$(\bar{E}_j, w_j \in [0, 1]).$$

Nakonec definujeme cílovou funkci jako

$$\sum_{j \in J} c_j E_j \quad \text{‚min' (tj. s cílem minimalizovat)}, \tag{3}$$

kde c_j je úhrnný náklad na redukci pro zdroj j – za předpokladu, že nákladová funkce je na intervale $[0, \bar{E}_j]$ lineární. Tuto funkci musíme (později) přizpůsobit fuzzy podmínkám I a II.

Požadavky (1) a (2) mají formálně týž charakter; jsou to nerovnosti typu

$$a_k^T x \lessapprox \beta_k; \alpha_k \ (\beta_k \leqq \alpha_k, \ k \in K, \ x \geqq 0), \tag{4}$$

kde $a_k^T x$ značí maticový součin (vektorů a_k^T a x) a k probíhá disjunktní sjednocení $I \cup J$. (Vektor x má složky E_j $(j \in J)$. Pro $k \in I$ složky vektoru a_k jsou $-s_{jk}(j \in J)$, $\beta_k = e_k - \sum_{j \in J} s_{jk}$, $\alpha_k = d - \sum_{j \in J} s_{jk}$. Pro $k \in J$ je a_k jednotkový vektor (s jedničkou na vhodném místě), $\beta_k = w_k$, $\alpha_k = \bar{E}_k$.) Transkripce cílové funkce (3) ve tvaru

$$c^T x \quad \text{,min`} \tag{5}$$

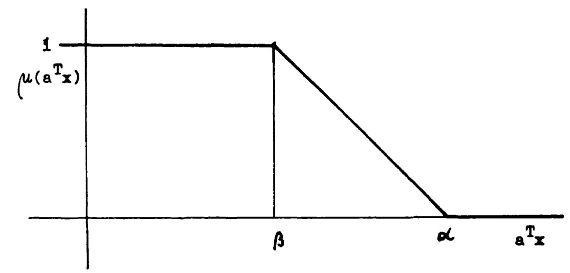
je nyní jasná.

Náš cíl bude převést fuzzy problém (4), (5) na problém lineárního programování (bez neurčitosti).

(i) K tomu cíli nejprve zavedeme funkci příslušnosti μ pro požadavek (4); ten vymezuje jistou fuzzy množinu (index k pro jednoduchost zatím vynecháme)

$$\mu(a^T x) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } a^T x < \beta\,, \\ \dfrac{\alpha - a^T x}{\alpha - \beta}\,, & \text{pokud } a^T x \in [\beta, \alpha]\,, \\ 0, & \text{pokud } a^T x > \alpha\,. \end{cases}$$

Grafické znázornění je na obr. 3.



Obr. 3.

Funkce μ vyjadřuje stupeň spokojenosti projektanta (tj. obyvatelstva reprezentovaného receptorem v příp. (1) a továrny v příp. (2)) s okamžitou hodnotou $a^T x$; nejvyšší $(= 1)$, když $a^T x$ je pod β, nulovou, když $a^T x \geqq \alpha$.

(ii) Za druhé je třeba interpretovat fuzzy restrikci (4) ve tvaru (obyčejné) restrikce. Provedeme to zavedením pomocné proměnné s, na niž klademe požadavky

$$a^T x - s \leqq \beta\,, \tag{6}$$

$$0 \leqq s \leqq \alpha - \beta\,. \tag{7}$$

($a^T x$ je povinně $\leqq \alpha$; pod β se dostaneme odečtením nezáporného čísla s; to číslo nesmí být větší než $\alpha - \beta$, protože by jinak $a^T x$ mohlo překročit hodnotu α: $s = \alpha - \beta + k$ $(k > 0) \Rightarrow a^T x \leqq \alpha + k$).

Příslušně upravíme tvar funkce μ: při označení $\sigma = a^T x - \beta$ bude pro $\beta \leqq a^T x \leqq \alpha$ neboli pro

$$0 \leqq \sigma \leqq \alpha - \beta$$

tvar funkce

$$\mu(\sigma) = \frac{\alpha - a^T x}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha - \beta - (a^T x - \beta)}{\alpha - \beta} = 1 - \frac{\sigma}{\alpha - \beta}.$$

Protože $0 \leqq s \leqq \alpha - \beta$, můžeme při restrikci na definiční obor $[0, \alpha - \beta]$ psát

$$\mu(s) = 1 - \frac{s}{\alpha - \beta}, s \in [0, \alpha - \beta].$$

(Tvar funkce μ vně intervalu $[0, \alpha - \beta]$ je nepodstatný, protože s je omezeno na obor $[0, \alpha - \beta]$.)

(iii) Za třetí vyvstává otázka, jak vyjádřit logické spojení „a" všech fuzzy požadavků (vyjádřených jejich μ_k-funkcemi — vracíme se znovu k indexům).

V Zadehově koncepci spojení „a" odpovídá průnik příslušných fuzzy množin, tedy minimum funkcí μ_k. Empirická vyšetřování ukazují, že v tomto případě je adekvátnější součet funkcí μ_k. Maximální uspokojení projektanta je tedy vyjádřeno maximem funkce

$$\sum_{k \in I} \mu_k(s_k) \quad \text{‚max'}$$

neboli minimem funkce

$$(8) \qquad \sum_{k \in K} \frac{s_k}{\alpha_k - \beta_k} \quad \text{‚min'}.$$

Poznámka. I kdybychom vynechali v úloze požadavek minima funkce (5), přesto by právě sestavená úloha (6), (7), (8) představovala optimalizační úlohu, tzv. ***náhradní lineární program*** (za fuzzy úlohu (4)): mezi přípustnými řešeními najít řešení, které nejlépe „uspokojuje projektanta", tj. minimalizuje (8) — bez ohledu na náklady spojené s redukcí, tj. bez ohledu na zájem továren.

(iv) Věnujme se nyní problému, jak spojit fuzzy požadavek (8) s požadavkem minimalizovat cílovou funkci (5).

V tomto případě požadavek

$$c^T x \quad \text{‚min'}$$

bude interpretován takto: Minimalizuj $c^T x$ se zřetelem na μ_k-obrazy výrazů $a_k^T x$. Jde tedy o matematické vyjádření toho, čemu říkáme „respektovat μ_k-obrazy" (čímž se „zneostří" původní cílová funkce (5)).

Do cílové funkce $z = c^T x$ vneseme neurčitost (neostrost) takto: Pro funkci příslušnosti $\mu_z(c^T x)$ musí platit vzhledem k jakýmsi dvěma krajním hodnotám β_z a α_z — analogicky k funkcím μ_k —

$\mu_z = 1$: nejvyšší stupeň spokojenosti při $c^T x \leqq \beta_z$,
$\mu_z = 0$: nejmenší stupeň spokojenosti při $c^T x \geqq \alpha_z$,
$0 < \mu_z < 1$: alternativní stupeň spokojenosti při $\beta_z < c^T x < \alpha_z$.

Funkci μ_z definujeme (jako dříve funkce μ_k) s lineárním „středem" ve formě

$$\mu_z(c^T x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } c^T x \leqq \beta_z , \\ \dfrac{\alpha_z - c^T x}{\alpha_z - \beta_z}, & \text{pro } \beta_z < c^T x < \alpha_z , \\ 0, & \text{pro } c^T x \geqq \alpha_z . \end{cases}$$

Graf funkce μ_z se shoduje s grafem funkcí μ_k – po příslušných změnách označení.

Na rozdíl od předešlých úvah, kde α_k a β_k byla předem zadaná data, je teď třeba určit dolní a horní omezení β_z a α_z. Vhodný je následující přístup.

$\mu_z = 1$ se jistě dosáhne, když se nebudou brát do úvahy funkce μ_k (respektuje se jen zájem továren, nerespektuje se zájem obyvatelstva),

tedy

(9) $$\beta_z = \min c^T x$$

za podmínek

(10) $$\begin{cases} a_k^T x \leqq \alpha_k \,(k \in K) , \\ x \geqq 0 . \end{cases}$$

$\mu_z = 0$ se dosáhne, když se nevezme v úvahu cílová funkce $c^T x$ (respektuje se jen zájem obyvatelstva, nerespektuje se zájem továren),

tj.

(11) $$\alpha_z = c^T x_0 ,$$

kde x_0 je optimální řešení náhradního lineárního programu (6), (7), (8) (viz Poznámku za vztahem (8)).

Nám jde o maximum funkce $\mu_z(c^T x)$, tedy o minimum funkce

$$1 - \mu_z(c^T x) = \frac{c^T x}{\alpha_z - \beta_z} - \frac{\alpha_z}{\alpha_z - \beta_z} .$$

Při naší dohodě o vyjádření simultánní platnosti podmínek ve tvaru součtu obdržíme na závěr následující problém lineárního programování (bez neurčitosti).

(12) $$\frac{c^T x}{\alpha_z - \beta_z} + \sum_{k \in K} \frac{s_k}{\alpha_k - \beta_k} \quad \text{‚min‘}$$

za podmínek

(13) $$\begin{cases} a_k^T x - s_k \leqq \beta_k \\ 0 \leqq s_k \leqq \alpha_k - \beta_k \quad k \in K , \\ x \geqq 0 , \end{cases}$$

jehož řešení x_{opt} poskytuje optimální řešení našeho původního problému o redukci exhalací.

Postup ilustrujeme na numerickém příkladu (převzatém z [6]), z něho explicite vysvitne algoritmus výpočtu (a zároveň stupeň složitosti algoritmu: výpočet tří úloh LP).

Ve zkoumaném areálu jsou tři zdroje znečišťující ovzduší (továrny), $J = \{1, 2, 3\}$, a šest kontrolních bodů (receptorů), $I = \{4, 5, \ldots, 9\}$.

Numerické údaje, které definují úlohu, jsou obsaženy v tabulkách 1 – 3.

Tab. 1.

Oblast	koncentrace nečistot	
	žádoucí e_i	norma d
rekreační	.42	.5
městská	.44	
průmyslová	.49	

Tab. 2.

Továrna a její parametry			
j	c_j	$\bar{E}_j$	w_j
1	2	.2	.04
2	4	.35	.15
3	1	.55	.3

Tab. 3.

Receptor a jeho parametry							
i	s_{1i}	s_{2i}	s_{3i}	e_i	$\sum_{j\in J} s_{ji}$	$e_i - \sum_{j\in J} s_{ji}$	$d - \sum_{j\in J} s_{ji}$
4	.3679	.1054	.0	.42	.4733	−.0533	>0
5	.2388	.1575	.0067	.44	.4030	>0	>0
6	.1638	.1275	.0630	.44	.3543	>0	>0
7	.0067	.1054	.0	.49	.1121	>0	>0
8	.0630	.1575	.3679	.49	.5884	−.0984	−.0884
9	.0736	.1275	.2388	.42	.4399	−.0199	>0

Tab. 3 je pro další potřebu doplněna třemi sloupci. Položky >0 v druhém, resp. třetím sloupci poukazují na řádky, které budou pro úlohu (12), (13), resp. (9), (10), nepodstatné.

Naše úloha vyjádřená vztahy (1), (2) a (3) byla v průběhu úvah převedena na úlohu lineárního programování (bez neurčitosti) (12), (13) (význam symbolů a_k, α_k, β_k je popsán za (4)).

Nejprve omezení (13):

Pro $k \in I$ obdržíme z (13)

$$\begin{aligned}
-.3679E_1 - .1054E_2 \qquad\qquad\quad - s_4 &\leqq -.0533 \\
s_4 &\leqq .08 \\
-.0630E_1 - .1575E_2 - .3679E_3 - s_8 &\leqq -.0984 \\
s_8 &\leqq .01 \\
-.0736E_1 - .1275E_2 - .2388E_3 - s_9 &\leqq -.0199 \\
s_9 &\leqq .08
\end{aligned} \tag{14}$$

(Nerovnosti pro $k = 5, 6, 7$ jsou vždy splněny, nejsou tedy uvedeny mezi omezeními.)

Pro $k \in J$ obdržíme z (13)

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
E_1 \qquad\qquad\qquad\qquad - s_1 &\leqq .04 \\
s_1 &\leqq .16 \\
E_2 \qquad\quad - s_2 &\leqq .15 \\
s_2 &\leqq .2 \\
E_3 - s_3 &\leqq .3 \\
s_3 &\leqq .25
\end{aligned}
$$

(16) E_k $(k = 1, 2, 3)$, s_k $(k = 1, 2, \ldots, 9)$ jsou nezáporné.

Ke stanovení účelové funkce (12) chybí α_z a β_z.

β_z je minimální hodnota účelové funkce $c^T x$ úlohy (9), (10), tj. úlohy

$$2E_1 + 4E_2 + E_3 \quad \text{,min'}$$

za podmínek

$$
\begin{aligned}
-.0630E_1 - .1575E_2 - .3679E_3 &\leqq -.0884 \\
E_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\leqq .2 \\
E_2 \qquad\qquad\quad &\leqq .35 \\
E_3 &\leqq .55
\end{aligned}
$$

$$E_j \ (j = 1, 2, 3) \text{ nezáporné.}$$

(Nevypsané nerovnosti jsou splněny vždy.)

Optimální řešení je

$$(E_1^\beta, E_2^\beta, E_3^\beta) = (.0, .0, .2403)\,,$$

tedy

$$\beta_z = .2403$$

α_z se vypočte podle (11), $\alpha_z = c^T x_0$, kde x_0 je optimální řešení náhradního lineárního programu (6), (7), (8), tzn. řešení úlohy

$$6.25s_1 + 5s_2 + 4s_3 + 12.5s_4 + 100s_8 + 12.5s_9 \quad \text{,min'}$$

za podmínek popsaných již dříve systémy nerovností (14), (15), (16). Potřebné složky E_1, E_2, E_3 optimálního řešení tohoto problému jsou

$$(E_1^\alpha, E_2^\alpha, E_3^\alpha) = (.04, .15, .19643)\,,$$

což vede k hodnotě

$$\alpha_z = .87643\,.$$

Nyní jsme schopni zformulovat závěrečnou úlohu LP, jejíž řešení $x_{opt} = (E_1^{opt}, E_2^{opt}, E_3^{opt})$ *je řešením našeho problému o redukci exhalací:*

Minimalizuj funkci

$$6.25s_1 + 5s_2 + 4s_3 + 12.5s_4 + 100s_8 + 12.5s_9 +$$

$$+ 3.144E_1 + 6.288E_2 + 1.572E_3$$

za podmínek (14), (15), (16) uvedených dříve.

Obdržíme

$$(E_1^{opt}, E_2^{opt}, E_3^{opt}) = (.04, .0, .26063).$$

4. Trocha empirie

V oddíle 2. jsme připustili nevhodnost myšlenky vyjádřit funkci příslušnosti průniku fuzzy množin jako minimum funkcí příslušnosti těchto množin, a to aspoň v některých situacích. V oddíle 3. jsme jednu takovou situaci vylíčili. V oddíle 4. se chceme zamyslit nad otázkou, čím tedy a za jakých okolností vyjádřit funkci příslušnosti průniku fuzzy množin. Dá se čekat, že podobné nesnáze jsou i s jinými agregacemi fuzzy množin, a skutečně jsou; zůstaňme však u průniku. Odpověď může dát jen empirie. A to je otázka nejen pro matematiky, ale např. i pro psychology. Uveďme ve stručnosti výsledky dvou experimentů, které jsou uvedeny v [8].

1. pokus: Byly zvoleny dva fuzzy termíny (a tím fuzzy množiny):

kovový předmět M a nádoba (kontejner) C.

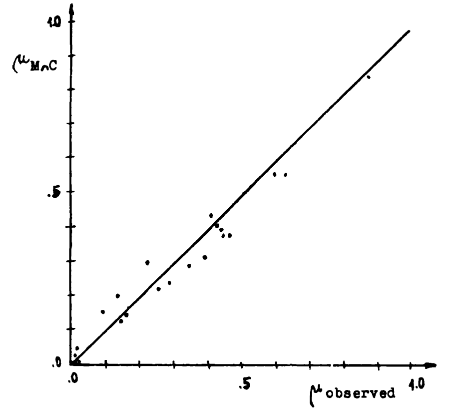
Byla vybrána vhodná skupina klíčových slov (předmětů) x a skupina osob, které pro každé klíčové slovo vytvářely podle vlastního odhadu hodnoty funkcí $\mu_M(x)$, $\mu_C(x)$, $\mu_{M\cap C}(x)$. Otázka zněla např.: Do jaké míry ($\in [0, 1]$) je auto kontejnerem? Zpracování získaných empirických dat bylo dílem matematiků a psychologů; my zde nejsme kompetentní použité metody popisovat nebo komentovat. Výsledkem byla hodnota $\mu_i(x)$ (pro každé $i = M$, C nebo $M \cap C$ a každé klíčové slovo x, jichž bylo celkem 20) vypočítaná ze souboru odpovědí vybraných osob. Výsledek experimentu je ve zkráceném znění v tabulce 4.

Tab. 4.

Fuzzy množina →		Kovový předmět	Kontejner	Kovový kontejner
↓ Klíčová slova x	Stupeň příslušnosti →	$\mu_M(x)$	$\mu_C(x)$	$\mu_{M\cap C}(x)$
1. Bag (brašna)		.027	.937	.022
2. Baking-tin (plech na pečení)		.910	.398	.464
3. Ball-point-pen (kuličkové pero)		.242	.142	.163
⋮		⋮	⋮	⋮
19. Water-bottle (láhev na vodu)		.558	.914	.635
20. Wine-barrel (sud na víno)		.151	.932	.176

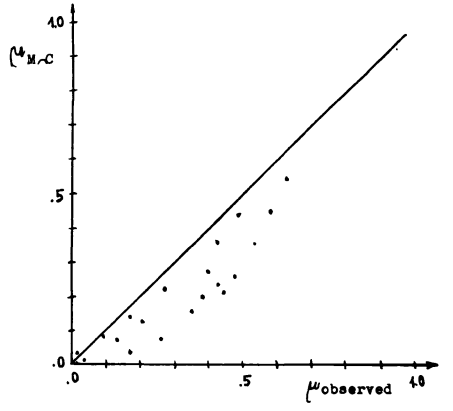
Porovnání výsledků experimentu $\mu_{M\cap C} = \mu_{\text{observed}}$, jednou s definicí $\mu_{M\cap C} = \mu_M \wedge \mu_C$, a podruhé s definicí $\mu_{M\cap C} = \mu_M \cdot \mu_C$ je patrné z obrázků 4 a 5.

První definice dává uspokojivou shodu s experimentem, druhá je daleko od experimentu, jak ukazuje hodnota MSD (mean square deviation — střední kvadratická chyba).



$\mu_{M\cap C} = \mu_M \wedge \mu_C$
(MSD = .056)

Obr. 5.



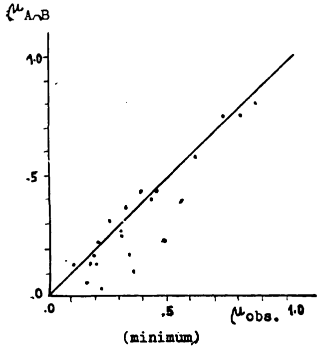
$\mu_{M\cap C} = \mu_M \cdot \mu_C$
(MSD = .350)

Obr. 4.

2. pokus: Máme sérii dvojic předmětů. V každé dvojici se předměty do nějaké míry podobají

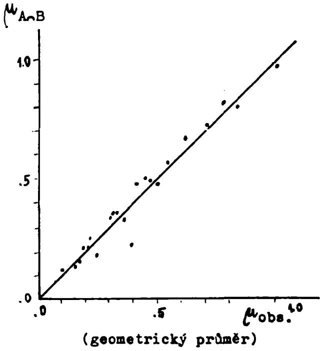
a) tvarem (μ_A),
b) barvou (μ_B),
c) jeden druhému ($\mu_{A\cap B}$).

Výsledky experimentu jsou porovnány s různými typy funkce $\mu_{A\cap B}$ na obrázcích 6, 7 a **8.** Nejpřijatelnější je shoda experimentu s operátorem geometrického průměru.



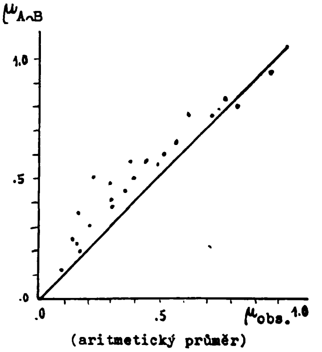
(minimum)
(MSD = .245)

Obr. 6.



(geometrický průměr)
(MSD = .070)

Obr. 7.



(aritmetický průměr)
(MSD = .172)

Obr. 8.

Literatura

[1] R. E. Bellman, L. A. Zadeh: *Decision-making in a fuzzy environment.* Management Science *17* (1970) No. 4, B141—B164.

[2] V. Novák M. Černý, J. Nekola,: *Fuzzy množiny — perspektivy, problémy a aplikace.* PMFA *29* (1984), 126—137.

[3] D. DUBOIS, H. PRADE: *Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications.* Acad. Press 1980, 393 stran.

[4] W. RÖDDER, H. J. ZIMMERMANN: *Analyse, Beschreibung und Optimierung von unscharf formulierten Problemen.* Zeitschrift für Operations Research *21* (1977), 1—18.

[5] G. SOMMER: *Linearer Ersatzprogramm für unscharfe Entscheidungsprobleme. Zur Optimumbestimmung bei unscharfer Problemschreibung.* Zeitschrift für Operations Research *22* (1978), B1—B24.

[6] G. SOMMER, M. A. POLLATSCHEK: *A fuzzy programming approach to an air pollution regulation problem.* Progress in Cybernetics and Systems Research, New York 1977, 309—313.

[7] L. A. ZADEH: *Fuzzy sets.* Information and Control *8* (1965), 338—353.

[8] H. J. ZIMMERMANN: *Results of empirical studies in fuzzy set theory.* From: *Applied General Systems Research*, ed. by Georg J. Klir (Plenum Publishing Corporation 1978), 303—312.

Sto let od otištění prvního českého pojednání o množinách

Uplynulé desetiletí bylo bohaté na staletá výročí průkopnických prací Georga Cantora (1845—1918) v teorii množin. Náš časopis přinesl článek k výročí takové Cantorovy práce z r. 1874, a to v 1. čísle ročníku XX (1975). V něm je popsáno deset let jeho činnosti až po kritický rok 1884, kdy se vlivem napjatých vztahů s ostatními německými matematiky a pocitu osamocení zhroutil. Vždyť teprve r. 1883 se dočkal překladu stručného výtahu svých výsledků do francouzštiny, ale až v letech 1884—5 se objevily první práce mladých matematiků, jež využívaly Cantorovy ideje ke studiu funkcí, k úspěšnému řešení obtížných problémů. Tím spíše zasluhuje pozornost čin Matyáše Lercha, který už v r. 1884 publikoval české pojednání o množinách.

Matyáš Lerch (1860—1922) utrpěl v mládí úraz na levé noze, školu začal navštěvovat až v devíti letech a maturoval ve dvaceti. Pak studoval na pražských vysokých školách (české a německé technice, české univerzitě), první vědecké práce publikoval už jako student druhého ročníku. Četl nepochybně i Cantorovy práce a získal v nich inspiraci k napsání příspěvku, který přednesl na zasedání Královské české společnosti nauk v Praze. I když se na zasedáních přednášelo především německy a výchozí literatura byla německá, mladý Lerch zpracoval *české* pojednání, ve kterém musel použít nové termíny. Je pravděpodobné, že se při jejich tvoření uplatnil vliv nebo aspoň souhlas profesorů Studničky, Weyra a případně dalších, ale to nic nemění na skutečnosti, že 24letý Lerch sepsal první české pojednání o množinách. Sám sice později ustoupil od termínu „množina“, ve své další práci hovořil o soustavách bodů, resp. o množstvích bodů, ale patří mu priorita v publikování termínu, který se naplno ujal od 30. let našeho století zásluhou akademika E. Čecha.

Otiskujeme plné znění Lerchova příspěvku ve Zprávách o zasedání Královské české společnosti nauk v Praze, roč. 1884, str. 176—8. Text je záměrně ponechán