

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Štefan Schwarz

Prečo a ako zvyšovať matematickú kultúru

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 31 (1986), No. 6, 314--326

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138439>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1986

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Prečo a ako zvyšovať matematickú kultúru

*Štefan Schwarz, Bratislava*

Vážení prítomní!

Vďaka osvedčenej presvedčovacej metóde s. prof. Kolibiarovej dostalo sa mi opäť raz cti, aby som prehovoril pred týmto zhromaždením. Mal by som prehovoriť o výchove mladého učiteľa matematiky, ktorý má pôsobiť alebo už pôsobí na vysokej škole technického zamerania. Je to klzká pôda. Lahko môžem upadnúť do banálnosti alebo moralizovania. Lahko sa môžem dostať ďaleko od reality, ak budem sledovať ideálny model mladého matematika, ktorý sa v praxi nevyskytuje. A ešte ďalej od reality, ak by som sa pokúsil premietiť vlastné asistentské roky do dnešnej situácie.

Tému som trošku zmenil a dal jej primeranejší nadpis.

Neviem, prečo sa obmedziť len na učiteľov na technike a vynechať iných učiteľov alebo matematikov v iných oblastiach národného hospodárstva. Všetci matematici (u nás) strávia veľkú časť svojho vzdelávania na univerzitách. Nemôžem meniť jedných bez zmeny druhých.

V minulosti, povedzme do rokov 1950–1960, mali u nás vysoké školy vo väčšine odborov odborný predstih pred ostatnými inštitúciami. Dnes, pri existencii širokej siete výskumných ústavov, tomu tak asi vždy nie je. Preto spolupráca matematikov s nematematikmi zďaleka nie je obmedzená na spoluprácu v rámci jednej fakulty.

V pozadí je otázka, ako priblížiť (podľa niektorých „vrátiť“) matematikov bližšie k praxi v zúženom slova zmysle. Mal by som teda rozobrať, čo je v tom úprimné a čo je pokrytecké, trvalé a efemérne, čo je pokrokové a reakčné, čo si vyžadujú potreby národného hospodárstva a čo osobná spokojnosť matematika, atď.

Neviem, či to zvládnem. Nie som si istý, že som ten najkompetentnejší. Má to plusy a mínusy. K plusom rozhodne nepatrí, že tu vystupujem ako senior.

Hrabal som sa od študentských čias nielen vo fyzikálnych, ale aj technických knihách. Krútil som hlavou nad podivnou logikou desiatok dostupných skrípt. Nad dogmatickým podávaním, atď. Na univerzite som prednášal (a myslím, že aj učil) analytickú mechaniku, hydromechaniku, mechaniku pružného prostredia, na technike problémy dosák a nosných stien. Na univerzite rovnice matematickej fyziky, na technike rozmanité partie, ktoré patria vlastne do elektrotechniky. Toto sú asi také malé plusy.

Nepracoval som nikdy v matematickom oddelení nejakého priemyselného podniku alebo vo výpočtovom stredisku. To je mínus.

---

Vystúpenie na Konferencii matematikov vysokých škôl technických, ekonomických a poľnohospodárskych v Bratislave (september 1984). Prevzaté zo zborníka konferencie so súhlasom autora a redakcie zborníka.

Nedá sa nič robiť, keď som pozvanie prijal, musím rečniť.

Táto konferencia má charakter seminára, kde môžu a majú odznieť aj celkom odlišné názory. Nepotrebuje bezzubé ódy, o ktorých si niektorí myslia, že sú štátotvorné, ak chvália, všetko, čo práve existuje. Centrom môjho príhovoru bude teda otázka ďalšieho vzdelávania učiteľov matematiky. Nemyslím tým nejaké organizačné schémy, alebo zriaďovanie inštitúcií. Nijaká inštitúcia nenaplánovala matematizáciu celého radu iných vied. Dohodli sme sa: Spoločenské zaviazanosti všetkých matematikov sú približne rovnaké. A pokiaľ ide o vek: Horná hranica mladosti je neostrá množina (fuzzy set).

Keď som sa pripravoval na tento príhovor, nevedel som presne, čo budem hovoriť. Vedel som však presne, o čom nebudem hovoriť. Nebudem hromziť na zlé stredoškolské osnovy a nepodarené učebnice a nebudem hromziť na nízke výmery hodín matematiky a fyziky na technikách. Aspoň nie v nejakej veľkej miere. Nie je to vhodné fórum na nápravu. (Skôr jedným z centier križiackych výprav.)

Mal som rad príhovorov v dennej i odbornej tlači o veciach, súvisiacich s matematikou. Možno, že sa budem niekde opakovať. Tomu je ťažké sa vyhnúť.

Posledný takýto prejav som mal v apríli tohto roku na rozšírenej vedeckej rade Matematicko-fyzikálnej fakulty v Prahe. Téma znela: „Matematika na Karlovej univerzite v 30. rokoch a dnešok“. (Vyjde to tlačou niekedy koncom roka v Pokrokoch\*.)

Pri tejto príležitosti som si uvedomil, že téma, o ktorej mám hovoriť, je aktuálna. V 30. rokoch bolo na všetkých československých vysokých školách (včítane nemeckých) zamestnaných menej ako 35 matematikov (t. j. profesorov a asistentov). Docenti ako zamestnanci vtedy neexistovali. Dnes to je okolo 1000 (zdôrazňujem, len na vysokých školách). To nasvedčuje, že sa vyplatí nad touto témou porozmýšľať.

Po úvode, ktorý práve odznel, je na čase povedať, ako som si tému príhovoru rozčlenil. Rozčlenil som si ju na 5 odsekov:

1. Ako vznikajú matematici. Odkiaľ sa berú? Ako sa vychovávajú?
2. Matematik ako pedagóg na vysokej škole.
3. Matematik a iné vedné odbory.
4. Čo je to matematická kultúra.
5. Matematik a rozvoj matematiky ako vedy.

## 1. Odkiaľ sa berú matematici?

Prv, než dám odpoveď na túto otázku, mal by som predovšetkým povedať, kto je to matematik. Matematikom nazývame dnes obvykle osobu, ktorá vykonáva istú profesiu, ktorá nejakým spôsobom súvisí s matematikou. Akú profesiu, to by sa dalo v najlepšom prípade špecifikovať výpočtom činností. Uznávam, že to je typicky nematematická definícia.

Matematik v minulom storočí bol v očiach normálneho občana čudák. Prof. Štepanovič to včera povedal trochu jemnejšie. Dnes je to azda normálny člen spoločnosti, ktorý pracuje na škole, vo výpočtovom stredisku, alebo inde.

---

\*) Pokroky 30 (1985), str. 57. Pozn. red.

Predstava o tom, kto je to inžinier sa za posledných 50 rokov radikálne zmenila. V dnešnej predstave to ani zďaleka nie sú vždy nositelia nových myšlienok, ktorí udávajú tón výrobe. Aj keď si to zbožne želáme. Tak nejako podobne je to aj s pojmom matematika.

Samozrejme, bolo by možné pokúsiť sa rozklasifikovať matematikov na kategórie povedzme A–E, ale neradím to. Ďaleko sympatickejšie by bolo asi delenie na ľudí s matematickou výchovou, ľudí s matematickým záujmom a ľudí s výchovou aj záujmom. Každopádne je v pojme matematik implicitne obsiahnutá predstava osoby, ktorá vyvíja istú aktívnu činnosť.

Výchova matematika začína už na strednej škole. V ďaleko podstatnejšej miere ako výchova lekára alebo inžiniera. Pôsobí na neho učiteľ matematiky a rôzne súťaže, ktorých máme až-až (až sa mi to zdá byť nezdravé, ale to sem nepatrí)

Sledujme ďalej, čo sa deje, keď študent vstúpi na fakultu, kde sa má profesionálne vychovať. Na začiatku 50. rokov sme osamostatnili odborné štúdium matematiky. Oddelili sme ho od fyziky. V poriadku. Matematika je dnes natoľko rozsiahla, že je čo robiť, aby mal študent dosť času na premyslenie (t. j. naučenie sa) jej najdôležitejších častí. Pokročili sme ďalej. Aj matematiku sme rozdelili na odbory a zamerania, takže mladý absolvent končí štúdium v jednom z najmenej 8 zameraní. Aj to by bolo správne, pokiaľ by sa absolventi mali stať vedeckými pracovníkmi v ortodoxnom slova zmysle. To je, pravda, dosť ťažko predvídať. V profilácii absolventov sa hovorí niečo iné. Ide o výchovu pracovníkov pre výskumné ústavy, výpočtové laboratóriá, pre podniky a priemyselné závody a aj pre vysoké školy.

Lenže ja si dobre neviem predstaviť, ako môže matematik pomôcť napr. tvorivému inžinierovi, keď nepozná princípy fyzikálneho myslenia a nemá vlastne nijaký (ani papierový) vzťah k experimentom. Čím viac nad tým rozmýšľam, tým viac si myslím, že sme matematikov vlastne ochudobnili. Neviem, či nenarazím na odpor, ak odporučím, aby aspoň 10% výchovy matematikov bolo venovaných fyzike. Prakticky to znamená osemsemestrový kurz z fyziky po 3–4 hodinách. Samozrejme nie náhodne vybrané prednášky, ale ucelený, vopred dôkladne premyslený kurz odprednášaný zrelými ľuďmi.

Ja viem, že existujú napr. dôležité aplikácie kombinatoriky na to, čo voláme informatika (computer science), ktoré nemajú nič spoločného s Newtonovou mechanikou. Predsa si len myslím, že človek, ktorý nevie, ako Newton odviedol gravitačný zákon z Keplerových zákonov, nie je matematicky dobre vychovaný. O takomto triumfe aplikácie matematiky na fyziku by predsa len mal vedieť. Práve tak ako o tom, ako Maxwell matematicky predpovedal existenciu elektromagnetických vĺn (prv než boli experimentálne dokázané). Takých príkladov je mnoho, aj keď nie sú všetky tak revolučné.

Možno, že toto je názor konzervatívny, a že mu budú oponovať ľudia, ktorí plánujú pracovať úplne a navždy v nejakom úzkom odbore, o ktorom sa domnievajú, že bude navždy moderný. Majú na to samozrejme právo. Len či je to rozumné.

V jednom sme určite zajedno. Matematika sa stala profesiou a prenikla ďaleko za brány vysokých škôl. Lenže za to vďačíme skôr počítačom než zavedeniu matematických metód do biológie, alebo technológie ropy.

Samotný fakt, že sa veľká časť matematikov dostáva na mimoškolské pracoviská, treba považovať za zdravý vývin.

Nebudem sa tu zaoberať otázkou aj u nás nastupujúceho priemyslu výroby počítačov v širokom slova zmysle. Na to sú iste povolanejší odborníci. Patrí sa ale povedať dve-tri vety zo všeobecne spoločenského hľadiska. Počítače budú mať v krátkom čase na rozvoj vzdelania (zdôrazňujem všeobecného vzdelania) prinajmenej taký vplyv, ako kedysi vynález tlače. Pri ich praktickom používaní nie sú potrebné, samozrejme, zo strany užívateľa nejaké hlboké teoretické znalosti z informatiky. Skôr je potrebný istý druh všeobecného matematického vzdelania. Preto je žiadateľné, aby sa každý občan díval na matematiku ako na súčasť kultúry spoločnosti a nie ako na strašidlo. Na docelenie toho pracujeme, alebo by sme mali pracovať, všetci, od učiteľov základných škôl po špeciálne vedecké ústavy.

Počítače ako také sú aj pre matematika iba pomôckou. Dôležitejšie je spojenie matematiky s inými vednými odbormi a aplikácie v netradičných odboroch. Aj matematik samozrejme experimentuje na počítačoch. To, čo však matematika v klasickom slova zmysle predovšetkým zaujíma, je to, čo sa volá „mathematics of computation“, slovensky „matematické štúdium výpočtových procesov“.

Čítal som veľmi mnoho, predovšetkým zahraničných článkov, o úlohe matematika v priemysle a v národnom hospodárstve v širšom slova zmysle. Medzi nimi napríklad články vedúcich pracovníkov takých koncernov ako je IBM alebo Bell-Laboratories a iných. Skoro všade sa píše asi toto: Je vcelku nepodstatné, ktorý z odborov matematiky mal študent za svoj hlavný odbor. Podstatné je, že sa prepracoval k matematickému spôsobu myslenia, je v stave čítať vedeckú literatúru a samostatne sa ďalej vzdelávať. Netreba tu zdôrazniť, že tu hrá úlohu vlastná iniciatíva.

Na koniec tohto odseku (ako sa rodia matematici) by som sa predsa len vrátil k jednej otázke, ktorú si myslím, zanedbávame.

Študent na strednej škole (na celom svete) rieši matematické problémy. Vychováme z neho riešiteľa problémov. (Mlčky predpokladám, že skutočnosť, že učitelia na našich gymnáziách prednášajú, namiesto aby učili, je prechodný jav, ktorý čoskoro zmizne). Pri výchove matematika-profesionála učíme teóriu. Matematik je vychovávaný skôr k budovaniu teórie, ako k riešeniu problémov. Inými slovami, vysokoškolák sa matematiku skôr učí, než by ju prežíval. Na riešenie problémov nemá čas.

Čo je to tá teória. To je postupnosť viet, ktoré sa dajú (aj s dôkazmi) naučiť – bez toho, že by som sa musel príliš namáhať. Ten, kto to vymýšľal, mal motiváciu. Má ju vždy aj ten, kto sa ju učí?

Lenže naprotá väčšina absolventov už zajtra pôjde do zamestnania na mimoškolské pracoviská. Nielen preto, že naše vysoké školy sú už učiteľmi saturované. Ale preto, že to budúcnosť národného hospodárstva vyžaduje. Všetci nepôjdu za programátorov. A uplatnenie matematika v národnom hospodárstve (špeciálne v priemysle) vyžaduje skutočne, ako to ukazuje prax, riešiteľov problémov. To som vyčítal aj z celosvetových skúseností. Reálna prax predkladá problémy a žiada ich riešenie. Pritom ich nepredkladá vo forme „Tu je problém z algebry, tu je problém z diferenciálnych rovníc alebo z diferenciálnej geometrie. Rieš ho!“

Najlepšie sa o tom presvedčíte, keď si pozriete, akú širokú škálu problémov predkladá operačný výskum.

Tu je (a hlavne bude) rozpor medzi výchovou a jej cieľmi. Nie som, pravda, osobne celkom presvedčený, že postoj potrebný k práci matematika v priemysle bude možné študentom sprostredkovať vždy priamo na prednáškach.

Rozhodne sa nad tým treba zamyslieť aj v súvisi s tým, čo budem hovoriť neskôr.

## 2. Matematik ako učiteľ na vysokej škole

O tom len krátko. Koho vlastne učíme?

Keď sa spýtate ktoréhokoľvek dekana, čo ho trápi, povie vám: tendencia k priemer-nosti. Podľa môjho názoru si študenti takúto tendenciu prinášajú so sebou už zo strednej školy. Nikdy nebudem hromžiť na študentov. Vždy som v nich hľadal len to najlepšie. Na gymnáziách majú žiaci toľko učiva z najrôznejších predmetov, že nakoniec nevedia nič poriadne. To platí v plnom rozsahu aj o matematike. Ja sa tomu nečudujem. Všetci viete, že študent gymnázia sa učí riešiť krkolomné nerovnosti s absolútnymi hodnotami a s parametrom. Vie derivovať a integrovať, ale má ťažkosti s úpravou zlomku, nemá skúsenosti s narábaním s trigonometrickými funkciami, má zmätok v analytickej geometrii, nevie narysovať priestorový útvar a hľadať v ňom uplatnenie Pythagorovej vety. To by ma vlastne ani tak nerozčuľovalo. To všetko sa dá dohnať.

Nechcem tu predvídať apoteózu krásy matematiky. Čo ma skutočne rozčuľuje, je, že sa táto krása a názornosť zastiera formalizmom, ktorý síce pre mňa neznamena vôbec nič, pre 15ročného dorastajúceho mládenca je postačujúci na odstrašenie. Je tu viditeľná snaha o potlačenie názoru a snaha po istom perfekcionizme v detailoch. To sa prenáša čiastočne aj na vysoké školy. Mám dojem, že menovite na technických vysokých školách to vyslovene škodí. Myslel som si ešte pred 10 rokmi, že tendencia k priemernosti nie je u budúcich absolventov matematiky. Priatelia z univerzity ma presvedčujú, že sa mýlim. Aj vysoké percento študentov matematiky nepatrí práve do kategórie tých, o ktorých možno jednoznačne povedať, že chcú študovať matematiku a len matematiku. (Mnohí z nich vypadnú v priebehu štúdia, našťastie pre nich aj pre matematiku.) Nie je to nijaká katastrofa. Zlé je však, ak študent nezávisle od toho, či je to matematik, alebo inžinier, nad látkou nerozmýšľa, pasívne ju akceptuje, odriekava na skúške, ale ani sa nenamáha, aby si ju zapamätal.

Nezávislé od toho všetkého, učiť nie je, pravda, zamestnanie v bežnom slova zmysle. Nie je to remeslo. (Dokonca ani skúšať nie je remeslo, aj keď môže ísť silne na nervy.) Učiteľ sa musí neustále snažiť o zlepšenie podania a starostlivo si pripravovať prednášky a cvičenia. Ale to nie je všetko. Musí sám na sebe vyskúšať, či je jeho metóda výuky dobrá. To ho nevyhnutne vedie k samostatnému rozmyšľaniu, a to je prvý krok k vedeckej činnosti.

Vôbec si nemyslím, že by každý učiteľ vysokej školy musel byť Einsteinom. Musí ale po 1. mať samostatný názor na látku, ktorú učí, po 2. v nejakej oblasti musí byť schopný objaviť alebo znova objaviť nové veci. Nijaký učiteľ, ktorý sa vo vlastnom odbore systematicky a trvale nevzdeláva, nemôže byť dobrým učiteľom. Preto sa najmenej od

stredoveku vyžaduje od učiteľa (najmä od vysokoškolského učiteľa) aktívna tvorivá práca alebo aspoň originalita prístupu.

K tomu ešte jedna poznámka. Občas počuť, že XY je výborný odborník, ale nevie to podať. To je mýtus, naivné a predovšetkým kamufľáž. Niečo viem len vtedy, ak to viem jasne povedať. Ak som zmätený vo výrokoch, nepoznám súvislosti, nemám to domyslené. Teda to neviem. To neplatí len o matematikoch. Neskôr ešte zdôrazním: Ak neviem komunikovať, je akákoľvek vedecká alebo aj len odborná spolupráca s inými skoro vylúčená.

### 3. Matematik a iné vedné odbory

Najjednoduchšia metóda ako zistiť, čo potrebuje napr. inžinier z matematiky v jednotlivých odboroch spočíva v tom, že položíme vhodne vybranému pracovníkovi príslušnej katedry dve otázky.

Otázka A: Čo potrebuje študent z matematiky v priebehu štúdia?

Otázka B: Čo potrebuje učiteľ k vlastnej vedeckej činnosti? (Rozumie sa z matematiky.)

Nie je dobrým znamením, ale stáva sa, že odpoveď na otázky A a B je prakticky rovnaká. Validita takého respondenta je v mojich očiach otrávená. Na tú istú otázku, napr. na otázku A, vám dajú, ako skúsenosť učí, nielen pracovníci rôznych kateder, ale aj pracovníci tej istej katedry dosť odlišné odpovede. Ťažko nájdete človeka, ktorý by bol ochotný rozmýšľať vo fakultnom meradle. Na jednej fakulte pripadá na jednu matematickú katedru 10 nematematických kateder. Ak to dáte všetko dohromady vznikne súbor nerealizovateľných požiadaviek.

Obmedzme sa najprv na študentov.

Samozrejme, požiadavky odborníkov sa menia. Tak napr. v 50. rokoch som sa musel hádať (s inak sympatickými ľuďmi), keď som trval na tom, že je potrebné učiť aj elementárne nerovnice, hovoriť o nespojitých funkciách alebo vykladať elementy teórie matíc. Dnes sa objavujú požiadavky ako zovšeobecnené funkcie, Hilbertove priestory, ortogonálne rady, všeobecná teória operátorov, atď. Vždy sa ozývali hlasy po parciálnych diferenciálnych rovniciach. Netreba to brať príliš tragicky. Pri bližšom skúmaní zistíte, že žiadateľ potrebuje tak 1–2 parciálne diferenciálne rovnice alebo jeden špeciálny systém ortogonálnych funkcií ap.

Najhoršia je skutočnosť, že sa tá rozmanitosť nedá previesť na spoločného menovateľa. Aj veľmi dobrý konzument matematik y nevie – a nikto to od neho nemôže žiadať – ako rozmanité požiadavky zahrnúť do širšieho rámca nejakého oddielu matematiky, v rámci ktorého by bolo možné požadovanú látku rozumným spôsobom aspoň priblížiť. To musí urobiť, pravda, matematik.

Pretože sa požiadavky nedajú adekvátnym spôsobom predniesť, vznikla nakoniec v podstate správna snaha okrem rutinných algoritmov naučiť matematickému spôsobu myslenia. Ale toto heslo skrýva v sebe isté nebezpečenstvo. Nedá sa s úspechom robiť z vyslovene abstraktnej polohy, ku ktorej majú matematici vždy tendenciu.

V tejto súvislosti treba povedať to, čo každý z vás asi vie. Úspechy matematiky za posledných 30–40 rokov, ktoré sú viazané na mená Shannon, Wiener, Neumann, Kolmogorov a ďalšie dva tucty, vychádzali vždy z veľmi konkrétnych, skoro inžinierskych pozícií. Stačí prelistovať napr. zobraňé spisy Shannona. Boli a sú to prirodzene ľudia vysoko matematicky erudovaní, ktorí keď by chceli, vedeli by byť maximálne abstraktní a maximálne precízni. Lenže puntičkárska presnosť ani zďaleka nevedie k invencii.

Som tak trochu niekedy zúfalý, keď zisťujem, čo si kto pod heslom „matematický spôsob myslenia“ predstavuje.

Na druhej strane, v rôznych tých odborových komisiách je dosť dobromyseľných ľudí, ktorí tvrdia, že by vedeli vyložiť za hodinu to, čo ja prednášam 4 hodiny. Po prvé, zabudli, že im samotným to trvalo 10 rokov, než sa im niektoré pojmy stali jasnými. Podstatnejšie ale je, že nevidia dosť dobre do logickej výstavby matematiky, a nevyhnutne teda nevidia ani do logickej výstavby toho, čo sa niekedy ľubozvučne nazýva metódami aplikovanej matematiky.

Márna sláva. V matematike je aj kus umenia a toto umenie musíme sprostredkovať aj proti vôli zákazníka (v tomto prípade študenta), ktorý by chcel mať na všetko recepty. Študent musí trochu vniknúť do architektúry matematiky. Inak by napríklad ako hotový inžinier nebol schopný sa v matematike zdokonaľovať.

Nakoniec k tejto študentskej časti ešte toto: Existuje ľúbivé heslo: „Vyučovanie by malo odzrkadľovať vývin príslušného vedného odboru“. To je v podstate správne. Ale pri výchove inžiniera v matematike nerealizovateľné. Ani pri najlepšej vôli nie je možné a nie je rozumné preskakovať celé vývinové etapy. To by sa pomstilo.

Obrátíme sa k druhej časti, t.j. neštudentskej. Ako môže matematik s úspechom spolupracovať s tvorivým inžinierom, biológom alebo sociológom.

Najjednoduchšia situácia je táto: Nové knihy, napríklad technického charakteru, alebo vedecké práce, sú často písané štýlom, ktorý je cudzí inžinierovi, ktorý študoval pred 20 rokmi. Ak ide o metódy v matematike viac-menej bežné a často používané, je vec vcelku jednoduchá. Matematik tu vystupuje ako konzultant. Takáto činnosť je osožná aj pre matematika, lebo si rozširuje obzor a získava nové pohľady, na čo je matematika dobrá. Každá technická veda sa opiera o isté fyzikálne princípy. Pre úplné pochopenie o čo ide, je aspoň čiastočná znalosť fyziky veľmi osožná. Už pri tejto fáze spolupráce je užitočné, aby matematik ovládal základy rôznych odborov matematiky.

Sú seriózní ľudia, ktorí tvrdia, že vychovať behom 4–5 rokov profesionálnej výchovy v takejto šírke nie je možné. Matematika sa príliš rýchlo rozvíja a už dnes je príliš špecializovaná. Ja si ale predsa myslím, že existuje niečo ako spoločný základ príkladov, postupov, trikov a pojmov, ktoré tvoria intelektuálne dedičstvo matematiky. Mám na mysli skôr typické príklady než rozsiahle teórie.

Komplikovanejšia situácia je, ak ide o i riešenie úlohy, ktorej riešenie nie je možné bezprostredne nájsť v literatúre. V tomto prípade je najdôležitejším nájsť spoločnú reč, možnosť vzájomnej komunikácie. Obaja majú nevyhnutne rôzny spôsob myslenia a rôzny prístup k problémom. Inžinierske problémy bývajú obyčajne veľmi konkrétne. Model, ktorý je matematikovi predložený, môže byť nesprávne zjednodušený.



Nematematik, aj keď nie je matematicky naivný, nie je ochotný komunikovať v termínoch zobrazení, tried ekvivalencií a faktorových priestorov. Matematik začne podvedome uvažovať o existenčných teorémoch, inžinier myslí na experiment, ktorý by mu mal potvrdiť teoretické výsledky. Akonáhle sa nájde len jeden styčný bod, v ktorom si rozumejú, je ďalší postup a spolupráca možná. Obe strany musia ale veľmi chcieť. Inžinier (alebo biológ, alebo sociológ) musí byť vnútorne presvedčený o tom, že mu matematika môže pomôcť. A nepoužíva ju len preto, že je to módne alebo že sa to vyžaduje od kandidátskej dizertácie. Matematik musí byť osobne presvedčený o sile matematiky a o tom, že sú to iba jeho nedostatočné znalosti, ak jeho úsilie nevedie hneď k riešeniu.

Reálne problémy sa dajú väčšinou len vo veľmi obmedzenej miere striktno matematicky podchytiť. Je potrebné abstrakciou alebo zjednodušením uviesť ich na tvar, ktorý je matematicky prístupný. Toto modelovanie tvorí základnú aktivitu v aplikáciách matematiky. Modelovanie je iteratívny proces. Treba mať neustále na mysli súvis s realitou. Obyčajne sa musí robiť spoločne. K tomu je potrebná schopnosť k diskusii a vzájomnej argumentácii.

Od matematika sa tu žiadajú dve veci. Po prvé. Trošku širší záber, t. j. aspoň akási znalosť z rôznych odborov matematiky. Inak mu ľahko uniknú súvislosti. Po druhé. Adaptibilita, schopnosť vedieť sa prispôbiť. K tomu by sa mal viesť matematik od začiatku svojej výchovy. Na to, pravda, nestačí ani vynikajúci učiteľ, skôr vlastná zvedavosť. (Ešte lepšie česky „zvídavosť“.) Tu je jeden z ďalších momentov, kde realita a ideálne ciele bývajú v rozpore.

Aj keď mladý matematik pracuje s úspechom v nejakej úzkej oblasti, nemal by sa uzatvárať pred inými partiami matematiky. Som dosť alergický, keď mi 30ročný človek povie, že nie je schopný alebo nechce meniť smer svojho osobného záujmu ani vnútri tzv. čistej matematiky. On si neuvedomuje, že širší rozhľad mu umožní lepšie odhadnúť výsledky vlastnej práce a začleniť ich do celkového vývinu matematiky.

Musíme si priznať, keď my žiadame od technika, aby vedel matematiku, prečo by nemohol chcieť on od nás, aby sme sa vyznali v malom úseku nejakej technickej, prírodnej alebo ekonomickej vedy. Nebudem sa odvolávať na klasikov Eulera alebo Lagrangea. Každý z nás vie, čo sú to Banachove priestory a čím prispel Banach k funkcionálnej analýze. Zdá sa mi ale, že málo ľudí vie, že ten istý Banach napísal krásnu knihu o mechanike. Keby existovalo v matematike niečo ako povinné domáce čítanie, nariadil by som každému matematikovi túto knihu ako povinné čítanie.

Vráťme sa ale k spolupráci. Neraz sa mi stalo aj toto: Ktosi príde, pohodlne sa usadí, začne o niečom mrmlať a povie: „Pomôž!“ Máte čo robiť, aby ste aspoň vytužili, čo ho vlastne trápi. Keď som bol mladší, mal som na to metódu. Povedal som mu: „Napíš mi, čo chceš.“ Ale čoskoro som zistil, že mi zákazníkov ubúda.

Trvalo mi dosť dlho, kým som vnútorne uznal, že existujú aj iné vedné odbory ako matematika a fyzika. Je nielen mysliteľné, ale aj možné, že niektorý problém je celkom dobre formulovaný v termínoch iného odboru, ale nepoznáme ani približne jeho adekvátny matematický popis. To sú najťažšie problémy. Takéto sú niektoré problémy spoločenských vied alebo ekológie.

Vzniká teraz otázka, ako viesť mladších matematikov k záujmu o aplikácie matematiky v iných vedných odboroch. Je prirodzené, že absolvent matematiky, ktorý má

akési vedecké (alebo často len osobné) ambície, bude sa väčšinou snažiť urobiť kandida-túru z tzv. čisto matematickej problematiky. To je v poriadku. V ďalšom mám na mysli človeka už s istým matematickým vzdelaním.

Treba jasne povedať: Pracovať v interdisciplinárnom odbore nesie so sebou vždy riziko. Riziko počiatočných neúspechov. Preto sa mnohí inštinktívne od toho odťahujú. Klásť prácu v tzv. čistej matematike nad tvorivú prácu v interdisciplinárnej oblasti by bol neprípustný snobizmus. Ale pozor, ani opak nemusí byť pravda.

Aby sme si rozumeli. Neverím príliš v trvalé direktívne metódy v oblasti, o ktorej hovoríme. Vonkoncom sa nezdá byť vhodným vystupovať vzhľadom k svojim spolu-pracovníkom trvale z nejakých mocenských pozícií. Moc nemá nikdy schopnosť uznať vlastné omyly, a to nepridáva na autorite. Aj mladým spolupracovníkom imponuje, ak uznám omyl a právo mylíť sa a ustúpiť.

Medzi matematikmi je už dávno bežné usporadúvať semináre, ktoré sú prístupné každému, kto sa o veci zaujíma, nezávisle od toho, kde pracuje. Takéto semináre vznikli z pôvodne úzkych katedrových seminárov. V samotnej Bratislave je 25–30 takýchto seminárov (rozmanitej úrovne).

Nebolo tomu vždy tak v rozmanitých odboroch technických vied. V dávnejšej minu-losti som sa pokúšal sám preniknúť do takých technických seminárov. S nevelkým úspechom. Buď neexistovali, alebo sa konali veľmi sporadicky a nie systematicky. To sa dnes značne zlepšilo. Aspoň pokiaľ sám vidím. Samotné nematematické katedry volali spočiatku matematikov na sériu prednášok napr. o teórii množín, o matematickej logike a iné. Išlo vlastne o osvetovú činnosť. Ale malo to tú výhodu, že boli nadviazané kon-takty. Neskôr sa kontakty rozšírili a – zdôrazňujem, pokiaľ sám dovidím – poznám niekoľko pracovísk a ústavov, kde sa spolupráca dobre rozbehla. Od ideálneho stavu sme ďaleko.

V posledných rokoch vyšiel rad vynikajúcich kníh na témy ako: aplikovaná algebra, aplikovaná funkcionálna analýza, aplikovaná logika, atď. Spoločné semináre a kolek-tívne čítanie takých kníh sa mi zdá byť výborným základom. Je z toho obojstranný zisk. Nie je hanbou sa priznať, že existujú aj elementárne veci, v ktorých nie som absolútne doma. Takáto sebakritika je hnacou silou akéhokoľvek napredovania.

Aj keď som proti trvalému nátlaku, menší počiatočný mocenský impulz k návšteve takých seminárov nie je na zahodenie. Lebo aj mladý človek je od prírody tak trošku lenivý.

Ešte kus osobných skúseností. Od konca 50. rokov začal som konať prednášky z vy-braných partií matematiky pre pracovníkov matematických i nematematických katedier, ústavov SAV a rezortných výskumných ústavov. Chodilo tam nemálo aspirantov. S malým prerušením som ich konal donedávna. Látku si určovali účastníci sami. Pravda musel som hľadať toho chýrečného spoločného menovateľa, aby to malo nejaký matema-tický „halt“. Niekedy som látku aj jemne nanútil. Snažil som sa, aby látka bola prešpi-kovaná drobnými aplikáciami a numerickými metódami. Mnohé z toho som sa musel, samozrejme, sám učiť. Nemohol som mať v zásobe veci napr. z informatiky, ktoré pred 20 rokmi ešte neexistovali. Chodilo tam trvale 50 až 100 ľudí. Samozrejme dobrovoľne. Niektorí vydržali až 10 rokov. Ak počítam v dekádach, niektorí boli len o veľmi málo mladší ako ja sám a mnohí boli výbornými odborníkmi v svojom odbore. S nimi som

naozaj hovoril ako rovný s rovným. Občas mi povedali, že látke vždy nerozumejú, ale chodia tam, lebo ich baví počúvať, ako sa matematika vlastne rodí a vidia súvislosti, na ktoré by sami neprišli. A to mi stačilo. Nič iné som nechcel. Chcel som zvyšovať ich aj svoju matematickú kultúru. Lebo, ako cirkev hlása: „Dobrý farár sa učí do smrti.“

Na záver tohto úseku si neodpustím toto: Kdesi som čítal: „Neexistuje (aspoň zatiaľ nie) výťah na Mount Everest. Horolezec sa musí ťažko prebijať.“ Dodávam: Ani na ďaleko nižšie kopce a vrchy. Najlepšia cesta ako sa dostať k výskumu je robiť ho. V angličtine sa hovorí „learning by doing“. Myslím, že sa nemýlim.

#### 4. Čo je to matematická kultúra

Pred chvíľkou som sa dostal k slovnému obratu „matematická kultúra“, ktorý sa v posledných 10. rokoch dosť často skloňuje v rôznych pádoch. Často nevhodne. Mnoho rokov som rozmýšľal, aká je podrobnejšia náplň tohto slovného obratu. Keď som v r. 1976 v Žiline pred týmto fórom prednášal, mal som to aj pripravené. Ale vynechal som to. Náhodnou zhodou okolností čítal som asi pred rokom v Notices príspevok na rovnakú tému. Naše názory (myslím autora príspevku a moje) sú prakticky rovnaké. Ale jeho štýl je elegantnejší. To, čo teda poviem, nie je celkom originálne.

Čo to znamená mať matematickú kultúru? Presná matematická definícia neexistuje. Ale pojem sám o sebe má zmysel. V mojom poňatí má ju (matematickú kultúru) človek, ktorý spĺňa približne týchto 7 podmienok:

1. Má istú, hoci aj nie detailnú predstavu o všetkých hlavných odboroch.
2. Pozná detailne aspoň jeden matematický odbor alebo pododbor alebo podpododbor.
3. V oblastiach, ktoré ovláda, vie povedať, kedy majú definícia, veta, alebo dôkaz zmysel. Kedy sú jasné a kedy nie.
4. Vo všeobecnosti sa vie ústne a písomne vyjadrovať nielen správne a presne, ale aj jasne.
5. Má zmysel pre proporcie. Vie, čo je v danom kontexte dôležité a čo nie. Vie posúdiť, akú váhu má látka, ktorú počúva alebo sám vykladá.
6. Má dostatočné (nie nevyhnutne hlboké) znalosti z histórie matematiky.
7. Má matematický vkus. Keď šíri matematické znalosti, vzbudzuje v poslucháčovi (alebo čitateľovi) pocit estetického uspokojenia.

K tomu tento komentár:

Matematicky civilizovaná osoba nemusí byť matematický virtuóz. Je to však človek, ktorý nachádza hlboké vnútorné uspokojenie z matematického umenia.

V rozvoji hudby hrá dôležitú úlohu nielen skladateľ a interpreti, ale aj obecenstvo v koncertnej sieni. Matematiku rozvíjajú nielen tí nemnohí jednotlivci, ktorí ju tvoria. Matematicky kultúrna osobnosť je v podstate vnímavý poslucháč, ktorý počúva súčasné matematické symfónie a ktorého záujem aj reakcie pomáhajú dotvárať obraz súčasnej matematiky.

Máme zvyšovať matematickú kultúru našich žiakov a spolupracovníkov? Samozrejme, ale ako, akými prostriedkami? Na to možno dať niekoľko odporúčaní. Vedúcou myšlienkou pritom je, že kultúra sa prenáša (a ťažko sa dá učiť z metodických príručiek):

1. Pri výbere látky na prednáškach, na seminároch, na vedeckých konferenciách treba neustále poukazovať na historický vývin, na ciele prednášanej látky a jej vzťah k iným odborom, menovite aj mimo matematiky.
2. Nevynechať žiadnu príležitosť, ktorá napomáha zvyšovať zručnosť pri písaní matematického textu.
3. Keď vyhodnocujem prejav študenta, aspiranta alebo spolupracovníka alebo aj seba samotného, treba pozornosť upriamiť nielen na korektnosť v striktnom slova zmysle. Treba vziať do úvahy aj jasnosť, motiváciu a dovoľávať sa aj estetiky.
4. Keď prezentujem nový objav alebo klasický výsledok, môže to niekedy vyznieť ako suché konštatovanie (účtovnícky výkaz). Keď ale chcem, aby tomu bolo naozaj rozumieť, musím byť schopný to podať v takej forme, aby ten, komu to prezentujem, v tom naozaj videl kus umenia.
5. Nie je jednoduché tvoriť nové umenie. Musíme sa pokúšať vždy a všade, keď sprostredkujeme matematiku, zachovať jej estetický aspekt.

## 5. Matematik a rozvoj matematiky ako vedy

Na úvod tohto odseku niekoľko všeobecných slov.

Veda, to nie sú len poznatky o prírode a spoločnosti, ale aj postupy, ktorými boli tieto poznatky dosiahnuté, a ľudia, ktorí ich získavajú. Ani matematika nemá len svoju odosobnenú poznatkovú bázu, ale obsahuje aj intímne stránky, vzťahujúce sa k jej tvorcom a ľuďom vôbec. Má svoju psychológiu, estetiku a etiku.

K psychológii poznávania: Na (povedzme) objektívnom póle je súbor užívaných metód, postupy skúmania; na druhom subjektívnom póle je schopnosť tieto metódy používať a pohotovo ich meniť podľa povahy skúmaného predmetu. Patrí sem aj zdravá skepsa a potrebná schopnosť pružného myslenia.

Emocionálna stránka vedy – ako som sa to už vyššie snažil zdôrazniť – nie je ani zďaleka zanedbateľná.

Každý oddiel vedy má svoje vlastné ciele. Nijaká veda sa nemôže rozvíjať, ak by mala byť iba pomocníčkou. Obrazne povedané: žiť v otroctve.

To, čo som doteraz hovoril o výchove mladého matematika, vyznievalo skôr staticky. Má porozumieť matematike a spolupodnikať sa v napredovaní iných vedných odborov. Išlo o úpravu infraštruktúry výuky matematiky. To je proces celosvetový, ktorý nemá žiadne špecifické československé aspekty.

My veríme v pokrok vedy ako celku. Každý z nás má určite v talóne 30 príkladov, ktorými vie dokázať vplyv matematiky na rozvoj iných vied. A teda vedy ako celku. Pritom sa to všetko neodohrávalo v nejakej neurčitej dávnejšej minulosti, ale odohráva sa aj priamo pred našimi očami.

Moderné telekomunikačné a regulačné systémy sú budované na matematickej báze vytvorenej ľuďmi ako Wiener, Shannon, Lefschetz a iní. Úloha Turinga, Boola, Neumanna, Ulama a iných pri prvých počítačoch je známa. Veľkí matematici aj dnes aj v minulosti prekračovali hranice svojich pôvodných odborov a boli vnútorne pripravení k interdisciplinárnym prístupom.

Pokrok v matematike má častejšie vnútro-matematické pohnútky než pohnútky z potreby nejakých špecifických aplikácií. To platí ostatne aj o mnohých iných vedách. Inak povedané: Matematika je poväčšine hnaná dopredu cieľmi, ktoré si matematici volia sami.

Spojenie matematiky s inými vedami, t. j. aplikácie, sú predvídateľné a nepredvídateľné.

Možno s určitou predviadať, že v budúcich 20 rokoch sa bude ďalej rozvíjať modelovanie. Bude sa rozvíjať matematika nelineárnych fenoménov, ktorým dnes dobre nerozumieme. Budú sa rozvíjať rozmanité aspekty matematickej štatistiky, od bezpečnosti jadrových reaktorov po metódy vyhodnocovania liečebných postupov pri rakovine.

Odvetvie matematiky, ktoré sa v posledných rokoch veľmi rozvinulo, je numerická analýza. To pramení z potrieb súvisiacich s veľkými počítačmi. Numerická analýza poskytuje výklad stability výpočtov a dáva odhady chýb vzniklých používaním konečných diferencií. Pomohla vytvoriť veľký rad praktických výpočtových metód. Aj rozvoj v tejto oblasti možno považovať za predvídateľný.

Krátko: predvídateľné sú aplikácie, pri ktorých viem, čo by som rád vedel, resp. čomu by som rád porozumel.

Nepredvídateľné aplikácie je ťažšie charakterizovať. Pramenia z univerzality a vitality matematiky.

Nepredvídateľná bola v 30. rokoch aplikácia geometrie Hilbertovho priestoru na kvantovú mechaniku. Nepredvídateľné bolo v 60. rokoch použitie konečných polí na konštrukciu samoopravných kódov. Práve tak súvis kódovania s algebraickou geometriou v posledných 10 rokoch. Neraz tu ide o triumf logiky nad predsudkami. Nepredvídateľné bolo použitie homotópie na klasifikáciu defektov v kryštáloch. Tu ide o topologické pojmy, od ktorých ani skúsení matematici nečakali, že budú mať tzv. bezprostredné praktické aplikácie. A nakoniec je takým príkladom sotva 3 roky starý príklad použitia elementárnej teórie čísel na konštrukciu prakticky nedekódovateľných kódov. To je mimochodom jeden z mála príkladov v matematike, na ktorý položili ruku vojaci.

Vonkajšie pohľady na matematiku a na činnosť matematikov sú verné iba vtedy, ak vychádzajú z toho, čo naozaj historicky matematika bola a zrejme aj bude. Podstatný prispievateľ k vede a technike ako celku. Laik sa môže čudovať, prečo pestujeme teóriu grúp. Ale každý len trochu inteligentný matematik vie, že teória grúp odráža vlastnosti symetrie reálneho sveta a má teda veľmi konkrétne korene.

História súčasne učí: Nová technika potrebuje novú matematiku. A preto musia matematici vytvárať novú matematiku.

Inovácia a objav v matematike spočíva v podstate vo formulácii nových koncepcií a v objasňovaní rozmanitých štruktúr. Matematike sa darí pri interakcii nezávislých stanovísk a rôznych prístupov k tomu istému problému.

Nové úspechy utvrdzujú samotných matematikov o sile matematiky.

Rovnováha medzi úrovňou matematiky a úrovňou jej aplikácií je historicky overená skutočnosť.

Nemôžeme si samozrejme dovoliť, aby nejaká módna oblasť potlačila dôležité tradičné smery, ktorých vplyv je často veľmi signifikantný.

Samotný fakt, že matematika tak často pomáhala predpovedať nové (experimentálne prv neoverené) skutočnosti, je nielen osožná záležitosť, ale pre zasväteného obsahuje aj silné estetické prvky. Všetky úspechy matematiky nezbavili matematiku toho estetického nádychu, ktorý jej je vlastný. Práve naopak.

Aby som zhrnul. Rozvoj matematiky tak, ako vyplýva z jej vnútorných potrieb, je absolútne nevyhnutný. Súčasne sa ale musia matematici zamýšľať nad tým, či dostatočne využívajú interdisciplinárne možnosti uplatnenia matematiky. To je opäť celosvetový problém. Každopádne by v tejto oblasti mala byť nastupujúca generácia ďaleko agresívnejšia, než boli predošlé generácie. Jednoducho preto, že spoločenské požiadavky sú iné.

Ďakujem vám za pozornosť.

## Současný stav metodiky difrakčního měření makroskopických napětí

*Ivo Kraus, Praha*

### 1. Hlavní etapy vývoje metody rentgenové tenzometrie

Pojmem tenzometrická metoda označujeme postup, kterým se stanovují v materiálech mechanická napětí. Jejich velikost a znaménko lze určit buď výpočtem z naměřené elastické deformace podle vztahů teorie elasticity, nebo ze souvislosti mezi napětím a některými fyzikálními vlastnostmi zkoumaného objektu, např. rychlostí šíření zvuku, mikrotvrdostí apod.

Základem rentgenografického měření makroskopických napětí je přesné měření elastických deformací vzdáleností atomových mřížkových rovin v krystalech vystavených působení vloženého napětí (existujícího jen při vnějším namáhání) nebo napětí zbytkového (přítomného ve zkoumaném tělese i po odstranění příčiny, která napětí vyvolala). Podmínkou vzniku zbytkových makroskopických napětí je nerovnoměrná plastická deformace. Předpokládejme např., že tahovou silou došlo v některých částech  $V^{e1}$  objemu vzorku k deformaci elastické, zatímco části  $V^{p1}$  téhož vzorku se deformovaly plasty. Po odlehčení tělesa (odstranění vnější síly) zůstanou objemy  $V^{e1}$  pod vlivem zbytkových tahů, v objemech  $V^{p1}$  budou naopak působit zbytková napětí tlaková.

Poznamenejme, že makroskopickým napětím nazýváme napětí, která jsou homogenní, tj. konstantní co do směru i velikosti, v objemech srovnatelných s objemem celé uvažované součásti. Napětí homogenní pouze v jednotlivých krystalcích polykrystalického materiálu označujeme naproti tomu jako mikroskopická.