

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Karla Kratochvílová; Jan Tichý; Jiří Zelenka

Význam pojmu rezonanční frekvence piezoelektrického výbrusu [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 6, 687--695

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138383>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

mnívat se, že urychlená plasma tryskající z magnetických trysek bude sloužit k pohonu budoucích kosmických raket. O významu pro přímou výrobu elektrické energie bylo již hovořeno. Proto dnešní úsilí velkého vědeckého kolektivu o vyřešení uvedených problémů jest plně oprávněné.

Literatura

- [1] J. Tobiáš, Pokroky III, 560, 1958.
- [2] W. Kliefoth, Atomkernenergie 3, 415, 1958.
- [3] R. Post, Rev. Mod. Phys. 28, 338, 1956.
- [4] L. A. Arcimovič, Atom. en. 5, 501, 1958.
- [5] H. Grümm, Atomkernenergie 3, 419, 1958.
- [6] Atomics 9, 336, 1958.
- [7] Nuclear Engennering 3, 423, 1958.
- [8] M. A. Cook, W. S. McEwan, Journal of Appl. Phys. 29, 1612, 1958.
- [9] Nuclear Engennering 3, 95, 1958.
- [10] Nucleonics 16, 66, 1958.
- [11] Nuclear Power 3, 486, 1958.
- [12] L. Spitzer, Atom en. Expres inf. 3, č. 11, 1959.
- [13] L. Spitzer, Phys. of Fluids 1, 253, 1958.
- [14] Atomn. en. Expres inf. 1, č. 1 a 2, 1959.
- [15] I. V. Kurčatov, Atom. en. 3, 105, 1958.
- [16] J. S. Luce, Atom. techn. č. 11, 10, 1958.
- [17] J. W. Butler a další, Atom. techn. č. 12, 3, 1958.
- [18] P. C. Thoneman, Atom. techn. č. 11, 3, 1958.

VÝZNAM POJMU REZONANČNÍ FREKVENCE PIEZOELEKTRICKÉHO VÝBRUSU

KARLA KRATOCHVÍLOVÁ a JAN TICHÝ, *Katedra matematiky a fyziky Vysoké školy strojní v Liberci*, JIŘÍ ZELENKA, *Výzkumný ústav elektrotechnické keramiky v Hradci Králové*

(Dokončení)

4. Ovlivnění rezonanční a antirezonanční frekvence sériově nebo paralelně připojenou impedancí

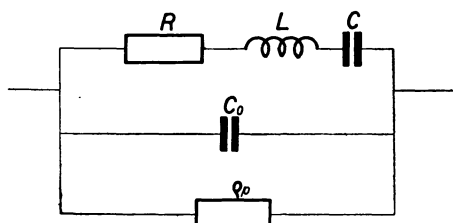
Vzhledem k významu rezonanční a antirezonanční frekvence pro funkci piezoelektrických výbrusů v oscilátorech bude užitečné si povšimnout, jak se tyto frekvence ovlivní, připojíme-li sériově nebo paralelně k výbrusu známou reaktanci (obr. 6a) a b)).

Nejprve věnujeme pozornost paralelní reaktanci a pro zjednodušení našich úvah zanedbejme tlumení. Neuvažujeme-li tlumení, splynou pojmy rezonanční a antirezonanční frekvence a pojmy sériové a paralelní resonance. Snadno zjistíme, že paralelně připojenou kapacitou sériová rezonanční frekvence nebude ovlivněna, kdežto hodnota paralelní rezonanční frekvence poklesne, a tudíž se zmenší i interval mezi sériovou a paralelní rezonanční frekvencí. Čím větší bude paralelně připojená kapacita, tím se tedy bude paralelní resonance přibližovat sériové, až, za uvedeného předpokladu zanedbatelného tlumení, pro nekonečně velikou paralelně připojenou kapacitu obě resonance splynou. Paralelně připojená indukčnost má na paralelní rezonanční frekvenci účinek opačný. Zatím co sériová rezonanční frekvence zůstane opět neovlivněna, frekvence paralelní resonance se zvýší, a to tím více, čím bude připojená indukčnost menší. V tomto smyslu paralelně připojená indukčnost kompenzuje

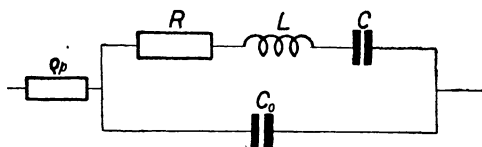
změnu paralelní rezonanční frekvence podmíněnou připojením paralelní kapacity. Kromě toho vznikne další paralelní rezonance s frekvencí nižší, než je frekvence sériové rezonance. Tato vedlejší paralelní rezonance se bude se zmenšující se indukčností přibližovat sériové resonanci.

Vezměme dále v úvahu i tlumení a označme paralelně připojenou reaktanci ϱ_p (obr. 6a). Může jí být opět buď kapacita C_p , a potom $\varrho_p = \frac{1}{\omega_s C_p}$, nebo indukčnost L_p , a potom $\varrho_p = -\omega_s L_p$. Impedanci Z' náhradního obvodu s takto paralelně připojenou reaktancí můžeme vyjádřit vztahem

$$Z' = \frac{\varrho_0 \varrho_p}{\varrho_0 + \varrho_p} \cdot \frac{\alpha \frac{\varrho_p}{\varrho_0 + \varrho_p} - j \left[\alpha^2 + x \left(x - \frac{\varrho_p}{\varrho_0 + \varrho_p} \right) \right]}{\alpha^2 + \left(x - \frac{\varrho_p}{\varrho_0 + \varrho_p} \right)^2} \quad (45)$$



Obr. 6a.



Obr. 6b.

Pro rezonanční a antirezonanční frekvenci soustavy z něj za předpokladu, že

$$4\alpha^2 \left(1 + \frac{\varrho_0}{\varrho_p} \right)^2 \leq 1, \quad (46)$$

plynou vztahy

$$x_r = \alpha^2 \left(1 + \frac{\varrho_0}{\varrho_p} \right), \quad x_a = \frac{\varrho_p}{\varrho_0 + \varrho_p} - \alpha^2 \left(1 + \frac{\varrho_0}{\varrho_p} \right). \quad (47) \quad (48)$$

Vidíme tedy, že za předpokladu respektování tlumení se pozmění i rezonanční frekvence, nicméně však velmi málo. Z podmínky (46) plyne, že paralelně připojenou kapacitu nesmíme zvyšovat zcela libovolně. Při její hodnotě

$$C_p = \frac{C_0}{2} \frac{1 - 2\alpha}{\alpha} \quad (49)$$

rezonanční i antirezonanční frekvence splynou, a při dalším jejím zvýšení se výbrus chová již jen jako kapacitní reaktance. Obdobně ani paralelně připojená indukčnost nesmí být libovolně malá.

Druhým významným případem je připojení nějaké známé reaktance sériově k piezoelektrickému výbrusu. Opět snadno zjistíme, že při zanedbání tlumení se nezmění tentokrát paralelní rezonanční frekvence. V případě sériově připojené kapacity se sériová rezonanční frekvence zvýší tím více, čím je připojená kapacita menší, až pro nekonečně malou kapacitu by opět sériová rezonanční frekvence splynula s paralelní. Sériově připojená indukčnost naopak sériovou rezonanční frekvencí úměrně své velikosti sníží. Zároveň vznikne vysoko nad paralelní rezonanční frekvencí nová vedlejší sériová rezonance.

Bez zjednodušujícího předpokladu o zanedbání tlumení bude v tomto případě sériově připojené reaktance (obr. 6b) impedance soustavy

$$Z' = \frac{\varrho_0 \alpha - j[x^2(\varrho_0 + \varrho_s) - x(\varrho_0 + 2\varrho_s) + \alpha^2(\varrho_0 + \varrho_s) + \varrho_s]}{\alpha^2 + (x - 1)^2}. \quad (50)$$

V případě sériově připojené kapacity je $\varrho_s = \frac{1}{\omega_s C_0}$ a indukčnosti $\varrho_s = -\omega_s L_s$. Pro rezonanční a antirezananční frekvenci ze vztahu (50) za předpokladu obdobného nerovnosti (46)

$$4\alpha^2 \left(1 + \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\right)^2 \leq 1 \quad (51)$$

plyne

$$x'_r = \frac{\varrho_s}{\varrho_0 + \varrho_s} + \alpha^2 \left(1 + \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\right), \quad (52)$$

$$x'_a = 1 - \alpha^2 \left(1 + \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\right). \quad (53)$$

Případ rovnosti ve vztahu (51) opět představuje podmínku splynutí rezonanční a antirezananční frekvence. Zatím co v případě paralelně připojené reaktance obdobný vztah (46) představoval omezení pro připojenou kapacitu shora a indukčnost zdola, je tomu v tomto případě naopak. Pro menší kapacitu, než udává podmínka (51), by se již celá soustava chovala pouze jako kapacitní reaktance.

5. Oscilátory budící piezoelektrické výbrusy v sériové a paralelní rezonanční frekvenci

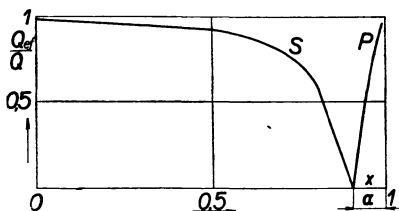
Z rovnic (41) a (42) jsme vyvodili, že s ohledem na stabilitu výbrusu je nejvhodnější jej budit v sériové nebo paralelní rezonanční frekvenci. V tomto smyslu zpravidla rozeznáváme i dva typy oscilátorů. Při zapojení výbrusu v oscilátorech se však prakticky nevyhneme tomu, aby způsob zapojení se neprojevil ve formě sériově nebo paralelně k výbrusu připojené kapacity. To má přirozeně důsledek v ovlivnění jeho sériové nebo paralelní rezonanční frekvence. Právě vliv paralelně připojené kapacity na paralelní rezonanční frekvenci a nezávislost sériové rezonanční frekvence na takto připojené kapacitě byly v neposlední řadě příčinou, že se počala oscilátorům, budícím výbrus v sériové rezonanční frekvenci, dávat přednost před ostatními [6, 11].

Obecně vlivem přídavných parasitních kapacit, majících svůj původ v zapojení výbrusu v oscilátoru, nebude však výbrus přesně kmitat ani na své sériové, ani na své paralelní rezonanční frekvenci. A přece i v těchto případech lze jednoznačně rozhodnout o charakteru způsobu buzení. O všech ovlivňujících kapacitách je nutno předpokládat, že přísluší k výbrusu a celou takto vzniklou soustavou uvažovat jako celek. O její rezonanční a antirezananční frekvenci můžeme pak mluvit jako o zobecněné sériové a paralelní rezonanční frekvenci piezoelektrického výbrusu. K tomuto způsobu pojetí celé problematiky nás ostatně zřetelně opravňuje i způsob, jakým se zcela běžně vyrovnáváme s vlivem mezery mezi výbrusem a elektrodami. Tato mezera se totiž právě projevuje jako sériově připojená kapacita. Watanabe [16] ukázal, že lze takto

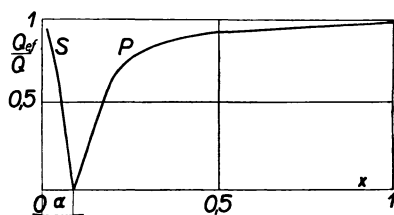
vzniklou soustavu nahradit novým jednoduchým náhradním obvodem (již bez sériově předřazené kapacity) a zároveň udal pro hodnoty tohoto zjednodušeného obvodu příslušné transformační rovnice. Zřetelně tedy předřadnou kapacitu způsobenou mezerou zahrnul do náhradního obvodu výbrusu.

Podle našich předchozích úvah, pokud uvažujeme pouze vliv parazitních kapacit bez jejich kompenzace indukčnostmi, padne patrně takto zobecněná sériová a paralelní rezonanční frekvence piezoelektrického výbrusu v oscilátoru mezi sériovou a paralelní rezonanční frekvenci samého výbrusu. Zároveň se však pochopitelně pozmění i efektivní jakost výbrusu, která je rozhodující pro jeho kmitočtovou stabilitu. Efektivní jakost výbrusu se bude se zvětšující se paralelně připojenou kapacitou zmenšovat podle vztahu

$$Q'_{ef} = Q \sqrt{1 - 4\alpha^2 \left(1 + \frac{C_p}{C_0}\right)^2}. \quad (54)$$



Obr. 7a.



Obr. 7b.

V případě sériově připojené kapacity bude naopak efektivní jakost klesat tím více, čím bude menší i sériově připojená kapacita

$$Q'_{ef} = Q \sqrt{1 - 4\alpha^2 \left(1 + \frac{C_0}{C_s}\right)^2}. \quad (55)$$

V souhlase s rovnicemi (46) a (51) je patrné, že pro kritické hodnoty, omezující velikost paralelně připojené kapacity shora a sériově připojené kapacity zdola, bude efektivní jakost soustavy rovna nule. Závislost efektivní jakosti vztažené na jakost samého výbrusu na hodnotě zobecněné sériové a paralelní rezonanční frekvence pro případ sériově a paralelně připojené kapacity je znázorněna na obr. 7a) a b). Z těchto obrázků je také zřetelně patrné, že jenom z hodnoty rezonanční frekvence nelze usuzovat, zda tato frekvence je zobecněnou sériovou nebo paralelní rezonanční frekvencí. Rozhodujícím je způsob zapojení a ovlivnění frekvence sériově nebo paralelně připojenou známou reaktancí.

Ze vztahu (48) a (52) můžeme ještě celkem snadno odvodit, jakou relativní změnu frekvence vyvolá nestálost sériově či paralelně připojené kapacity. Změna ΔC_s sériově připojené kapacity způsobí relativní změnu sériové rezonanční frekvence

$$\frac{\Delta \omega_s}{\omega} = - \frac{C}{2(C_0 + C_s)^2} \left\{ 1 + \alpha^2 \left(1 + \frac{C_0}{C_s} \right)^2 \right\} \Delta C_s \quad (56)$$

a změna ΔC_p paralelně připojené kapacity způsobí relativní změnu paralelní rezonanční frekvence

$$\frac{\Delta \omega_p}{\omega} = - \frac{C}{2(C_0 + C_p)^2} \left\{ 1 + \alpha^2 \left(1 + \frac{C_p}{C_0} \right)^2 \right\} \Delta C_p. \quad (57)$$

Při přibližně stejně velkých kapacitách C_s a C_0 , a pro nepřilíš velké tlumení je tedy citlivost příslušných rezonančních frekvencí na jejich změny v obou případech přibližně stejná.

Rozhodující předností buzení v sériové rezonanční frekvenci před buzením v paralelní rezonanční frekvenci je s ohledem na zpravidla malou hodnotu C_0 znatelně se uplatňující již zmíněná závislost hodnoty paralelní rezonanční frekvence na paralelních parazitních kapacitách a jejich kolísání. Jejich účinek můžeme jedině snížit, připojíme-li paralelně k výbrusu velkou, avšak stálou, kapacitu představující nízkoohmovou reaktanci. To však nepříznivě sníží i efektivní koeficient jakosti soustavy a tak lze pro případ paralelní resonance v tom směru nalézt jen určité kompromisní řešení. Naproti tomu sériově můžeme k výbrusu připojit libovolně malou reaktanci, která zajišťuje dobrou stabilitu i příznivou hodnotu efektivního koeficientu jakosti.

6. Výpočet hodnot náhradního obvodu piezoelektrických výbrusů s velkým ztrátovým odporem

Našich dosavadních úvah užijeme konečně ještě k poznámce, směřující v určitých případech ke zpřesnění způsobu stanovování indukčnosti a kapacity elektrického náhradního obvodu. Je známo, že tyto veličiny stanovujeme zpravidla tak, že k výbrusu sériově připojíme nějakou známou reaktanci, nejčastěji kapacitu, a změříme tím způsobem rozladění [14, 17]. S ohledem na vysoké Q krystalových výbrusů zanedbáváme při odvozování příslušného vztahu, sloužícího pro výpočet dynamické kapacity C náhradního obvodu z naměřeného rozladění Δf , rezonanční frekvence f_r , statické kapacity výbrusu C_0 a sériově připojené kapacity C_s , zpravidla tlumení a užíváme vztah

$$C = \frac{2\Delta f}{f_r} (C_s + C_0). \quad (58)$$

Někdy je však třeba měřit krystalový rezonátor, jehož Q je sice značně vysoké, avšak značně vysoká je i indukčnost elektrického náhradního obvodu tohoto rezonátoru a v důsledku toho je poměrně vysoký i jeho ztrátový odpor R . Je-li takový rezonátor, jehož statická kapacita bývá značně malá, měřen v obvodu, kde paralelně ke krystalu se řadí kapacita několikanásobně větší, potom ovšem není možno ztráty v rezonátoru jednoduše zanedbat.

Při měření náhradního obvodu v nejobvykleji užívaném Heegnerově zapojení kmitá zpravidla výbrus s frekvencí ω_m , při níž je jeho impedance minimální. I po připojení přídavné kapacity musíme tedy předpokládat, že soustava bude kmitat s frekvencí odpovídající její minimální impedanci. Vztah pro tuto frekvenci odvodíme z rovnice (27), když do ní za všechny veličiny dosadíme parametry zjednodušeného obvodu, který získáme z uvažovaného původního obvodu samého výbrusu se sériově připojenou kapacitou podle již zmíněných Watanabových rovnic:

$$\omega'_m = \omega_s \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{C}{C_0 + C_s} - \frac{C_0 R^2 (C_0 + C_s)}{2LC_s} \right\}. \quad (59)$$

Odečteme-li od této frekvence původní frekvenci výbrusu ω_m udanou rovnicí (27), dostaneme po úpravě pro rozladění vztah

$$\Delta\omega_m = \frac{1}{2} \omega_s \frac{C}{C_0 + C_s} \left\{ 1 - \frac{C_0^2 R^2 \omega_s^2 (C_0 + C_s)}{C_s} \right\} \quad (60)$$

a z něho již snadno hledaný korigovaný vztah pro dynamickou kapacitu

$$C = \frac{2(C_0 + C_s) \Delta\omega_m}{\omega_s} \left\{ 1 + \frac{C_0^2 R^2 (C_0 + C_s) \omega_s^2}{C_s} \right\}. \quad (61)$$

Protože kapacitu C_0 , která zahrnuje kromě statické kapacity rezonátoru také všechny parazitní kapacity řadící se paralelně k rezonátoru, nelze přesně určit, je výhodné vyloučit z čitatele zlomku C_0 zavedením měření dalšího rozladění. K měření použijeme tedy dvou přidavných kapacit C_{s1} a C_{s2} . Označíme-li si příslušná rozladění $\Delta\omega_{m1}$ a $\Delta\omega_{m2}$, bude dynamická kapacita C dána vztahem

$$C = \frac{2\Delta\omega_{m1}}{a\omega_s} \frac{C_{s1} - C_{s2}}{1 - \frac{\Delta\omega_{m1}}{\Delta\omega_{m2}} \frac{b}{a}}, \quad (62)$$

kde

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{C_0^3}{C_{s1}} (C_0 + C_{s1}) \omega_s^2 R^2, \\ b &= 1 - \frac{C_0^3}{C_{s2}} (C_0 + C_{s2}) \omega_s^2 R^2. \end{aligned} \quad (63)$$

Vraťme se však ještě ke vzorci (59). Jak bylo uvedeno, platí vztah (27) a tedy i vzorec (59) jen přibližně. Odvození vzorce (27) bylo provedeno totiž za předpokladu, že součin $\omega_s C_0 R$ je zanedbatelný proti $\frac{1}{2}$. Často je však třeba měřit rezonátory, jejichž statická kapacita C_0 nebo ztrátový odpor R je značně veliký a součin $\omega_s C_0 R$ nelze zanedbat vůči $\frac{1}{2}$. I když potom vzorec (59) platí jen přibližně, lze ukázat, že vzorec (62) je značně přesnější vzhledem k tomu, že zavedením dalšího rozladění $\Delta\omega_{m2}$ se předchozí chyba částečně eliminuje. Srovnáme-li výraz (59) s přesnějším výrazem pro ω'_m , který lze odvodit za použití Watanabových rovnic za vztahu pro ω_m z tabulky 1, uvedené v odstavci 7:

$$\omega'_m = \omega_s \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{C}{C_0 + C_s} - \frac{C_0 R^2 (C_0 + C_s)}{2LC_s} + \frac{1}{2} \frac{C_0^3 (C_s + C_0)^2}{C_s^2 C} \right\}, \quad (64)$$

je zřejmé, že nepřesnost vzorce (59) bude tím větší, čím menší bude kapacita C_s . Nepřesnost vzorce (59) a současně i vzorce (60) se projeví stejně, jako chyba v odečtení rozladění $\Delta\omega_m$. Mezi relativní chybou δ_c v určení kapacity C a relativní chybou δ_{m1} resp. δ_{m2} v určení rozladění platí vztah, který lze odvodit z totálního diferenciálu rovnice (62)

$$\delta_c = \delta_{\Delta C} + \frac{1}{a\Delta\omega_{m2} - b\Delta\omega_{m1}} (a\Delta\omega_{m2}\delta_{m1} - b\Delta\omega_{m1}\delta_{m2}), \quad (65)$$

ve kterém $\delta_{\Delta C}$ značí relativní chybu v určení rozdílu kapacit $C_{s1} - C_{s2}$. Chyba vzniklá nepřesností vzorce (59) by se tedy eliminovala, kdyby platilo

$$\frac{\delta_{m2}}{\delta_{m1}} = \frac{\Delta\omega_{m2}}{\Delta\omega_{m1}}. \quad (66)$$

7. Vztahy pro význačné frekvence piezoelektrických výbrusů s mimořádně velkým tlumením

Jak jsme přislíbili již v odstavci 2, vraťme se ještě jednou ke vztahům (1), (2) a (3) a pokusme se z nich přímo odvodit vztahy pro význačné frekvence piezoelektrického výbrusu ve formě nekonečných řad v nichž se omezíme na první tři členy. Jako referenčních frekvencí uijeme opět sériové a paralelní resonance, definované vztahy (5) a (6), a pro přehlednost dále koeficientu jakosti Q definovaného vztahem (7), a kapacitního poměru r , definovaného vztahem (14). Za použití tohoto označení můžeme výrazy (2) a (3) napsat ve tvaru

$$R_z = \frac{1}{\omega_s(C + C_0)} \cdot \frac{\omega^2 \left(\frac{1}{\omega_s^2} - \frac{1}{\omega_p^2} \right)}{\left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right]^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^4}, \quad (67)$$

$$X_z = \frac{1}{\omega_s(C + C_0)} \cdot \frac{-\frac{\omega}{\omega_s} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right] + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right\}}{\left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right]^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^4}. \quad (68)$$

Hledané význačné frekvence získáme obdobným způsobem, jakého jsme užili ve zjednodušeném případě v odstavci 2, tzn. položíme-li reaktanci X_z rovnou nule a vyhledáme-li extrémy impedance, reaktance a resistance. Více méně pracným výpočtem získané výsledky pro nejdůležitější charakteristické frekvence jsou uvedeny v připojené tabulce I. [8]. Podmínka (20) pro existenci rezonanční a antirezanční frekvence zůstává přitom i v tomto případě pochopitelně v platnosti.

Podotkněme jen ještě, že v případě, když položíme reaktanci X_z rovnou nule, abychom vyhledali rezonanční a antirezanční frekvenci, dostaneme vztah

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right] + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 = 0, \quad (69)$$

ze kterého, vzhledem k pravidlu o tom, že součin kořenů kvadratické rovnice je roven absolutnímu členu, vyplývá, že součin rezonanční a antirezanční frekvence je zcela přesně roven součinu sériové a paralelní rezonanční frekvence

$$\omega_r \omega_a = \omega_s \omega_p. \quad (70)$$

Konvergence jednotlivých řad uvedených v tabulce I. závisí nepřímou na velikosti kapacitního poměru r a přímo na koeficientu jakosti Q . Poměr obou těchto veličin jsme označili ve vztahu (13) α a nazvali koeficientem paralelního útlumu. Jeho velikost je omezena nerovností (20), avšak u jakostních výbrusů bývá mnohem menší než $\frac{1}{2}$. To většinou umožňuje omezit se na první dva členy příslušného rozvoje řady, aniž se přitom dopouštíme chyby přicházející prakticky v úvahu. Tak z rovnic uvedených v tabulce I získáme snadno v prvním přiblížení opět rovnice (23), (24), (27) a (28). Vztahů uvedených v tabulce I uijeme jen v případech zcela mimořádného tlumení.

Tabulka 1

$f_m = f_s \sqrt{1 + \frac{1}{2r} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4r^2}{Q^2}} \right]} + \frac{r^2}{2Q^4} = f_s \left\{ 1 - \frac{r}{2Q^2} + \frac{1}{2Q^4} \left(r^3 + \frac{3r^2}{4} \right) + \dots \right\}$
$f_r = f_s \sqrt{1 + \frac{1}{2r} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4r^2}{Q^2}} \right]} + \frac{r^2}{2Q^4} = f_s \left\{ 1 + \frac{r}{2Q^2} + \frac{1}{2Q^4} \left(r^3 + \frac{3r^2}{4} \right) + \dots \right\}$
$f_a = f_s \sqrt{1 + \frac{1}{2r} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4r^2}{Q^2}} \right]} - \frac{1}{2Q^2} =$ $= f_s \left\{ 1 + \frac{1}{2r^2} \left(r + \frac{1}{8r} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2Q^2} \left(r + \frac{1}{2} + \frac{3}{8r} \right) + \frac{1}{2Q^4} \left(\frac{r^2}{4} - r^3 \right) + \dots \right\}$
$f_n = f_s \sqrt{1 + \frac{1}{2r} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4r^2}{Q^2}} \right]} + \frac{1}{2Q^2} =$ $= f_s \left\{ 1 + \frac{1}{2r^2} \left(r + \frac{1}{8r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2Q^2} \left(r + \frac{1}{2} + \frac{3}{8r} \right) + \frac{1}{2Q^4} \left(\frac{r^2}{4} - r^3 \right) + \dots \right\}$
$f_p = f_s \sqrt{1 + \frac{1}{r}} = f_s \left\{ 1 + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^2} + \dots \right\}$

8. Závěr

V článku jsme se snažili podat stručný přehled o elektrických vlastnostech kmitajícího piezoelektrického výbrusu v okolí jeho rezonanční frekvence. Tyto vlastnosti jsme odvozovali z elektrického náhradního obvodu, který po elektrické stránce chování kmitajícího výbrusu v udržovaném kmitočtovém oboru reprezentuje. Předpokládali jsme o něm, že platí zcela přesně a nepřehlíželi jsme tedy přitom ani k závislosti chování výbrusu na teplotě, ani na amplitudě nebo časovém rozvinutí budícího napětí. Výsledky, ke kterým jsme dospěli, s výjimkou korekce pro výpočet dynamické kapacity silně tluměného výbrusu z rozladěného podmíněného sériově připojenou kapacitou, nejsou nikterak původní a můžeme je roztroušeně v literatuře nalézt. V našem článku jsme si pouze vytkli za úkol soustavně a pokud možno přehledně o nich pojednat a vymezit přesně platnost jednotlivých pojmů, aby nedocházelo při jejich používání k záměnám a omylům. Že se tato potřeba pocituje ještě dnes i jinde, vyplývá např. z článku Beckerova [3], který upozorňuje na zcela protichůdné pojetí způsobu buzení piezoelektrického výbrusu ve dvou zprávách [13], [2] o téže nové konstrukci velmi přesných křemenných hodin.

Závěrem děkujeme s. Zd. Polaufovi a O. Barešovi za pomoc při numerických výpočtech a narysování obrázků.

Literatura

- [1] Awender H. a Sann K., *Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker II*. Verlag für Radio- Foto- Kinotechnik, Berlin 1954, str. 160.
- [2] Awender H. a Sann K., *Telefunken Ztg.* 25 (1952), 269.
- [3] Becker G., *A. E. Ů.* 10 (1956), 467.
- [4] Bosoj, *Električeskije filtry*, Gosizdat. techn. lit. USSR, Kijev 1955.
- [5] Cady W. G., *Piezoelectricity*, Mc Graw-Hill, New York—London 1946.
- [6] Heegner K., *Elektr. Nachr. Technik* 15 (1938), 359.
- [7] Heising R. A., *Quartz Crystals for Electrical Circuits*, Van Nostrand New York 1952.
- [8] IRE Standars on Piezoelectric Crystals — The Piezoelectric Vibrator: Definitions and Methods of Measurement, 1957, *Proc. I. R. E.* 45 (1957), 353.
- [9] Mason W. P., *Electromechanical Transducers and Wave Filters*, Van Nostrand, New York 1946.
- [10] Mason W. P., *Piezoelectric Crystals and their Application to Ultrasonics*, Van Nostrand, New York 1950.
- [11] Meacham L. A., *Proc. I. R. E.* 26 (1938), 1278.
- [12] Petržílka V., *Piezoelektrina I*. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1951.
- [13] Scheibe A., Adelsberger U., Becker G., Ohl G. a Süß R., *Z. angew. Phys.* 8 (1956), 175.
- [14] Svoboda R. a Tichý J., *Slaboproudý obzor* 18 (1957), 689.
- [15] Tichý J., *Slaboproudý obzor* 16 (1955), 523.
- [16] Watanabe Y., *Elektr. Nachr. Technik* 5 (1928), 45; *Proc. I. R. E.* 18 (1930), 695.
- [17] Zelenka J., *Slaboproudý obzor* 18 (1957), 696.
- [18] Zelenka J., *Sdšlovací technika* 6 (1958), 177.
- [19] Zelenka J., *Slaboproudý obzor* 19 (1958), 20.

O DESÁTÉM TRANSURANU

Transurany jsou prvky uměle vytvořené; v přírodě se volně nevyskytují. Jsou pokračováním Mendělejevovy periodické soustavy prvků za uranem (atomové číslo $Z = 92$). Zatím se podařilo synteticky vytvořit pomocí urychlovačů elementárních částic deset těchto umělých prvků (synthesa desátého transuranu, o němž v tomto článku hovoříme, není ještě zcela bezpečně prokázána).

První transuran — *neptunium* (Np, $Z = 93$) byl získán v roce 1940 E. Macmillanem a F. Abelsonem (USA) ostřelováním uranu pomalými neutrony (reakce $U^{238} (n, \gamma) U^{239} \xrightarrow{\beta^-} Np^{239}$)¹).

$23,5 \text{ min}$

V témž roce 1940 se podařilo skupině amerických fyziků, vedené E. Macmillanem a G. Seaborgem vyrobit druhý transuran — *plutonium* (Pu, $Z = 94$) ostřelováním uranu deuterony s energií 16 MeV (reakce $U^{238} (d, 2n) Np^{238} \xrightarrow{\beta^-} Pu^{238}$).

$2,1 \text{ dne}$

Třetí transuran — *americium* (Am, $Z = 95$) získal v roce 1944 G. Seaborg se skupinou spolupracovníků ostřelováním uranu částicemi alfa s energií 40 MeV (reakce $U^{238} (\alpha, n) Pu^{241} \xrightarrow{\beta^-} Am^{241}$) a také ostřelováním plutonia (reakce $Pu^{239} (n, \gamma) Pu^{240} (n, \gamma) Pu^{241} \rightarrow Am^{241}$)²).

¹) Podrobněji o prvních devíti transuranech viz na příklad A. K. Лаврухина, *Трансурановые элементы*, *Priroda* 12 (1955); česky A. K. Lavruchina, *Transuranové prvky*, v tomto časopise I (1956), č. 3.

²) Viz také A. K. Лаврухина, *Успехи ядерной химии*, *Izvl. AN SSSR*, Moskva 1959.