Petr Hájek

Syntaktické metody matematické logiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 1, 22--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138085

tou existující zcela mimo naše smyslové orgány. Víme nyní, že hrubých modelů nelze použít k popisu takovéto reality. Můžeme si jenom přát, abychom vždy konstruovali takové matematické a jiné modely, které by byly dostatečně všeobecnými, aby zahrnuly jevy pokud možno z nejširší oblasti. Tyto nové metody jsou zřejmým pokrokem ve smyslu mé pracovní definice, pokud je extrapolace přípustná ve velmi malých rozměrech. Současně pak ukazují na slabá místa v našich znalostech, která vyžadují další zkoumání. Nechtěl jsem ovšem říci, že naše matematické modely jsou dokonalé. Domnívám se pouze, že představují obrovský pokrok ve srovnání s mechanistickými modely používanými před padesáti lety.

Přeložili a upravili Petr Řepa a Libor Pátý

SYNTAKTICKÉ METODY MATEMATICKÉ LOGIKY

PETR HÁJEK, Praha

Tento článek byl napsán ze dvou důvodů. Za prvé má dát čtenáři informativní přestavu o předmětu matematické logiky — aspoň v jednom jeho významném aspektu. Tento důvod by však sám o sobě nestačil, neboť čtenář má k dispozici např. přehledný článek Riegrův [8]*), který je třeba zájemcům vřele doporučit; ve srovnání s první polovinou mého článku dovědí se v Riegrově článku více o zásadním pojetí matematické logiky (nejen o jejích syntaktických aspektech), ale méně o konkrétním aparátu matematické logiky, jehož minimální znalost Rieger předpokládá. V tomto článku jsem však chtěl za druhé vyzdvihnout (snad subjektivně) finitně syntaktický aspekt matematické logiky (viz nadpis) a referovat o práci i výsledcích pražské matematickologické školy, založené zesnulým doc. L. RIEGREM a vedené nyní doc. P. VOPĚNKOU, která v aplikaci syntaktických metod na metamatematické problémy teorie množin dosáhla významných výsledků (alespoň pokud jde o jmenované představitele). První část článku informuje o předmětu matematické logiky, aniž předpokládá speciální znalosti. V druhé části, kde se referuje o metamatematické problematice teorie množin, se od čtenáře vyžaduje jistá orientace v teorii množin, např. v rozsahu přehledného článku akad. KOŘÍNKA [7].

Předmětem matematické logiky je podle Riegra [8] studium obecných zákonitostí vztahu důsledku mezi matematickými větami. Toto studium má dvě části: 1. formalizaci vztahu důsledku, tj. konstrukci formálních jazyků (logistických systémů), 2. vlastní studium takto zkonstruovaných systémů.

*) A také článek J. Hořejše [5]; jeho příspěvek mi nebyl znám při psaní tohoto článku. Čtenář pozná, že Hořejšův článek je zaměřen poněkud jiným směrem než mé pojednání (najde v něm např. zevrubné poučení o výrokovém počtu, o němž se v tomto článku vůbec nezmiňuji). Některé myšlenky, které lze najít jak v Hořejšově článku, tak zde, byly zde ponechány, aby čtenář, který se zajímá o výsledky pražské školy, měl k prostudování co nejméně průpravných partií, tj. aby vystačil s článkem, který má právě v ruce.

K osvětlení myšlenek formalizace matematické (obecněji, vědecké) řeči jakožto fragmentu přirozené řeči použijeme jisté (zjednodušené) představy badatele*). Náš badatel má (pozoruje) nějaký systém objektů, které mají nějaké vlastnosti a mezi nimiž jsou nějaké vztahy. Badatel formuluje věty, ve kterých konstatuje vlastnosti objektů a vztahy mezi nimi a podle jistých pravidel dedukuje další závislosti mezi nimi. Uveďme příklady. 1. Objekty mohou být pacienti nemocnice, „vlastnostmi" různé choroby, fakt, zda jim byly podávány určité léky atd., vztahem je pokrevní příbuznost atd. 2. (Hao Wang [10]) Jsou právě tři objekty, Čang, Li a Jang; tyto osoby sedí u kulatého stolu. Máme jediný vztah „sedět vpravo od". 3. Objekty jsou přirozená čísla, dvě čísla jsou ve vztahu S, jestliže první je následníkem druhého (tj. je o jedničku větší). 4. Objekty jsou prvky grupy,**) vyšetřuje se vlastnost „být prvkem grupy" a tříčlenný (ternární) vztah „... je součinem ... a ...". (Protože uvedenou vlastnost mají všechny objekty, je jistě zbytečné ji výslovně uvádět; bude se mi však v dalším hodit.)

Pokusme se podat formální (gramatický) popis vět, které vypovídají o podobných systémech objektů a které mají, řekněme, smysl (výrazu smysl zde používám bez jakékoli precizace). Vyskytují se v nich jakási vlastní jména (v širokém významu toho slova), označující jednotlivé objekty zkoumaného systému, dále slovesa (ve třetí osobě a v přítomném čase). Z vlastních jmen a sloves se skládají nejjednodušší věty, v nichž jsou vlastní jména podměty, resp. předměty, slovesa přísudky. Např. „Novák je nachlazen", „Li sedí vpravo od Janga" (chápejme „sedět vpravo od" jako nedělitelné sloveso), „Čtyřka je následníkem trojky" atd. Z takovýchto nejjednodušších (často holých) vět se tvoří složitější věty (souvětí) spojováním spojkami „a", „nebo", „jestliže — pak", „právě tehdy, když", dále se tvoří nové věty negováním („Novák není nachlazen"). Konečně chce náš badatel vyjádřit fakt, že nějakou vlastnost mají všechny pozorované objekty nebo že ji má aspoň jeden objekt. Pokud je zkoumaných objektů konečný počet, může první fakt vyjádřit tak, že všechny objekty vyjmenuje: „Novák je nachlazen a Růžička je nachlazen a...". (To je věta právě popsaného tvaru.) Nebo použije číslovky „každý" („všichni"), za niž připojí místo vlastního jména označení pro libovolný objekt systému, jakési proměnné nebo obecné jméno, např. „pacient". Podobně může pomocí číslovky „aspoň jeden" a obecného jména vyjádřit fakt, že mezi objekty je aspoň jeden, který má jakousi vlastnost.

Kdybychom pouze nahradili vlastní jméno obecným, nedostali bychom větu, která má přesný smysl: Pacient je nachlazen — ale který? (Ze souvislosti může být jasno, zda tento, právě jmenovaný, každý atd., ale k tomu nepřihlížejme.) Věta jako „Pacient je nachlazen" má spíš úlohu schématu vět, které vzniknou, nahradíme-li obecné jméno opět některým jménem vlastním. Když však po nahrazení vlastního jména

*) Srv. začátek knihy [1].

**) Pokud čtenář neví, co to je grupa, stačí, bude-li si pamatovat, že je to množina (systém objektů), na níž je jistým způsobem zadáno násobení (tj. pro každé dva prvky systému je definován jejich součin a tento součin je opět nějaký prvek systému), a to tak, že jsou splněny jisté přirozené požadavky.

obecným připojíme číslovku „každý" nebo „aspoň jeden", ztrácí obecné, či jak jsme též řekli, proměnné jméno svou proměnnost, naopak, dosadíme-li nyní za proměnné jméno jméno vlastní, ztratí věta smysl. Řekneme, že proměnné jméno je vázáno připojenou číslovkou.

Všimněme si, že můžeme zapomenout vše, co jsme říkali o smyslu vět a zbude nám návod, jak ze jmen a sloves tvořit (za pomoci uvedených spojek a číslovek) věty, aniž bychom přihlíželi k významu jmen a sloves, jen když je dán seznam jmen a seznam sloves (s údaji, kolik podmětů a předmětů které sloveso vyžaduje). Přitom nabudeme postupně plného přesvědčení, že každá věta, kterou náš badatel vysloví, bude tohoto gramatického tvaru nebo půjde lehko převést do takového tvaru (badatel totiž užívá řady možností přirozeného jazyka, jako je kontext, různé jazykové zkratky a obměny, aby se vyjádřil kratčeji a elegantněji). A nejen to: vyslovíme-li libovolnou větu uvedeného gramatického tvaru sestavenou ze seznamu výchozích jmen a sloves, bude badatele zajímat, zda je pravdivá či nepravdivá v systému, který zkoumá.

Podobně jde odpozorovat formální pravidla dokazování tak, že bychom byli schopni o každé badatelově úvaze rozhodnout, zda je (klasickým) logickým důkazem, aniž bychom rozuměli smyslu toho, co říká, a zase obráceně: každý sled vět sestavený tak, že jeho struktura odpovídá těmto formálním pravidlům, uzná badatel za důkaz (i když třeba nezajímavý). Tak např. z výroku „Novák není nachlazen" logicky vyplývá výrok „Existuje pacient, který není nachlazen" (jinými slovy, „Aspoň jeden pacient není nachlazen"), právě tak jako z výroku „Nula není následníkem" vyplývá „Existuje číslo, které není následníkem".

Pojem věty jazyka našeho badatele a logického důkazu věty z jiných vět jsme tedy schopni popsat syntakticky, tj. pravidly o tvaru seskupení slov a vět bez ohledu na jejich významy. To má zásadní důležitost pro matematickou formalizaci. Máme-li budovat formalizovaný jazyk, snažíme se úplně vybudovat jeho syntax bez ohledu na sémantiku (vše, co souvisí s významem, pravdivostí), což má (viz [2], Úvod) tyto důvody: 1. odpovídá to tradičnímu principu, že správnost úsudku závisí na jeho formě, nikoli na obsahu, 2. odpovídá to snaze o matematickou exaktnost, 3. je to nadějné, neboť pracujeme s minimálními předpoklady. (Poznamenejme, že i sémantiku formalizovaného jazyka lze matematicky studovat, ale se silnějšími předpoklady; o tom v tomto článku není řeč.)

Všimněme si na tomto místě, že pravidla logistického systému, tj. formálního jazyka, formulujeme v jazyce neformalizovaném (nemáme ani jinou možnost), v tzv. *metajazyce.* (V našem případě je metajazykem čeština.) Přitom se snažíme vymezit, které pojmy a představy pokládáme za známé, a to tak, že se snažíme, aby jich bylo co nejméně. Protože větami (formulemi) formalizovaného jazyka budou konečné posloupnosti jistých znaků, bude jako východisko nezbytný nějaký intuitivní pojem konečné posloupnosti. V metařeči budeme tedy pokládat za známou intuitivní aritmetiku přirozených čísel (pojetí tzv. intuicionistů se zde zdá být zcela adekvátní, sr. [4]) a pracujeme pomocí ní s konečnými posloupnostmi znaků. Jinak řečeno: smluvíme se na nějakých symbolech (mohla by to být např. písmena psacího stroje) a dohodneme se, že máme stejnou představu o tom, co je to konečná posloupnost těchto symbolů, a dále, že poznáme pro každé dvě takové posloupnosti např. následující věci: (i) zda jsou stejné (tj. zda jsou to dva exempláře téhož nápisu), (ii) zda první posloupnost je obsažena v druhé jako její část, (iii) zda je první posloupnost napsána bezprostředně před druhou ([3]). Takovému omezení říkáme omezení na finitní prostředky (nepřipouští se úvahy o libovolných nekonečných „množinách" formulí atd.).

Po těchto dohodách definujeme pojem *formule* (*věty*) *jazyka*, který je formalizací jazyka našeho badatele. (Tento formální jazyk se nazývá predikátový počet.)

Předpokládejme, že symboly našeho jazyka jsou rozděleny na symboly následujících druhů:

konstanty a, b, ...
proměnné x, y, ...
predikáty P, Q, ... (ke každému predikátu přísluší jednoznačně nenulové přirozené číslo, jeho četnost)
logické spojky $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$, $\neg$ *)
kvantifikátory $\forall$, $\exists$

Konstanty odpovídají vlastním jménům, proměnné obecným jménům, predikáty slovesům, přitom četnost odpovídá údaji, kolik „podmětů" a „předmětů" predikát vyžaduje, logické spojky se nazývají po řadě et (a), vel (nebo), implikace (jestliže-pak), ekvivalence (právě tehdy, když), negace (ne, zápor). Kvantifikátory se nazývají obecný neboli velký (odpovídá číslovce „každý") a existenční neboli malý („aspoň jeden").

Formule se sestavují z uvedených symbolů podle následujících pravidel: (1) Je-li P n-ární (tj. unární, binární, ...) predikát a jsou-li $a_1, \ldots, a_n$ konstanty (jedna, dvě, ...), je $P(a_1, \ldots, a_n)$ formule.

(2) Je-li Φ formule a Ψ formule, jsou

$$(\Phi \,\&\, \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \rightarrow \Psi), (\Phi \equiv \Psi), \neg \Phi$$

formule.

(3) Je-li x proměnná a Φ formule, ve které se vyskytuje konstanta a, pak následujícím způsobem vznikne z Φ formule: místo všech výskytů konstanty a ve Φ napíšeme x a před takto vzniklou posloupnost napíšeme buďto $(\forall x)$, nebo $(\exists x)$.

Definice: *Formule* je každá posloupnost, která vznikne konečným počtem aplikací pravidel (1), (2), (3).

Tak např. jsou-li $\check{C}$, L, J konstanty, x, y proměnné, R binární predikát, je posloupnost $\neg(\exists x)\, R(x, x)$ formule, neboť (např.) $R(L, L)$ je formule (podle (1)), $(\exists x)\, R(x, x)$ je formule (podle (3)), $\neg(\exists x)\, R(x, x)$ je formule (podle (2)). Také posloupnost

*) V článku [5] se užívá poněkud odlišná symbolika. Bude dobře, obeznámí-li se čtenář s oběma nejčastěji užívanými symbolikami.

$(\forall x)(\exists y) R(x, y)$ je formule, neboť $R(L, J)$ je formule (podle (1)), $(\exists y) R(L, y)$ je formule (podle (3)), $(\forall x)(\exists y) R(x, y)$ je formule (podle (3)).

Řeknu-li teď, že $Č$ znamená Čang, L Li, J Jang, proměnné znamenají „jeden ze tří Číňanů sedících kolem stolu", řekněme tedy „besedník" a predikát R znamená „... sedí napravo od...", nebude těžké „přečíst" formuli $\neg(\exists x) R(x, x)$ jako „neexistuje besedník, který sedí napravo od téhož besedníka" (tj. napravo od sama sebe) a formuli $(\forall x)(\exists y) R(x, y)$ jako „pro každého besedníka existuje (jiný) besedník, který sedí napravo od něho".

Je jasné, že definice formule je syntaktická. (Obyčejně se formule predikátového počtu nedefinují přesně tak, jak jsme to udělali, ale pro naše účely je to vhodné a tato definice by byla naprosto možná.) Podobně lze udat syntaktická pravidla určující, které formule (tj. formule kterého tvaru) jsou logické axiómy (triviální výroky). Nebudeme tato pravidla formulovat. Např. jedno takové pravidlo je: Jestliže $\Phi(a)$ je nějaká formule obsahující konstantu a a jestliže $(\exists x)\,\Phi(x)$ je formule, která vznikne z $\Phi(a)$ aplikací pravidla (3), pak formule $\Phi(a) \rightarrow (\exists x)\,\Phi(x)$ je axióm.

Dále lze udat syntaktická pravidla určující, kdy formule bezprostředně vyplývá z jiných. Např. jedno takové pravidlo (zvané modus ponens) říká:

Z formule Φ a z formule $\Phi \rightarrow \Psi$ bezprostředně vyplývá Ψ.

Logický důkaz se syntakticky definuje jako konečná posloupnost formulí, z nichž každá je buďto logický axióm, nebo bezprostředně vyplývá z předchozích. (Můžeme si představovat, že někdo předčítá takový důkaz: každá formule je jedna věta, přechod od jedné formule k následující je logický krok — elementární úsudek.) Poslední formule v důkazu je výsledek důkazu. Formule je dokazatelná, existuje-li důkaz, jehož je výsledkem.

Zadat axiomatickou teorii značí zadat konečný počet formulí, které nejsou logickými axiómy. Těmto formulím říkáme axiómy axiomatické teorie. Predikáty a konstanty, které se vyskytují v axiómech, se nazývají *základní predikáty* a *základní konstanty* teorie. Důkazem v axiomatické teorii je libovolná posloupnost formulí, ve které každá formule je buďto logický axióm, nebo axióm teorie, nebo bezprostředně vyplývá z předchozích.

Jako příklad formalizujeme teorii tří besedníků. Pracujeme s třemi konstantami $Č$, L, J a dvěma binárními predikáty R (můžeme číst „... sedí vpravo od..."), $=$ (místo $=(x, y)$ píšeme $x = y$, jako je zvykem; čteme „x je tentýž, kdo je y"). Napíšeme axiómy.

(A1) $$(\forall x)(x = Č \vee x = L \vee x = J)$$

(Každý besedník je buďto totožný s Čangem, nebo s Liem, nebo s Jangem, tj. jsou právě tři besedníci.)

(A2) $$\neg(\exists x) R(x, x)$$

(A3) $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R(x, y) \,\&\, R(x, z)) \rightarrow y = z)$$

(Pro každého besedníka x, besedníka y a besedníka z, jestliže x sedí vpravo od y

a zároveň vpravo od z, pak je y totožný se z, tj. každý má nejvýše jednoho levého souseda.)

(A4) $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R(y, x) \& R(z, x))\, y \rightarrow = z)$$

(Každý má nejvýše jednoho pravého souseda.)

(A5) $$(\forall x)(\exists y)\, R(x, y)$$

(A6) $$R(\check{C}, L)$$

(Čang sedí vpravo od Lia.)

Řekneme-li, že R *znamená* „... sedí vpravo od...", $=$ *znamená* „... je totožný s...", $\check{C}$ *znamená* „Čang", L „Li" a J „Jang", udali jsme tím interpretaci (význam) naší axiomatické teorie. Tato interpretace nám napovídala formulaci axiómů; jakmile jsou však axiómy napsány a studujeme teorii syntakticky, musíme na tuto interpretaci zapomenout a pracovat s formulemi jen jako s posloupnostmi symbolů. Můžeme např. tvrdit, že formule $(\exists y)\, R(\check{C}, y)$ je dokazatelná. Neboť následující (tříčlenná) posloupnost formulí je důkaz:

$R(\check{C}, L)$ (to je axióm A6),
$R(\check{C}, L) \rightarrow (\exists y)\, R(\check{C}, y)$ (to je logický axióm, speciální případ axiómu uvedeného výše jako příklad),
$(\exists y)\, R(\check{C}, y)$ (vyplývá z předchozích formulí podle pravidla modus ponens).

Dokázali jsme tedy formuli, která v uvedené interpretaci znamená „Existuje besedník sedící vlevo od Čanga". (Přesně: „Existuje besedník, od něhož vpravo sedí Čang".)

Naše teorie je pozoruhodná ještě tím, že je bezesporná, tj. ať je Φ libovolná formule, nikdy není v naší teorii současně dokazatelné Φ i $\neg\Phi$ (nestane se, že by bylo dokazatelné nějaké tvrzení a zároveň byla dokazatelná jeho negace), a úplná, tj. pro libovolnou formuli Φ (rozumí se: vytvořenou pouze ze základních predikátů a konstant teorie pomocí proměnných a logických značek) je buďto dokazatelné Φ, nebo je dokazatelné $\neg\Phi$. Na základě vlastností formálního pojmu důkazu lze pojem bezespornosti teorie charakterizovat ještě jinak: teorie je sporná právě tehdy, když existuje taková formule Φ, že formule $(\Phi \& \neg\Phi)$ je dokazatelná.

Tvrzení o bezespornosti a úplnosti naší teorie tří Číňanů lze demonstrovat syntakticky našimi finitními prostředky. (Říkám demonstrovat (srv. [6]), neboť slovo důkaz, dokázat si ponechávám pro formální důkazy v logistických systémech.) Bohužel však umíme o této teorii dokázat taková silná tvrzení jen proto, že je (jak říká Hao Wang) velmi elementární. Složitější teorie jsou většinou neúplné (tj. existují formule, které jsou nedokazatelné, přičemž i jejich negace jsou nedokazatelné) a jejich bezespornost neumíme dokázat, i když v ni věříme, neboť přestože jsou intenzívně rozvíjeny, nebyl v nich spor nalezen (to se týká např. teorie množin nebo aritmetiky).

Otázky, zda daná teorie je bezesporná nebo úplná jsou typické problémy, které patří do druhé části programu matematické logiky – studia (už zformalizovaných) axiomatických teorií – a přitom jsou to problémy (jak jsme viděli) svou povahou syntaktické, tj. problémy, zda formule jistého tvaru jsou dokazatelné. Omezení na finitní (efektivní) prostředky při demonstracích tvrzení o axiomatických teoriích má zde – kromě snahy po maximální jistotě správnosti – ještě jeden důvod, který záleží v tom, z jakých aspektů a za jakým účelem konstruujeme a studujeme logistické systémy. Matematický logik nerozvíjí především matematiku jako konkrétní vědní obor, ale matematika (tj. axiomatické matematické teorie) se stává předmětem jeho studia jakožto lidmi tvořený vyvíjející se fenomén, jakožto souhrn prací, které byly a v budoucnu budou napsány (mohou či nemohou být napsány); matematický logik studuje tedy počínání matematiků a jeho možnosti. Tak se předmětem logikova studia stává vlastně – řečeno s Heytingem ([4]) – jedna z nejzákladnějších schopností lidského rozumu. Omezení na finitní prostředky zaručuje, že např. demonstrace metamatematického tvrzení „jestliže Φ je dokazatelné v teorii T_1, pak Ψ je dokazatelné v T_2“ vždy udává efektivní metodu, jak důkaz formule Φ v T_1 přepracovat na důkaz formule Ψ v teorii T_2. Tvrzení „existuje důkaz“ znamená tedy nejen, že předpoklad neexistence takového důkazu vede k jakémusi metamatematickému sporu, ale znamená „vím, jak napsat důkaz“, tedy „matematici mohou dokázat“.

Zde je nutno vyjasnit ještě jednu věc. Konstrukce logistických systémů je, jak jsme viděli, podobná např. pravidlům šachu. Rozvíjení axiomatické teorie vypadá jako hra, jejímž cílem je hledat nečekané důkazy a řešit podobné problémy, jako zda lze a jak lze dokázat danou formuli. Přitom matematický logik tvrdí, že studuje možnosti matematiků; jaký je vztah konkrétních matematických prací a důkazů v nich obsažených k posloupnostem formulí v logistickém systému? Na to jsem už vlastně odpověděl výše: Každodenní zkušenost přesvědčuje, že všechny axiomatické teorie klasické matematiky lze formalizovat a že matematici uznají důkaz za exaktní přesně tehdy, když jej lze formalizovat (vyjádřit jako formální důkaz). Řešení problémů naší hry s posloupnostmi není tedy cílem, ale prostředkem k studiu matematických teorií a jejich možností, tedy s Riegrem řečeno, k studiu zákonitostí vztahu důsledku.

Připomněli jsme otázky bezespornosti a úplnosti axiomatických teorií jako typické otázky formulovatelné a někdy řešitelné syntakticky. Uvedeme ještě podobné otázky. Řekli jsme, že demonstraci bezespornosti řady teorií (a to právě důležitých a zajímavých) „z ničeho“ neumíme podat a dokonce, jsou-li tyto teorie skutečně bezesporné, pak demonstrace jistého druhu (kromě kterých si jiné těžko dovedeme představit) prostě neexistují. (Tento fakt lze syntakticky demonstrovat, viz [6]). Také jsme však řekli, že v bezespornost některých teorií, např. dosti slabé teorie množin, prostě věříme. Naskýtá se tedy otázka: Je-li jistá „spolehlivá“ teorie bezesporná, je také jakási jiná „podezřelá“ teorie bezesporná? To je otázka tzv. *relativní bezespornosti* a lze ji v mnoha případech řešit syntakticky. Popíšeme jistou obecnou metodu důkazu relativní bezespornosti, tzv. metodu syntaktických modelů. Dříve však uvedeme ještě dva typy problémů, které lze převést na problém relativní bezespornosti. Předně speciálně můžeme za „podezřelou“ teorii vzít onu „spolehlivou“, k jejímž axiómům přidáme nějaký „podezřelý“ axióm. (V případě teorie množin jako spolehlivé třeba axióm výběru.) Tedy: Je-li T bezesporná, zůstane bezespornou, když k axiómům přidám Φ? Tento problém se nazývá problém konzistence „podezřelého“ axiómu s teorií. Je-li axióm Φ konzistentní s teorií T, znamená to, že (pokud je T bezesporná) negace axiómu Φ, tj. formule $\neg\Phi$ není dokazatelná v T. (Kdyby byla, byla by dokazatelná i v teorii T obohacené o axióm Φ, neboť důkazy v slabší teorii jsou – podle definice důkazu – důkazy i v každé silnější teorii, tj. obohacená teorie by byla sporná.) Druhý problém je, zda za předpokladu bezespornosti teorie T jak Φ, tak $\neg\Phi$ je nedokazatelné v T, čili, jak říkáme, zda Φ je nezávislé na axiómech teorie T (axiómy neumožní rozhodnout, zda platí Φ, či $\neg\Phi$). Tento problém není nic jiného než problém, zda jak $\neg\Phi$, tak Φ je konzistentní s T, a tedy je to problém relativní bezspornosti.

Pro uvedenou skupinu problémů je metoda syntaktických modelů patrně jedinou nadějnou metodou řešení. Mezi syntakticky formulované a syntakticky (často) řešitelné problémy patří ještě jiná důležitá skupina problémů, o které však nebudu podrobně referovat. Jsou to otázky efektivnosti, tj. otázky, zda k dané teorii existuje předpis (algoritmus), který umožňuje (pro všechny formule nebo pro formule určitého tvaru) rozhodnout, zda je daná formule dokazatelná, a je-li, napsat její důkaz. Čtenář se nebude divit, dozví-li se, že většina zajímavých teorií je nerozhodnutelná, tj. takový algoritmus neexistuje (viz [9]).

Nyní vyložíme pojem syntaktického modelu. Nejprve příklad: Teorie grup má dva výchozí predikáty: G (unární, „... je prvkem grupy“) a (ternární, „... je součinem ... a ...“). Předpokládejme, že máme nějakou axiomatiku reálných čísel. Prohlásíme-li za prvky grupy v novém smyslu kladná reálná čísla a za grupové násobení v novém smyslu násobení reálných čísel, jsou splněny (tj. z axiómů reálných čísel dokazatelné) axiómy teorie grup. Kdybychom uměli dokázat spor v teorii grup, mohli bychom hned dokázat spor v teorii reálných čísel tak, že bychom v důkazu sporu v teorii grup slova „prvek grupy“ nahradili slovy „kladné reálné číslo“ a slova „prvek... je součinem (grupovým) prvků ... a ...“ nahradili slovy „číslo... je součinem (ve smyslu násobení reálných čísel) čísel ... a ...“. Přitom – upozorněme na časté nedorozumění – jsme nepřiřadili prvkům abstraktní grupy reálná čísla (takové „přiřazení“ nemá ani dobrý smysl), ale přiřadili jsme pojmům teorie grup jisté pojmy teorie reálných čísel. Na základě tohoto přiřazení umíme důkazům v teorii grup přiřazovat důkazy v teorii reálných čísel, a to tak, že důkaz sporu přejde v důkaz sporu.

Přistupme k přesné definici.

Definice: *Syntaktický model teorie T_1 v teorii T_2* je předpis (syntaktický, efektivní), jak formulím teorie T_1 přiřazovat jisté formule teorie T_2, a to tak, že

1. libovolné formuli $(\Phi \mathbin{\&} \neg\Phi)$ teorie T_1 je přiřazena formule $(\Phi \mathbin{\&} \neg\Phi)^*$ teorie T_2, ze které v T_2 vyplývá spor (to je splněno např. tehdy, když $(\Phi \mathbin{\&} \neg\Phi)$ přejde v $((\Phi^*) \mathbin{\&} \neg(\Phi^*))$, což je sporná formule v T_2).

2. je-li posloupnost formulí $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ důkazem v T_1, je posloupnost přiřa-

zených formulí $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \ldots, \Phi_n^*$ (popřípadě doplněná podle předem daného návodu o další formule) důkazem v T_2.

Tvrzení: Existuje-li model teorie T_1 v teorii T_2 a je-li teorie T_2 bezesporná, je i T_1 bezesporná.

Demonstrace: Chceme ukázat, že nemůže existovat důkaz sporné formule v T_1. Skutečně, kdyby byla posloupnost $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}, (\Phi \mathbin{\&} \neg \Phi)$ důkazem sporné formule v T_1, šlo by doplnit posloupnost $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \ldots, \Phi_{n-1}^*, (\Phi \mathbin{\&} \neg \Phi)^*$ na posloupnost, která je důkazem v T_2, tedy formule $(\Phi \mathbin{\&} \neg \Phi)^*$ by byla dokazatelná v T_2. Z $(\Phi \mathbin{\&} \neg \Phi)^*$ umíme však podle předpokladu 1. dokázat v T_2 spor. Kdyby tedy $(\Phi \mathbin{\&} \neg \Phi)$ byla dokazatelná v T_1, byla by T_2 sporná. Je-li T_2 bezesporná, je i T_1 bezesporná, quod erat demonstrandum.

V dalším se omezíme na teorie, v jejichž axiómech se nevyskytují žádné konstanty (tj. které nemají žádné základní konstanty; srv. např. axiómy (A1) –(A5) z teorie tří Číňanů). V takovém případě hrají konstanty jen pomocnou úlohu (a mohou být zcela eliminovány). Podotkněme, že vůbec každou axiomatickou teorii lze modifikovat tak, že její axiómy neobsahují konstanty a přitom je modifikovaná teorie v jistém smyslu táž jako nemodifikovaná.

Jak vysvítá z příkladu s teorií grup, lze efektivní předpis, o kterém je řeč v definici modelu, udat (pro teorie, na které jsme se omezili) tak, že definujeme základní predikáty teorie T_1 nějakým způsobem v teorii T_2, pak z každé formule teorie T_1 vznikne formule teorie T_2 tak, že místo predikátů teorie T_1 píšeme jejich definice z T_2. To je zřejmě čistě syntaktická záležitost, taková definice predikátu je prostě jistá formule teorie T_2; od konkrétního výkladu však upouštím, protože by pro čtenáře informativního článku nebyl přehledný. Aby byly splněny podmínky 1. a 2. z definice modelu, stačí, když jsou predikáty teorie T_1 definovány v T_2 tak, že axiómy teorie T_1 přecházejí v dokazatelné formule teorie T_2 (při přiřazení, které bylo právě popsáno). (Jednu doplňující podmínku zde čtenáři zamlčuji.)

Shrňme dosavadní poznatky: Zavedli jsme syntaktický pojem formule, axiomatické teorie, jejích axiómů a jejích základních predikátů. Zavedli jsme pojem bezesporné teorie. Konečně jsme zavedli syntaktický pojem (syntaktického) modelu jedné teorie v druhé. Víme, že k zadání modelu stačí zadat (formální) definice základních predikátů jedné teorie v druhé. Víme dále, že je-li dán model teorie T_1 v T_2, je tím dána efektivní metoda, jak z důkazu sporu v teorii T_1 udělat důkaz sporu v T_2. Je tedy zadáním modelu demonstrována relativní bezespornost teorie modelované vůči teorii, v níž se modeluje.

V další části aplikujeme tyto poznatky na metamatematické studium axiomatické teorie množin.

Literatura

[1] Carnap, R.: *Symbolische Logik.* Wien 1954.

[2] Church, A.: *Introduction to matematical logic I.* Princeton 1956.
ruský překlad: Čerč: *Vvěděnije v matematičeskuju logiku I,* Moskva 1960.

[3] GRZEGORCZYK, A.: *Zarys logiki matematycznej*. Warszawa 1961.
[4] HEYTING, A.: *Intuitionism. An introduction*. Amsterdam 1956.
ruský překlad: Gejting: *Intuicionism. Vvěděnije*. Moskva 1965.
[5] HOŘEJŠ, J.: Pokroky MFA *10* (1965), str. 325.
[6] KLEENE, S. C.: *Introduction to metamatematics*. New York 1952.
ruský překlad: Klíni: *Vvěděnije v metamatematiku*. Moskva 1957.
[7] KOŘÍNEK, V.: *Teorie množin, její vznik a vývoj*. Pokroky MFA *10* (1965), str. 131—160.
[8] RIEGER, L.: *O některých základních otázkách matematické logiky*. Čas. pěst. mat. *81* (1956), str. 342.
[9] TARSKI, A., MOSTOWSKI, A., ROBINSON, R. M.: *Undecidable theories*. Amsterdam 1953.
[10] WANG, HAO: *A survey of mathematical logic*. Peking 1962.

Klidná hladina tekutiny není dokonale rovná,

nýbrž je zakřivena podle tvaru geoidu. Kdyby se srovnávala s dokonale rovnou plochou optickým způsobem, projevilo by se to jedním interferenčním proužkem asi na 12 metrů. V americkém úřadu měr a vah (NBS) se podařilo zhotovit plochu asi dvakrát rovinnější.

Sk

Nejen výzkum vesmíru

by měl zajímat velké americké elektronické koncerny. Vojenské zakázky v tomto oboru, ztracené následkem úsporných opatření Pentagonu, je možno nahradit prací na řešení pozemštějších problémů, jako jsou např. řízení městské dopravy, zvýšení úrovně vyučování při nedostatku učitelů, zjednodušení administrativy na všech stupních řízení, zdokonalení preventivní zdravotní péče, náhrada lidských orgánů umělými. Úkolů je dost, i peníze na jejich řešení jsou prý k dispozici, jen společností, které by se na ně chtěly přeorientovat, je stále málo. Prohlásil to v červnu 1965 D. Rockefeller, president velké newyorské banky.

Sk

Jódová žárovka netrpí rozprašováním vlákna

Malé množství jódu se přidává k obvyklé náplni z netečného plynu. Na stěnách baňky se slučuje jód s vypařeným wolframem na plynný jodid, který cirkuluje v baňce a na rozžhaveném vlákně při teplotě nad 1500°C se opět rozkládá a uvolněný wolfram usazuje zpět na vlákně. Proto si vlákno žárovky uchovává po celý život svou svítivost a baňka svou čirost. To má význam např. u projekčních přístrojů. Kromě toho se prodlužuje i život žárovky asi na dvojnásobek. Podmínkou správné činnosti chemického procesu je poměrně vysoká teplota baňky — nad 250°C. Konstruktéři tomuto požadavku rádi vyhovují zmenšením rozměrů baňky a vyloučením chladicích otvorů v lampové skříni. Jódová žárovka pro 24 V, 150 W má průměr 12,5 mm a délku 50 mm. Žárovka pro 220 V, 2 kW má průměr 12 mm, délku 333 mm, životnost 2000 hod. a účinnost 20 lm/W.

Sk

Použité samočinné počítače

se hodně prodávají v Anglii a USA; cena přístroje, který byl 2—3 roky v používání, se rovná 15—20 % pořizovací ceny.

Sk