J. Niederle; Jiří Tolar

O šestém Hilberově problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 3, 135--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138040

O ŠESTÉM HILBERTOVĚ PROBLÉMU

J. NIEDERLE a J. TOLAR, Praha

Šestý Hilbertův problém se značně odlišuje od ostatních. Týká se totiž fyziky a není formulován ani jako konkrétní nebo méně konkrétní otázka (tj. jako např. 3. nebo 4. Hilbertův problém), ale spíše jako výzva. Výzva, abychom podobně jako geometrii „axiomaticky budovali i ty fyzikální disciplíny, ve kterých hraje matematika význačnou roli" ([1]).

Hilbert doporučuje nejdříve vycházet z menšího počtu axiómů, popsat jimi co největší počet fyzikálních jevů a pak přidáváním dalších axiómů dostávat podrobnější teorie. Při tomto procesu zdůrazňuje hlavně tři věci. Především nutnost klasifikovat všechny teorie, které logicky vyplývají z axiómů bez ohledu na to, zda jsou reálné či ne. Jen takto můžeme zjistit plný dosah a obsah jednotlivých axiómů. Za druhé nabádá nalézt exaktní důkaz, že žádný přidaný axióm není ve sporu s předchozími. Takové důkazy (a nikoliv jisté intuice apod.) ukazují bezespornost teorie a jsou zdrojem nejpřesnějších formulací axiómů. Konečně Hilbert doporučuje zkoumat otázku, zda a jak jsou ekvivalentní různé systémy axiómů nebo různé formulace téhož axiómu. Při budování axiomatiky však nemáme nikdy zapomenout na náš konečný cíl – vytvořit správný pohled na samotnou podstatu příslušného fyzikálního oboru.

Hilbert přednesl své problémy v roce 1900 a tak nás nepřekvapí, že při formulaci 6. problému se zmiňuje i o fyzikálních disciplínách, které by dnes asi nepokládal za správné příklady. Kromě axiomatizace mechaniky mluví totiž o axiomatizaci teorie pravděpodobnosti. Teorie pravděpodobnosti se však dnes pokládá za metodu studia nahodilých jevů, a to bez ohledu na to, zda jde o jev povahy fyzikální, chemické, ekonomické, biologické, jazykovědné či jiné. Teorie pravděpodobnosti se proto dnes nepokládá za fyzikální disciplínu ani jinou vědu (neboť věda je vždy určena materiálním objektem, který studuje), nýbrž za čistě matematickou disciplínu.

Dnes existuje celá řada fyzikálních oborů, které axiomatizovali nebo se pokoušeli axiomatizovat vynikající vědci ([2]). My budeme demonstrovat takové snahy na kvantové teorii pole (KTP), i když jeden z jejích zakladatelů, JOST ([3]), se domníval, že axiomatizace této teorie nesouvisí s šestým Hilbertovým problémem. V šestém Hilbertově problému prý axiomatizace měla dovršit plně vybudovanou teorii, dodat jí poslední lesk, a KTP je zatím nevybudovaná, neexistuje a ani možná existovat nebude. Důvodů k našemu rozhodnutí kromě osobní záliby máme několik. Především Hilbert sám o tom, že by fyzikální disciplína, kterou axiomatizujeme, měla být uzavřená, nemluví. Z historie teoretické fyziky víme, že axiomatický přístup od dob Newtona nesloužil pouze k utřídění a uhlazení známých výsledků, ale též k získání nových. Bogoljubov, Logunov a Todorov ([4]) pokládají Jostův názor za nesprávný dokonce i pro čistou matematiku. V současných oborech matematiky (takových, jako je např. funkcionální analýza) axiomatika je totiž základní metodou, pomocí které tyto obory budujeme. Konečně doufáme, že čtenář sám z dalšího uvidí, že mladá fyzikální disciplína – axiomatická kvantová teorie pole (AKTP) si klade za cíl odpovědět právě na ty otázky, k jejichž řešení Hilbert vyzýval ve svém šestém problému.

KVANTOVÁ TEORIE POLE A JEJÍ AXIOMATIKY

Hlavním středem zájmu poválečného základního fyzikálního výzkumu jsou elementární částice. Nejosvědčenějším jazykem pro jejich popis je stále relativistická teorie kvantových polí, často nazývaná pouze kvantovou teorií pole. Jak už z názvu vyplývá, je sjednocením kvantové teorie se speciální teorií relativity. KTP může na rozdíl od nerelativistické kvantové mechaniky, ze které vznikla jako logicky a fyzikálně nutné zobecnění, popsat systémy s nekonečným počtem stupňů volnosti, vznik a zánik částic, částice pohybující se relativistickými rychlostmi apod.

KTP vychází ze tří základních věcí: Lagrangeova (nebo Hamiltonova) formalismu, koncepce adiabatického zapojení a vypojení interakce a poruchové teorie jakožto výpočtové metody. Je to teorie robustní, která od samého svého počátku zápolí se svými principiálními nedostatky. KTP dává totiž pouze návod, jak konstruovat spíše formální řešení polních rovnic ve tvaru mocninné poruchové řady než skutečné řešení rovnic, a to jen pro některé fyzikální případy. Pro tzv. nerenormalizovatelné teorie*) nebo případy, které nelze řešit poruchovou metodou**) KTP neposkytuje ani (jednoznačný) recept, jak se zbavit nekonečných výrazů vyskytujících se v teorii.

Radikální návrh, jak se vypořádat s touto neutěšenou situací, předložil v r. 1943 Heisenberg ([5]). Vyloučil ze hry lokální veličiny (tj. např. pole), adiabatické zapínání interakcí a začal budovat teorii výlučně z fyzikálně pozorovatelných veličin. Takovými veličinami jsou maticové elementy matice srážek částic (S-matice). Kvadráty jejich norem dávají pravděpodobnost výskytu určitého typu srážek částic (účinné průřezy apod.). Maticové elementy přitom měly splňovat relativistickou invariantnost a unitaritu. Heisenbergova teorie nebyla uspokojivým řešením. Radikální vyloučení lokálních veličin znemožnilo studovat vývoj fyzikálního systému v prostoročase a využít principu kauzality. Relativistická invariantnost a unitarita nebyla rovněž dostatečná k určení dynamických vlastností maticových elementů.

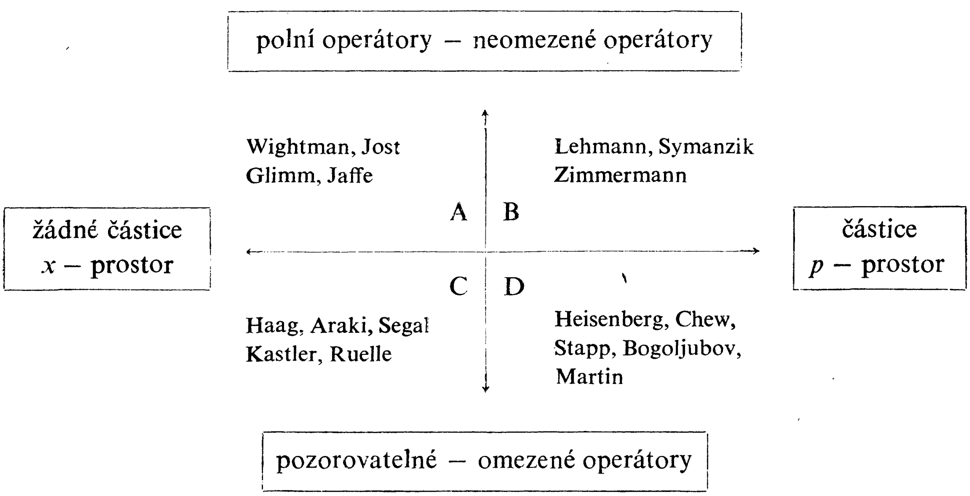
*) Např. slabé interakce, interakce vektorových mezonů apod.

**) Pro silně interagující částice by parametrem mocninné řady byla vazbová konstanta g, která je větší než 1. Mocninná řada v této konstantě nekonverguje. Poznamenejme, že konvergence mocninné řady nebyla dokázána ani pro případy, kdy parametrem je veličina menší než 1 (jako např. v elektrodynamice).

V padesátých letech se KTP a hlavně její část, kvantová elektrodynamika, dostala do paradoxní situace. Na jedné straně slavila triumfy a na druhé straně se stále nevypořádala s principiálními nedostatky. Úspěchy teorie plynuly z překvapivé shody jejích předpovědí s některými experimentálními měřeními a chronické nemoci z některých jejích špatně matematicky definovaných (nekonečných) výrazů i pojmů. Vznikla tak potřeba jasně*) formulovat požadavky, které by měla splňovat „zdravá" KTP. Otázky typu „co předpovídá KTP pro ten a ten proces?" vystřídaly otázky týkající se samé podstaty teorie, tj. otázky „co je to pole?", „co je to kvantová teorie pole?" apod. Nespecifikovaly se detailně pohybové rovnice, ale formulovaly se různé požadavky na teorii, takže se začal budovat spíše pracovní rámec platný pro celou třídu teorií než jedna teorie.

První matematicky přesná formulace takových požadavků pochází od WIGHTMANA ([6]) z r. 1955, který je nazval axiómy**). Název se rychle ujal a tak KTP konstruovanou tímto způsobem nazýváme axiomatickou***). Byl to též Wightman, který vytyčil cíle AKTP: hledat obsah a plný dosah axiómů, dokázat jejich bezespornost, klasifikovat teorie, které axiómům vyhovují, srovnávat různé formulace axiómů a odvozovat fyzikální předpovědi.

Dnes můžeme v literatuře nalézt zhruba čtyři směry axiomatiky KTP. Podle Josta ([7]) můžeme tyto směry rozdělit na základě dvojakých alternativ výchozích pojmů, které jednotlivé směry používají podle tohoto schématu:



*) Tj. bez poruchového rozvoje a bez matematicky nedefinovatelných výrazů.

**) Axiom (a), řecky zásada, samozřejmé pravidlo.

***) Pro úplnost dodejme, že kromě axiomatického přístupu ke KTP se objevil i druhý přístup tzv. fenomenologický, který se snaží o utřídění nesmírného množství experimentálních dat. Tento přístup (např. Reggeův model, periferální model) se nezabývá obecnými vlastnostmi a tak extrapolace dílčích výsledků do jiných oblastí, než kde byly odvozeny, je vždy spojena s nebezpečím kontradikcí.

Tak máme dvě teorie (A, B), ve kterých je základním pojmem polní operátor a dvě (C, D), které vycházejí z lokálních pozorovatelných*). Na druhé straně podle toho, zda se v teorii používá pojmu částice a prostoru impulsů či nikoliv, můžeme teorie zase rozdělit do dvojic (A, C) a (B, D).

AXIÓMY KVANTOVÉ TEORIE POLE

Přesto, že máme celou paletu axiomatik KTP, počet axiómů se v jednotlivých přístupech příliš neliší. Hlavní axiómy můžeme charakterizovat asi takto:

I. Splnění obecných principů kvantové fyziky
II. Relativistická invariantnost
III. Lokalita
IV. Spektrálnost a stabilita vakua
V. Úplnost

Pod těmito názvy se v jednotlivých axiomatických přístupech skrývají různé formulace, neboť, jak jsme viděli, různé přístupy vycházejí z různých primárních pojmů. Naznačme si bez použití příliš technických termínů, v čem se liší formulace axiómů v teoriích (A, B) od teorií (C, D).

Axióm I v teorii A, B

Výchozím pojmem je (komplexní, separabilní) Hilbertův prostor $\mathscr{H}$. Axióm I. pak znamená:

– stavy fyzikálního systému jsou vektory Hilbertova prostoru $\mathscr{H}$**)
– pozorovatelné jsou (samosdružené) operátory v $\mathscr{H}$
– pravděpodobnosti fyzikálních přechodů systému ze stavu φ do stavu ψ jsou dány podle pravidel kvantové mechaniky jako $|(\varphi, \psi)|^2$, tj. kvadrát modulu skalárního součinu příslušných vektorů ([8])
– platí princip superpozice (lineární kombinace dvou fyzikálně realizovatelných stavů, tj. dvou vektorů, je opět fyzikálně realizovatelný stav, tj. vektor v $\mathscr{H}$***)).

*) Polní operátor (nebo jeho polynom), i když bude symetrickým operátorem (fyzikové obvykle říkají „hermitovským“) ve své definiční oblasti nemůže být a priori považován za pozorovatelnou. Polní operátor je totiž neomezený. Jako neomezený operátor může být pozorovatelnou pouze tehdy, když je samosdružený, neboť pak může být vyjádřen pomocí množiny omezených operátorů. Polní operátory nejsou však ani uzavřené, takže pro ně nemusí existovat rozšíření na samosdružené operátory.

**) Přesněji řečeno, fyzikálnímu stavu odpovídá nikoliv jeden (normalizovaný) vektor ψ v $\mathscr{H}$, ale celý komplexní paprsek, tj. vektory $e^{ia}\psi$, kde a je reálné číslo [8].

***) Připomeňme, že princip superpozice platí pouze pro vektory a nikoli pro paprsky v $\mathscr{H}$. Wick, Wightman a Wigner [9] ukázali, že princip superpozice platí jen pro ty vektory, které jsou charakterizovány stejnými vlastními hodnotami operátorů elektrického náboje, baryonového čísla, počtu fermionů a leptonových čísel. Tak např. kombinaci dvou vektorů, které jsou charakterizovány různou hodnotou elektrického náboje, neodpovídá žádný fyzikální stav.

Axióm I v teorii C, D

Výchozím pojmem je algebra generovaná pozorovatelnými uvažovaná jako abstraktní algebra $\mathfrak{A}$*).

Axióm I znamená:

- pozorovatelné jsou elementy algebry $\mathfrak{A}$,
- stav fyzikálního systému je definován jako funkcionál pozorovatelné,**)
- pravděpodobnost je dána statistickou interpretací funkcionálu pozorovatelné (hodnota funkcionálu pro danou pozorovatelnou se chápe jako normovaná střední hodnota pozorovatelné v daném stavu),
- princip superpozice je vyjádřen linearitou funkcionálu pozorovatelné.

Poznámka: Jestliže máme stav zadaný pomocí (nerozložitelného) funkcionálu $\varrho(a)$, můžeme pomocí Gelfandovy-Najmarkovy-Segalovy konstrukce sestrojit Hilbertův prostor $\mathscr{H}$, který obsahuje vektor φ a je reprezentačním prostorem takové reprezentace T***) algebry $\mathfrak{A}$, že $\varrho(a)$ je střední hodnotou operátoru $T(a)$ ve stavu φ v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$, tj.

$$\varrho(a) = (\varphi, T(a)\,\varphi)\,.$$

Vidíme tedy, že přístupy A, B představují vlastně jednu realizaci přístupů C, D (souvisí s jednou reprezentací algebry $\mathfrak{A}$ v $\mathscr{H}$). Zda další reprezentace algebry $\mathfrak{A}$ dávají nové fyzikální teorie a zda tedy fyzikální obsah spočívá v reprezentaci algebry nebo v samotné struktuře algebry, budeme diskutovat později.

Axióm II v teorii A, B

Fyzikální stav se určuje řadou měření v určitém systému souřadnic, a proto obecně závisí na výběru tohoto systému. Podle speciální teorie relativity fyzikálně ekvivalentní systémy jsou inerciální systémy a ty spolu souvisí Poincaréovými transformacemi†). Základním Wignerovým postřehem bylo, že také relativistická kvantová teorie je invariantní vůči 10parametrické grupě Poincaréových transformací ([10]).

---

*) Předpoklad, že pozorovatelné tvoří algebru, znamená, že pozorovatelné mohou být sčítány, násobeny mezi sebou i násobeny komplexním číslem a že tyto algebraické úkony splňují jisté zákony.

**) Funkcionál ϱ pozorovatelné a je zobrazení, které každé pozorovatelné a z $\mathfrak{A}$ přiřazuje reálné číslo $\varrho(a)$: $a \to \varrho(a) = \langle a \rangle$ a splňuje:
linearitu: $\varrho(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \lambda_1\, \varrho(a_1) + \lambda_2\, \varrho(a_2)$, λ_1, λ_2 komplexní čísla ,
pozitivitu: když $a \geqq 0$, pak $\varrho(a) \geqq 0$,
normalizaci: $\varrho(1) = 1$.

***) Reprezentace algebry je (mnoho-jednoznačné, lineární, multiplikativní) zobrazení prvků algebry do množiny lineárních omezených operátorů na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$.

†) Tedy transformacemi Lorentzovými a translacemi v prostoročase.

Přitom invariance teorie vzhledem k této grupě znamená, že ke každému fyzikálnímu přístroji v daném inerciálním systému existuje 10parametrická soustava „ekvivalentních“ přístrojů, totiž přístrojů postavených podle téhož stavebního návodu, ale umístěných v různých inerciálních systémech, a že množiny přípustných stavů jsou pro pozorovatele v různých inerciálních systémech stejné. Dále uvažujeme takto: je-li ψ fyzikální stav připravený přístrojem P a je-li g transformace z Poincaréovy grupy, pak existuje též stav ψ_g, který je připraven „ekvivalentním“ přístrojem P_g (přístroj P „posunutý“ transformací g). Požadavek relativistické invariantnosti teorie pak znamená, že pravděpodobnost přechodu fyzikálního systému ze stavu φ do stavu ψ nezávisí na výběru inerciálního systému,

$$|(\varphi, \psi)|^2 = |(\varphi_g, \psi_g)|^2$$

pro libovolnou dvojici stavů a libovolnou transformaci g z Poincaréovy grupy. Wigner ukázal, že jediným způsobem*), jak vyhovět této podmínce, je mít ke každému g unitární operátor U_g v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ takový, že

$$\psi_g = U_g \psi\,, \quad U_g U_{g'} = U_{gg'}$$

neboli U_g je reprezentací Poincaréovy grupy.

AXIÓM II V TEORII C, D

Jestliže byla pomocí Geľfandovy-Najmarkovy-Segalovy konstrukce sestrojena reprezentace algebry $\mathfrak{A}$ pomocí operátorů v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$, pak se relativistická invariantnost vyjádří stejným způsobem jako v teorii A, B. Operátor $T(a)$ odpovídající v $\mathscr{H}$ pozorovatelné a se transformuje při Poincaréově transformaci g podle vztahu

$$T(a) \to T(a_g) = U_g\, T(a)\, U_g^{-1}\,.$$

Je-li však fyzikální systém popsán pomocí abstraktní algebry $\mathfrak{A}$, musí být relativistická invariantnost vyjádřena jinak. K tomu je vhodné dát algebře $\mathfrak{A}$ strukturu paralelní struktuře prostoročasu. Ke každé konečné oblasti O prostoročasu přiřadíme lokální algebru $\mathfrak{A}(O)$ generovanou všemi pozorovatelnými, které lze měřit přístroji, jejichž prostoročasové souřadnice leží v O. (Lokální algebry $\mathfrak{A}(O)$ jsou podalgebrami $\mathfrak{A}$ a jejich souhrn generuje $\mathfrak{A}$.) Při Poincaréově transformaci g nechť oblast O přejde na oblast O_g. Relativistická invariantnost je pak vlastnost algebry $\mathfrak{A}$, že při transformaci g všechny pozorovatelné $a \in \mathfrak{A}(O)$ přecházejí jedno-jednoznačným zobrazením

*) Operátor U_g je určen až na libovolný fázový faktor; jeho unitárnost znamená $(U_g\varphi, U_g\psi) = (\varphi, \psi)$. V případě diskrétních transformací (např. časové inverze) příslušný operátor T může být též antiunitární, $(T\varphi, T\psi) = (\varphi, \psi)^*$.

τ_g na pozorovatelné $a_g \in \mathfrak{A}(O_g)$,

$$\mathfrak{A}(O) \to \mathfrak{A}(O_g) = \tau_g \mathfrak{A}(O),$$

(tj. Poincaréova grupa je grupou automorfismů $\mathfrak{A}$).

Axióm III v teorii A, B

Princip lokality je nesjpecifičtějším předpokladem relativistické KTP. Je založen na relativistickém principu kauzality, podle něhož fyzikální jevy ve dvou oblastech O_1 a O_2 oddělených intervalem prostorového charakteru*) nemohou na sebe fyzikálně vzájemně působit. Proto též měření pozorovatelných v O_1 neovlivní měření pozorovatelných v O_2, což matematicky vyjadřujeme tím, že příslušné pozorovatelné spolu komutují.

V teorii A, B základními veličinami jsou pole, která nemusí být pozorovatelnými. Proto jsou-li pole pozorovatelnými (jako je tomu v případě např. nenabitých bosonů), lokalita požaduje jejich komutativnost

$$[\varphi(x_1), \varphi(x_2)] = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2) - \varphi(x_2)\,\varphi(x_1) = 0$$

pro interval mezi světobody x_1, x_2 prostorového charakteru, tj. $(x_1 - x_2)^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 < 0$. V případě polí, která jsou nepozorovatelnými (např. nabitá či spinorová pole) nejsme nuceni požadovat jejich komutativnost na intervalech prostorového charakteru. V případě spinorového pole se např. obvykle požaduje antikomutativnost, abychom dostali Fermiovu statistiku pro částice tohoto pole,

$$\{\psi(x_1), \psi(x_2)\} = \psi(x_1)\,\psi(x_2) + \psi(x_2)\,\psi(x_1) = 0$$

pro $(x_1 - x_2)^2 < 0$. V nedávné době se studovaly i složitější komutační relace, které odpovídají tzv. para-polím.

Axióm III v teorii C, D

Princip lokality můžeme vyjádřit takto: Jsou-li O_1 a O_2 dvě oblasti oddělené intervalem prostorového charakteru, pak příslušné podalgebry spolu komutují,

$$[\mathfrak{A}(O_1), \mathfrak{A}(O_2)] = 0\,.$$

---

*) To znamená, že žádný bod oblasti O_1 nemůže být spojen světelným signálem s libovolným bodem oblasti O_2. Tedy $(x_1 - x_2)^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 < 0$, kde $x_i = (t_i, \boldsymbol{r}_i) \in O_i$, $i = 1, 2$ a c je rychlost světla ve vakuu.

Axióm IV v teorii A, B

Stav jedné částice nebo soustavy částic lze charakterizovat vlastními hodnotami operátorů relativistické energie a impulsu $p = (E/c, \boldsymbol{p})$ (a dalších operátorů s nimi komutujících). Stav charakterizovaný $p = 0$ je invariantní vůči libovolným transformacím Poincaréovy grupy a předpokládá se, že odpovídá vakuu (prázdnému prostoru bez fyzikálních částic). Spektrální podmínka říká, že kromě jediného vakua se mohou fyzikálně realizovat jen ty stavové vektory, pro které $E > 0$ a $p^2 = E/c^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2$ s $m \geqq m_0 > 0$, kde m_0 je nejmenší z klidových hmot částic vyskytujících se v teorii. To znamená, že neexistují stavy s energií nižší, než má vakuum, vakuum je stabilní stav.

Axióm IV v teorii C, D

Stejnou formulaci lze dát axiómu spektrálnosti v teorii C, D, když v ní stavy charakterizujeme pomocí relativistické energie a impulsu.

Axióm V v teorii A, B

Tento axióm požaduje, aby pole uvažovaná v teorii A, B tvořila úplný systém operátorů v $\mathscr{H}$ v následujícím smyslu: působíme-li operátory pole postupně na vakuový vektor, obdržíme úplný systém lineárně nezávislých stavových vektorů v $\mathscr{H}$, tj. libovolný stavový vektor lze vyjádřit jako superpozici takto získaných vektorů. Pak ovšem je teorie úplná, neboť není třeba do ní přidávat další pole.

Tento axióm nemá protějšek v teorii C, D.

SPLNĚNÍ CÍLŮ AKTP

Současnou situaci, jak se axiomatici vypořádali s Wightmanovým programem AKPT, můžeme stručně popsat asi takto:

1. Hledání obsahu, dosahu a bezespornosti axiómů

Z I. a II. axiómu vyplývá, že pole nemůže být operátorovou funkcí, nýbrž zobecněnou funkcí – distribucí. Jakou zobecněnou funkcí by však pole mělo být, axiómy neurčují. Je však jisté, že výběr distribucí ovlivňuje možnosti změn definic lokality ([11]).

Původně se axiomatici domnívali, že axiómy AKTP jsou natolik obecné, že naleznou celé třídy teorií, které jim vyhovují. Dnes většina z nich zastává názor právě opačný. Po marných pokusech sestrojit alespoň jednu netriviální teorii (tj. s maticí S různou od 1), která by splňovala všechny axiómy AKTP, považují systém axiómů za příliš jemné síto. Poněvadž systém axiómů neobsahuje pohybové rovnice KTP, je zřejmé, že modely je velmi obtížné vůbec hledat. Na druhé straně, bez znalosti matematicky konzistentních modelů, které by vyhovovaly všem axiómům, nemůžeme asi poznat plný dosah jednotlivých axiómů. Někteří axiomatici proto začali budovat novou, tzv. konstruktivní AKTP.

Stoupenci tohoto směru vycházejí z konkrétních modelů v Lagrangeově formalismu a snaží se jejich studiem nalézt či spíše uhodnout obecně platné závěry. Pracují přitom metodou, kterou můžeme charakterizovat Boltzmannovým „elegance se hodí pro krejčí". Nicméně jejich snaha přinesla již jisté ovoce. Např. ve dvou a třírozměrných prostoročasech JAFFE a GLIMM ([12]) ukázali, že v Yukawově modelu*) a $\lambda\varphi^4$-modelu lokalita, relativistická invariance a požadavek kladné energie jsou konzistentní s netriviální S-maticí. Pokrok nastal i v ostatních přístupech AKTP. RUELLE ukázal, že každá lokální teorie pole (splňující spektrálnost) implikuje (jednoznačně) S-matici. Ve Wightmanově přístupu, který vychází z polních operátorů, vždy tedy existuje S-matice ([4]). Odpovědi na otázky, zda různé KTP mohou vést na tutéž S-matici a jak tuto S-matici konstruovat, můžeme nalézt ve fundamentálních pracích BORCHERSEOVÝCH ([13]). Ten ukázal, že lokální pole se dělí na třídy ekvivalentních lokálních polí (Borchersovy třídy) podle relativní lokality. Fyzikální význam těchto tříd vyplývá z dalších Borchersových výsledků: všechna pole ze stejné třídy ekvivalence vedou na stejnou S-matici. Abychom tedy mohli sestrojit netriviální S-matici, musíme vyjít za rámec jedné třídy ekvivalentních lokálních polí. Poněvadž systém axiómů se zdá být příliš omezující, vznikají i snahy oslabovat některé axiómy. První axióm si dovedeme představit různě pozměněný, ale protože dosavadní formulace tohoto axiómu je v plné shodě s naší zkušeností, jsou takové návrhy spíše akademické povahy. Nejvíce se uvažuje o možnosti změny třetího axiómu – lokality. (Mikro)lokalita tak, jak se běžně definuje, může být totiž špatnou extrapolací naší makrolokální zkušenosti. Faktem však zůstává, že teorii, která by byla makrolokální, ale nikoli mikrolokální, se nikomu nepodařilo sestrojit a že lokalita byla experimentálně prověřena až do 10^{-14} cm. Je také zřejmé, že opustění našich definic mikrolokality by znamenalo ztrátu řady (experimentálně ověřených) cenných předpovědí (existence antičástic, souvislost spinu se statistikou apod.).

2. Srovnání různých formulací AKTP

Při diskusi hlavních axiómů jsme si ukázali, v čem se liší formulace axiómů v teoriích A, B a C, D. Rozebereme si ještě podrobněji důležitou otázku, jež souvisí s prvním axiómem, a to zda samotná algebraická struktura poskytuje plnou fyzikální

*) Model s interakcí $\lambda\bar{\psi}\psi\varphi$.

informaci nebo zda různé reprezentace algebry musí být považovány za různé fyzikální teorie.

Jestliže algebra pozorovatelných má pouze jednu (ireducibilní) reprezentaci (až na ekvivalenci), pak algebraická struktura sama obsahuje veškeré informace a nic se nezíská ani neztratí tím, že použijeme verze teorie s konkrétním Hilbertovým prostorem. Taková situace je v kvantové mechanice, teorii systémů s konečným počtem stupňů volnosti. Jak ukázal von Neumann ([8]), existuje pro takové systémy (až na ekvivalenci) jediná reprezentace komutačních relací (ve Weylově tvaru), takže vyjádření hamiltoniánu různých systémů ve Schrödingerově tvaru není na újmu obecnosti. Na druhé straně tato proslulá von Neumannova věta neplatí pro soustavy s nekonečným počtem stupňů volnosti (KTP). Víme, že existuje nekonečně (dokonce nespočetně) mnoho (neekvivalentních ireducibilních) reprezentací algebry pozorovatelných daného systému, a že tedy naše otázka je oprávněná. Potěšitelnější než oprávněnost je však ta skutečnost, že otázka byla plně zodpověděna. V r. 1964 Haag a Kastler ([14]) ukázali, že charakteristiky, které odlišují neekvivalentní reprezentace algebry pozorovatelných jsou příliš jemné, než aby měly fyzikální následky. Jinými slovy neekvivalentní reprezentace algebry jsou fyzikálně ekvivalentní. Proto kterákoliv věrná reprezentace algebry pozorovatelných slouží stejně dobře k odvození fyzikálních předpovědí. To znamená, že samotná struktura algebry již obsahuje plnou fyzikální informaci a že zásadně není vůbec potřeba reprezentace algebry v Hilbertově prostoru.

Až doposud jsme srovnávali skupiny A, B s C, D. Ke srovnání skupin A, C s B, D pouze poznamenejme, že obě skupiny odrážejí jistá fyzikální fakta. A, C to, že veškerá měření provádíme v prostoročasu a B, D to, že většinu našich informací získáváme ze srážkových (rozptylových) experimentů, a to ve formě znalosti impulsů částic atd. Existují četné práce, které velmi detailně srovnávají čtyři přístupy AKTP (viz např. [3], [4]).

3. Klasifikace teorií

Protože neznáme jedinou konkrétní teorii, která by splňovala všechny axiómy, klasifikace je triviální. Na druhé straně dílčí klasifikace existují. Např. Symanzik ([15]) odvodil, že všechny KTP (s úplným systémem asymptotických stavů) tvoří hierarchii podle počtu tzv. ireducibilních vrcholů, jež obsahují. Nebudeme čtenáře seznamovat s definicí ireducibilního vrcholu; pouze poznamenáme, že teorie s konečným počtem těchto vrcholů jsou obyčejné KTP s polynomiálními lagrangiány.

4. Fyzikální předpovědi

Fyzikálních předpovědí plynoucích z AKTP není zatím mnoho, ale patří k fundamentálním.

Převážně byly odvozeny z Wightmanovy formulace axiómů. Patří k nim např. souvislost spinu se statistikou (LÜDERS, ZUMINO a BURGOYNE)*). Dále PCT teorém (Jost), který tvrdí, že každá lokální relativistická polní teorie má PCT symetrii, tj. existuje v ní operátor s jistými vlastnostmi ([2]). Tento teorém má za následek netriviální experimentální předpovědi. Např. každá částice má antičástici**) a pravděpodobnost procesu $c_1 + c_2 + \ldots + c_k \to c'_1 + c'_2 + \ldots + c'_m$, kde c_j je zkratka pro impuls $\boldsymbol{p}_j$ a složku spinu s_j j-té částice, je stejná jako pravděpodobnost procesu $\bar{c}'_1 + \bar{c}'_2 + \ldots + \bar{c}'_m \to \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \ldots + \bar{c}_k$, kde $\bar{c}_j$ znamená j-tou antičástici s impulsem $-\boldsymbol{p}_j$ a složkou spinu $-s_j$.

Z AKTP byla odvozena „absolutní“ omezení velikosti maticových elementů S-matice pro extrémní hodnoty celkové energie při srážce částic (MARTIN, FROISSART).

Byly nalezeny též různé analytické vlastnosti S-matice a ukázáno, že např. unitarita S-matice plyne z úplnosti systému rozptylových stavů, její jednoznačnost a existence z lokality a spektrálnosti. Nemusí být, jak bylo ukázáno, jedno-jednoznačná korespondence mezi poli a stabilními částicemi (LEHMANN, Symanzik, ZIMMERMANN, Haag, Ruelle, HEPP atd.).

Pro některé fyzikální procesy elementárních částic byly odvozeny tzv. disperzní relace (Bogoljubov, MEDVĚDĚV, POLIVANOV, OEHME, TAYLOR, Hepp), ze kterých např. vyplývá, že znalost maticových elementů S-matice pro jistý proces dává možnost předpovědět pravděpodobnost realizace jiného procesu.

Konečně byla odvozena řada závěrů pro křížovou (crossing) symetrii (EPSTEIN, GLASER aj.).

Celkově Jost a SALAM charakterisovali KTP jako dům s vysokými stěnami, dům bez oken a dveří, takže vlastně nevíme, zda jde o dům či vězení. Axiomatický přístup si pak můžeme představit jako snahu vyřešit tuto otázku studiem složení cihel a způsobu stavby. Zdroj pracovního nadšení axiomatiků v této náročné činnosti můžeme srovnat s Hilbertovou vírou, že Ignorabimus, tj. nepoznatelné, neexistuje.

Literatura:

[1] „*Problemy Gil'berta*“, Sborník redigovaný P. S. Alexandrovem, Nauka, Moskva, 1969, str. 116.

[2] Mechanika:

— G. HAMEL, Die Axiome der Mechanik, str. 6 v *Handbuch der Physik V.*, Springer-Verlag, Berlin, 1927.

— *Variacionnyje principy mechaniki*, Sborník redigovaný L. S. POLAKEM, Fizmatgiz, Moskva 1959.

---

*) Bosony, tj. částice řídící se Einsteinovou-Boseovou statistikou mají celočíselný spin, zatímco fermiony, částice řídící se Diracovou-Fermiovou statistikou, mají poločíselný spin.

**) Částice se v přírodě vyskytují buď ve dvojicích částice—antičástice nebo v jednotlivých kopiích, když částice je identická s antičásticí.

Termodynamika:
— C. Carathéodory, Math. Ann. *67* (1909), 355.
Teorie relativity:
— H. Reichenbach, *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre*, Vieweg, Braunschweig 1924.
Kvantová mechanika
— viz [8]
Kvantová teorie pole:
— R. F. Streater, A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and all that*, W. A. Benjamin, New York 1964 (rus. překlad, Nauka, Moskva 1966).
— též [3], [4].

[3] R. Jost, *The General Theory of Quantized Fields*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1965 (rus. překlad, Mir, Moskva 1967, str. 13).

[4] N. N. Bogoljubov, A. A. Logunov, I. T. Todorov: *Osnovy aksiomatičeskovo podchoda v kvantovoj teorii polja*, Nauka, Moskva 1969, str. 9.

[5] W. Heisenberg, Zeitschr. f. Physik *120* (1943), 513, 673; Zeitschr. f. Physik *1* (1946), 608.

[6] A. S. Wightman, Phys. Rev. *101* (1956), 860; *Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs,* CNRS, Paris, 1959.

[7] R. Jost, *Proceedings of the Sienna International Conference on Elementary Particles,* Vol. II. Società Nationale di Fisica, Bologna 1963, str. 140.

[8] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford 1959.
J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik,* Springer-Verlag, Berlin 1932;
G. W. Mackey: *The mathematical foundations of quantum mechanics*, W. A. Benjamin, Inc., New York 1963.

[9] G. E. Wick, A. S. Wightman, E. P. Wigner, Phys. Rev. *88* (1952), 101.

[10] E. P. Wigner, Ann. of Math., *40* (1939), 149.

[11] A. Jaffe, *Strictly localizable fields*, preprint ICTP 1969, IC/69/12, str. 41.

[12] A. Jaffe, J. Glimm, Phys. Rev. Lett. *23* (1969), 1362;
A. Jaffe, *Proceedings of XVth Internat. Conference on High Energy Physics*, Kiev 1970, str. 821.

[13] H. J. Borchers, Nuovo Cimento *15* (1960), 184.

[14] R. Haag, D. Kastler, J. Math. Phys. *5*, (1964), 848.

[15] K. Symanzik, Many-particle Structure of Green's Functions v knize *Symposium on Theoretical Physics*, Vol. 3, p. 121, Plenum Press, New York 1967.

J. Diller

Ve škole se mlčky přechází důležitá otázka: jak se dostávají čísla do geometrie? Na základě jakých zákonů geometrie přiřadíme bodům přímky čísla tak, abychom jimi vyjádřili geometrickou skutečnost? V axiómech elementární geometrie od Eukleida po Hilberta není o číslech vůbec řeč. Je však třeba uvažovat o souvislosti axiómů geometrie se sčítáním i násobením v algebře. Algebraizace axiomaticky dané geometrie záleží v důkazu, že předměty a relace geometrie lze zcela definovat v číselném oboru (obecněji algebraické struktuře), který zkonstruujeme z geometrie... Úspěšné probrání látky potřebuje dobrou třídu nebo kroužek s nadprůměrným smyslem pro abstrakci a pro formální úsudky.