Ivan Netuka; Jiří Veselý

# Dirichletova úloha a Keldyšova věta

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 24 (1979), No. 2, 77--88

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137929

Literatúra


[1] EINSTEIN, A.: *Sobranie naučnych trudov, I—IV.* Nauka, Moskva 1965—1967.
[2] HAAR, D., TER: *Quantentheorie, Einführung und Originaltexte.* Akademie-Verlag, Berlin 1969.
[3] ŤAPKIN, A. A., ed.: *Princip otnositeľnosti.* Atomizdat, Moskva 1973.
[4] FRANKFURT, U. I., ed.: *Einsteinovskij sbornik 1974.* Nauka, Moskva 1976.
[5] SCHLIPP, P. A., ed.: *Albert Einstein: Philosopher — Scientist.* Tudor Publishing Company, New York 1951.
[6] WEINER, C., ed.: *History of Twentieth Century Physics.* Academic Press, New York, London 1977.
[7] KUZNECOV, B. G.: *Od Galileiho po Einsteina.* Pravda, Bratislava 1975.
[8] KUZNECOV, B. G.: *Einstein.* Izdateľstvo akademii nauk SSSR, Moskva 1963.
[9] SEELIG, C.: *Albert Einstein.* Atomizdat. Moskva 1966.
[10] CLARK, R. W.: *Albert Einstein.* Bechtle-Verlag, Esslingen 1974.


# Dirichletova úloha a Keldyšova věta


*Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha*


Zprávy o úmrtí vynikajících vědeckých pracovníků nezabírají zpravidla v denním tisku mnoho místa a často přinášejí jenom základní informace. Když se proto loňského roku těsně před prázdninami objevila v novinách zpráva „V sobotu zemřel akademik Mstislav Keldyš, vynikající vědec a jeden z předních organizátorů sovětské vědy, člen ÚV KSSS, poslanec Nejvyššího sovětu SSSR, člen prezídia Akademie věd SSSR, ředitel Ústavu aplikované matematiky Akademie věd SSSR, trojnásobný hrdina socialistické práce a laureát Leninovy ceny a četných státních cen", jen málo lidí si skutečně uvědomilo, jak veliká ztráta tímto úmrtím pro sovětskou matematiku vznikla. Přinést zasvěcený a podrobný rozbor Keldyšovy celoživotní práce, její hodnocení a vliv na vývoj moderní matematiky není možno provést v článku tohoto typu; zájemce odkazujeme na [9]. Chceme se však pokusit přiblížit čtenáři problematiku, ve které Keldyš dosáhl několika vynikajících výsledků a kde jeho práce dodnes tvoří živnou půdu dalšího intenzívního výzkumu.

Mstislav Vsevolodovič Keldyš se narodil 10. února 1911 v Rize v rodině stavebního inženýra. Jako dvacetiletý (!) ukončil v roce 1931 studia na moskevské univerzitě a začal pracovat v oblasti aplikované matematiky v Institutu aerohydrodynamiky N. E. Žukovského. V této disciplíně dosáhli výborných výsledků N. E. ŽUKOVSKÝ a S. A. ČAPLYGIN, kteří zpracovali problematiku obtékání těles při rychlostech menších než rychlost zvuku. Keldyš byl jejich důstojným nástupcem — rozšířil jejich výsledky i pro stlačitelné kapaliny, zabýval se nárazem těles na kapalinu, řešil nestacionární pohyb křídla, věnoval se výpočtům kmitání leteckých konstrukcí atd. Dosáhl pěkných výsledků i v numerické matematice a lze bez nadsázky říci, že měl velký podíl i na dosažení Měsíce sovětským Lunochodem. V jeho osobě se projevil vzácný efekt dokonalého spojení inženýrsko-technického myšlení s výbornými schopnostmi budovat adekvátní matematické teorie — zde má své kořeny mnoho jeho prací z oblasti teorie funkcí komplexní proměnné, diferenciálních rovnic i funkcionální analýzy. Sem patří i jeho práce o řešitelnosti a stabilitě Dirichletovy úlohy. Ponecháme stranou jeho výjimečné organizační schopnosti a další osobní vlastnosti, které ho nakonec postavily do čela Institutu aplikované matematiky a pak i do vedení sovětské akademie věd — jen jednu věc ještě nesmíme zamlčet: od roku 1938, kdy získal doktorát fyzikálně-matematických věd, se intenzívně a úspěšně věnoval pedagogické práci.

Další část tohoto článku je složena ze dvou oddílů. V prvním podáváme historický přehled vývoje problematiky — neuvádíme bibliografické údaje a zájemce odkazujeme např. na přehledný článek [4]; též historické komentáře a literatura v [10] postačí k přesnému vymezení zmíněných prací. Ve druhém oddíle, který je trochu náročnější, uvádíme hlavní odkazy, neboť jde o práce méně známé, a pokud víme, přehledný článek o této problematice neexistuje.

## Dirichletova úloha

*Harmonická funkce* na otevřené podmnožině $U$ eukleidovského prostoru $R^m$ $(m \geqq 1)$ je spojité řešení *Laplaceovy rovnice*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0$$

na $U$. Je-li $v$ lokálně integrovatelná funkce na $U$, definujme pro každou kouli $B = B_r(x) = \{y; |x - y| \leqq r\}$, $B \subset U$, *objemový průměr* funkce $v$ vzhledem k $B$ předpisem

$$A(v\,;\, x, r) = \frac{1}{\mathrm{vol}\,(B)} \int_B f(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

kde vol $(B)$ je objem koule $B$. Je známo, že pro harmonickou funkci $u$ na $U$ platí pro každou kouli $B_r(x) \subset U$

$$A(u; x, r) = u(x)$$

(C. F. Gauss, 1840). Z počátku tohoto století pochází obrácené tvrzení, tj. poznatek, že tato vlastnost průměru charakterizuje mezi spojitými funkcemi na $U$ právě harmonické funkce.

Budeme převážně pracovat jen se spojitými funkcemi — systém všech funkcí spojitých na množině $M$ označíme $C(M)$. Systém všech funkcí $s \in C(U)$, pro něž pro každé $x \in U$ a všechna dostatečně malá $r$ platí

$$A(s; x, r) \leqq s(x)\,,$$

označíme $\mathscr{S}(U)$; jeho prvky jsou (*spojité*) *superharmonické funkce* na $U$. V $R^1$ jsou zavedené systémy jednoduché: harmonické funkce jsou lineární, superharmonické funkce jsou konkávní na každé komponentě $U \subset R^1$. V dalším se omezíme na případ $m \geqq 2$, i když čtenář si může jednotlivé pojmy představovat i v $R^1$; u složitějších pojmů však nejsou jednorozměrné případy pro svoji jednoduchost a i jistou patologii spolehlivým vodítkem.

V dalším bude $U$ vždy otevřená neprázdná omezená množina v $R^m$. Pro stručnější vyjadřování označíme $\mathscr{H}(U)$ množinu všech harmonických funkcí na $U$. Položme ještě

$$S(U) = \{s \in C(\overline{U});\ s|_U \in \mathscr{S}(U)\},$$

$$H(U) = S(U) \cap (-S(U)).$$

(Symbol $f|_M$ značí restrikci funkce $f$ na množinu $M$.) Restrikce systémů $S(U)$ a $H(U)$ na hranici $\partial U$ označíme $S(\partial U)$ a $H(\partial U)$.

Studium *Dirichletovy úlohy* (D-úlohy) je bezmála páteří celé teorie potenciálu. Její formulace je snadná: je-li $f \in C(\partial U)$, má se nalézt funkce $h \in H(U)$, pro kterou $h|_{\partial U} = f$. Pokud taková funkce existuje, je určena jednoznačně (důsledek principu maxima) a nazývá se *klasické řešení* D-úlohy pro $U$ a $f$. Toto řešení budeme značit $D^U f$ nebo jen $Df$. Existuje-li pro všechny funkce $f \in C(\partial U)$ řešení $Df$, nazývá se množina $U$ *regulární* (čtenář snadno nahlédne, že v $R^1$ je každá množina $U$ regulární i jak se popíše řešení $Df$).

První formulace D-úlohy spadá do 19. století (G. GREEN, 1828). Její název je úzce spjat s metodou jejího řešení (v $R^m$, $m \geqq 2$ je to netriviální problém), která je založena na jistém variačním principu: v systému funkcí s konečným integrálem energie (tzv. *Dirichletův integrál*), jejichž restrikce na $\partial U$ splývají s hraniční podmínkou $f$, má $Df$ nejmenší hodnotu tohoto integrálu energie.

Tohoto principu použili k řešení D-úlohy mnozí: C. F. GAUSS v práci (1840), která se pokládá za rozhodující pro vznik matematické teorie potenciálu, W. THOMPSON (známější jako lord KELVIN), jemuž vděčí harmonické funkce za svůj název, i B. RIEMANN, který na něm založil (1851) svoji teorii funkcí komplexní proměnné. Tento Dirichletův princip (nazval jej tak Riemann) podrobil K. WEIERSTRASS ostré kritice – dnes již víme, že i v případě, kdy $U$ je koule v $R^m$, $m \geqq 2$, existují funkce $f$, pro něž uvažovaný systém funkcí s konečnou energií je prázdný. Navíc, v případě, že je neprázdný, nemusí v něm pro komplikovanější množiny $U$ existovat funkce, pro niž se minima nabývá. Tato kritika podnítila úsilí matematiků o řešení D-úlohy; šlo zde o mnohem víc, než jen o „záchranu" Riemannovy teorie funkcí komplexní proměnné, ale i o studium fyzikálních problémů, které přímo či nepřímo k řešení D-úlohy vedou. Postupné zlepšování výsledků a objevy stále účinnějších metod řešení D-úlohy (H. A. SCHWARZ, 1870; C. NEUMANN, 1870; H. POINCARÉ, 1890; D. HILBERT, 1900; I. FREDHOLM, 1903) vedly k přesvědčení, že konečné řešení problému (nalezení řešení pro všechny uvažované $U$ a $f$, tj. důkaz regularity omezených otevřených množin $U$) je otázkou času a nalezení dostatečně efektivních metod.

Roku 1872 dokázal H. A. Schwarz, že je-li funkce $u$ omezená a harmonická na $U \setminus \{x\}$, $x \in U$, potom lze $u$ v bodě $x$ „dodefinovat" tak, že platí $u \in \mathscr{H}(U)$ (izolovaný bod je odstranitelnou singularitou pro omezené harmonické funkce). S. ZAREMBA (1911) ukázal, že toto tvrzení má překvapivou interpretaci – vede totiž lehce ke konstrukci množiny $U \subset R^2$, která není regulární. Nechť $U \subset R^2$ je kruh o poloměru $r = 1$ se středem v počátku, ze kterého odstraníme bod 0; definujeme-li pak $f \equiv 1$ na jednotkové kružnice a $f(0) = 0$, je $f \in C(\partial U)$, pro kterou neexistuje řešení $Df$. Zdálo by se, že „trik" příkladu spočívá v tom, že bod 0 je izolovaným bodem $\partial U$. O dva roky později (1913) H. LEBESGUE sestrojil v $R^3$ příklad množiny, která byla „velmi pěkná" (homeomorfní kouli), a přesto byla neregulární. Skutečně, pro $U \subset R^m$, $m \geqq 2$ obecně platí $C(\partial U) \neq H(\partial U)$ na rozdíl od $R^1$.

Zdálo se, že se studium D-úlohy dostalo do slepé uličky. Například u rovinného příkladu z minulého odstavce je „kandidátem na $Df$" funkce $u \equiv 1$, u níž je na závadu chování právě v jednom bodě: $u(0) = 1 \neq 0 = f(0)$. Neregularita množiny $U$ je způsobena „nerozumným chováním" na části hranice $\partial U$, která je v tomto případě rovna právě $\{0\}$. Je-li v tomto případě $f \in C(\partial U)$ a $f(0) = 0 < \min\{f(z);\ |z| = 1\}$, řešení $Df$ neexistuje opět „kvůli bodu O". Byla by to totiž tzv. bariéra tohoto bodu vzhledem k $U$.

Obecněji nechť $U \subset R^m$ a $x \in \partial U$. Jestliže existuje okolí $V$ bodu $x$ a kladná funkce $s \in \mathscr{S}(U \cap V)$, mající limitu rovnou 0 v bodě $x$, nazveme $s$ *bariéra* bodu $x$ vzhledem k $U$.

Implicitně používal tohoto pojmu již Poincaré (1890), explicitně však vstupuje tento pojem do teorie potenciálu díky pracím H. Lebesguea a G. BOULIGANDA z dvacátých let.

Viděli jsme, že bariéra souvisí nějakým způsobem s existencí $Df$ – dá se ukázat, že pokud ke každému bodu $x \in \partial U$ existuje bariéra, je $U$ regulární množina.

Již roku 1907 ukázal Lebesgue, že všechny „geometricky rozumné" množiny v $R^2$ jsou regulární. Další vývoj se ubíral jednak k hledání podmínek regularity pro $U \subset R^m$ (Poincaré, Lebesgue, Raynor, Bouligand) a pak ke konstrukci vhodných metod pro nalezení $Df$.

Roku 1923 navrhl O. PERRON metodu, která přiřazovala každé funkci $f \in C(\partial U)$ jistým způsobem funkci z $\mathscr{H}(U)$. Označíme-li tuto funkci $Hf$, platilo pro regulární množiny $Df = Hf$ pro všechny funkce $f \in C(\partial U)$. Nezávisle objevil prakticky tutéž metodu R. REMAK. Definujeme-li horní třídu příslušnou k dané hraniční funkci $f$ jako

$$\Sigma_f = \{s \in S(U);\ s|_{\partial U} \geqq f\}$$

a obdobně dolní třídu

$$\sigma_f = \{t \in -S(U);\ t|_{\partial U} \leqq f\},$$

jsou $\underline{H}f = \sup \sigma_f$ a $\overline{H}f = \inf \Sigma_f$ harmonické funkce na $U$. Platí vždy $\underline{H}f \leqq \overline{H}f$; nastává-li rovnost, klademe $Hf = \overline{H}f$. Pro regulární množinu platí

$$Df = Hf = \underline{H}f = \overline{H}f,$$

avšak poslední rovnost nastává dokonce pro každou $U$ a každou $f \in C(\partial U)$.

Zrodilo se *zobecněné řešení* D-úlohy, které nebylo obecně totožné s klasickým řešením – toto, jak víme, nemusí vždy existovat. Roku 1924 si H. Lebesgue a N. WIENER nezávisle uvědomili, že D-úlohu je vhodné rozdělit na dvě dílčí úlohy:

(a) přiřadit každé funkci $f \in C(\partial U)$ „rozumným" způsobem funkci $Zf \in \mathscr{H}(U)$ (zobecněné řešení),

(b) zkoumat hraniční chování funkce $Zf$.

„Rozumný" způsob by měl v tomto kontextu znamenat přinejmenším to, že na $U$ je $Zf = Df$, pokud klasické řešení $Df$ pro $f$ existuje.

Nastala vlna intenzívního zájmu o „dirichletovské operátory", tj. zobrazení z $C(\partial U)$ do $\mathscr{H}(U)$, která přiřazují $f \mapsto Zf$ „rozumným" způsobem. Nejúspěšnější (z hlediska vyšetření všech vlastností) byl postup, který navrhl N. Wiener: rozšířil libovolně $f \in C(\partial U)$ na funkci $F = F_0 \in C(\overline{U})$ a potom z ní rekurentně konstruoval posloupnost funkcí $\{F_n\}$, pro niž $F_n \to Zf$. Schematicky:

$$f \in C(\partial U) \overset{\mathrm{I}}{\cdots\cdots} F = F_0 \in C(\overline{U})\,,$$

$$F_0 \overset{\mathrm{II}}{\cdots\cdots} F_n \to Zf\,.$$

Je zajímavé, že tomuto schématu odpovídaly i metody navržené již dříve – Poincaré (1890!), Lebesgue (1913). Popíšeme podrobněji Wienerovu metodu konstrukce $\{F_n\}$: Nejprve dokázal, že lze nalézt regulární množiny $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n \subset \ldots$, $\bigcup_n U_n = U$ a pak definoval rekurentně

$$F_n = DF_{n-1} \text{ na } \overline{U}_n \quad (\text{řešení vzhledem k } U_n)\,,$$

$$F_n = F_{n-1} \quad \text{na } U \setminus \overline{U}_n\,.$$

I když možnost rozšíření dokázal již dříve Lebesgue (krok I), je třeba si uvědomit, že Wiener musel dokázat konvergenci posloupnosti $\{F_n\}$, nezávislost její limity na rozšíření $f$ na $F = F_0$ i na volbě „vyčerpání" $\{U_n\}$, dále že limita definuje „rozumnou" funkci $Zf$, vyšetřit hraniční chování $Zf$ a další detaily.

Ponechme stranou otázky, týkající se nespojitých hraničních podmínek – tento problém studoval Wiener již v roce 1923. Důležitější je fakt, že již v roce 1925 dokázal, že jeho zobecněné řešení splývá s Perronovým řešením $Hf$. Rovněž si povšiml lineární závislosti svého řešení $Zf$ na $f$. Našel pro ně též v termínech kapacity nutné a postačující podmínky pro regularitu hraničních bodů. Připomínáme, že hraniční bod $z$ je *regulární*, jestliže

$$\lim_{y \to z} Hf(y) = f(z)$$

pro všechny funkce $f \in C(\partial U)$. Zhruba řečeno: regulární body nepůsobí obtíže; snadno se nahlédne, že množina $U$ je regulární, právě když jsou všechny její hraniční body regulární. Lze dokázat, že bod $z$ je regulární, právě když k němu existuje bariéra – dokonce lze požadovat, aby tato bariéra byla harmonická. Tento poznatek náleží Bouligandovi; zda lze však najít harmonickou bariéru spojitě rozšířitelnou na $\overline{U}$, se ještě dlouho nevědělo.

Perronovo řešení je elegantní a v jistém smyslu pro moderní teorii potenciálu nejdůležitější. Je však nutno poznamenat, že i některé jeho základní vlastnosti odhalil teprve Wiener tím, že ukázal, že toto řešení splývá s jeho zobecněným řešením.

Setkáte-li se s označením „PWB-solution", patří zde písmeno B francouzskému matematiku M. BRELOTOVI, který v roce 1939 objasnil pro modifikovanou Perronovu metodu, kdy rovnost $\underline{H}f = \overline{H}f$ nastává i pro obecnější než spojité funkce $f$.

Později byla navržena další zobecněná řešení (dirichletovské operátory) a byly též vyšetřeny jejich vzájemné souvislosti. Z novějších postupů jmenujme např. DE LA VALLÉE-POUSSINŮV (1931) a KELLOGŮV (1934). O. D. Kellog navrhl např. postupy dva (první byl „wienerovského" typu, druhý zobecňoval Lebesgueovu metodu z roku 1913) a dokázal, že dávají totéž zobecněné řešení $Zf$. Již jsme se zmínili, že řešení, která navrhli Poincaré, Lebesgue (a i Kellogovo zobecnění z roku 1934) a Wiener užívají stejného schématu. Vypůjčíme si typické vlastnosti jednotlivých metod a naznačíme, jak lze celkem jednoduše ukázat, že všechny vedou k Perronovu řešení; omezíme se na krok II: rozdíly funkcí z $S(U)$ tvoří hustou podmnožinu Banachova prostoru $C(\overline{U})$. Proto se stačí omezit na důkaz $F_n|_U \to Hf$ pro každou funkci $F_0 \in S(U)$, $F_0|_{\partial U} = f$. Beze změny označení uvažujme nyní příslušnou posloupnost restrikcí $F_n$. Lze ukázat, že $F_n$ se u všech metod generuje z $F_{n-1}$ pomocí lineárního monotónního operátoru, vůči němuž jsou funkce z $H(U)$ invariantní a – vzhledem k $F_0 \in S(U)$ – posloupnost $\{F_n\}$ je nerostoucí zdola omezená. Pomocí základních vět analýzy (Levi, Dini) a jednoduchých vlastností (super)harmonických funkcí dostáváme $F_n \searrow \overline{H}f = Hf$, přičemž poslední rovnost je důsledkem spojitosti funkce $f$.

Na závěr této části můžeme tedy shrnout takto poznatky, které byly známy v první třetině tohoto století:

(1) Klasická D-úloha nemá obecně řešení pro každou spojitou okrajovou podmínku (existence neregulárních množin v $R^m$, $m \geqq 2$).

(2) Existuje řada speciálních metod konstrukce zobecněného řešení $Zf$ pro D-úlohu na libovolné omezené otevřené množině.

(3) Všechna známá zobecněná řešení mají tyto vlastnosti:
  (a) závisí lineárně na okrajové podmínce;
  (b) nezáporné okrajové podmínce odpovídá nezáporné řešení (řešení tedy závisí na okrajové podmínce monotónně);
  (c) zobecněné řešení splývá s klasickým řešením v případě, že klasické řešení existuje.

Podívejme se na další vývoj této problematiky.

### Keldyšova věta

Stejně jako v předcházející části předpokládáme nejprve, že $U \neq \emptyset$ je otevřená omezená podmnožina $R^m$, $m \geqq 2$.

Zobrazení $A$: $C(\partial U) \to \mathscr{H}(U)$ se nazývá *Keldyšův operátor* na $U$, jestliže platí

($\alpha$) $A$ je lineární;

($\beta$) $A$ je monotónní ($Af_1 \geqq Af_2$ na $U$, kdykoli je $f_1 \geqq f_2$ na $\partial U$);

($\gamma$) Pro každou funkci $h \in H(U)$ je $A(h|_{\partial U}) = h|_U$.

Snadno nahlédneme, že $A$ je „dirichletovský operátor" (podmínka ($\gamma$)), který má ještě další přirozené vlastnosti; tyto vlastnosti rovněž nejsou nové — stačí porovnat definici Keldyšova operátoru s bodem (3) shrnujícím na konci předcházející části vlastnosti speciálních konstrukcí zobecněných řešení D-úlohy. Připomínáme, že speciálně perronovské řešení je příkladem Keldyšova operátoru.

V případě, že na $U$ existuje právě jeden Keldyšův operátor, řekneme, že množina $U$ je *keldyšovská*. Pak lze prohlásit, že pro $U$ existuje jediné v jistém smyslu „rozumné" zobecněné řešení D-úlohy.

Zvolme $x \in U$; potom zobrazení $f \mapsto Af(x)$ je nezáporný lineární funkcionál na $C(\partial U)$. Podle Rieszovy věty o reprezentaci lze tento funkcionál ztotožnit s nezápornou borelovskou mírou $\alpha_x$ na $\partial U$. Na Keldyšův operátor můžeme tedy pohlížet jako na systém $\{\alpha_x; \ x \in U\}$, který — ve smyslu podmínky ($\gamma$) — „harmonicky závisí na parametru $x$". Víme již, že např. Perronovo řešení je Keldyšův operátor. Pro $x \in U$ označíme $\mu_x$ míru, odpovídající perronovskému řešení (tj. $Hf(x) = \mu_x(f)$ pro všechny funkce $f \in C(\partial U)$), a nazveme ji *harmonická míra* (vzhledem k $x$ a $U$).

Podle ($\gamma$) jsou hodnoty Keldyšova operátoru určeny na podprostoru $H(\partial U) \subset C(\partial U)$. Studovat Keldyšův operátor znamená tedy zkoumat pozitivní lineární rozšíření tohoto zobrazení z podprostoru $H(\partial U)$ na $C(\partial U)$. Víme, že pro regulární množiny platí $H(\partial U) = C(\partial U)$; v této souvislosti je to tedy nezajímavý případ (není „kam" rozšiřovat) a každá taková množina je zřejmě keldyšovská. Není těžké dokázat, že $H(\partial U)$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru $C(\partial U)$. Není-li $U$ regulární množina, je tedy $H(\partial U)$ řídký podprostor v $C(\partial U)$; studujeme tedy vlastně rozšíření z množiny, která je v jistém smyslu malá. Je vůbec rozumné doufat, že zmíněné rozšíření je určeno jednoznačně?

Jak víme, *existence* Keldyšova operátoru byla známa již ve dvacátých letech a v předchozí části jsme se zmínili o řadě různých speciálních konstrukcí zobecněných řešení D-úlohy. Všechny mají vlastnosti ($\alpha$) — ($\gamma$), a jsou to tedy příklady Keldyšových operátorů; o mnoha se však vědělo, že ve skutečnosti splývají. Nyní se dostáváme k zásadní otázce: existuje na $U$ pouze *jediný* Keldyšův operátor? Méně přesně řečeno: kolik je rozumných zobecnění klasické D-úlohy?

Poznamenejme především, že A. F. MONNA ve své disertaci (1935) dokázal, že různé v té době známé definice zobecněného řešení vedou ke stejnému výsledku. Dále Monna formuloval (1938) otázku jednoznačnosti operátoru $A$ vyhovujícího podmínkám ($\alpha$) — ($\gamma$) a podařilo se mu dokázat jednoznačnost za dalších (ne zcela přirozených) požadavků na operátor $A$. (Různé modifikace definice Keldyšova operátoru a příslušnou větu o jednoznačnosti později zkoumali N. INOUE (1950), N. NINOMIYA (1952), R. VÝBORNÝ (1958) — viz citace v [15] a [10]).

V roce 1941 publikoval Keldyš dvoustránkovou práci [8], v níž dokazuje, že (v naší terminologii) *každá omezená otevřená podmnožina $R^m$ je keldyšovská*. Tomuto tvrzení budeme říkat *Keldyšova věta*. Keldyš poznamenává, že tím je řešen Monnův problém a uvádí, že podobnou otázku mu při osobním setkání položil J. SCHAUDER. Malý rozsah práce by snad mohl vzbudit dojem, že řešení tak závažného problému teorie potenciálu je vlastně snadné a jednoduché. Vtip je však v tom, že Keldyš při důkazu používá tento výsledek své práce [7]:

K e l d y š o v o   l e m m a. *Nechť* $z \in \partial U$ *je regulární bod; pak existuje funkce* $h \in H(U)$ *tak, že* $h(z) = 0$ *a* $h(y) > 0$ *pro všechna* $y \in \bar{U} \setminus \{z\}$.

Keldyšova konstrukce takové funkce je velice komplikovaná (opírá se o jemné úvahy založené na Wienerově kritériu regularity) a dodnes není znám žádný důkaz Keldyšova lemmatu, který by mohl být označen za „elementární".

V předcházející části jsme se zmínili o pojmu bariéry. Keldyšovo lemma zaručuje existenci velice „kvalitní" bariéry pro bod $z$. Zmínili jsme se, že ke každému regulárnímu bodu existuje bariéra a že odtud plyne existence harmonické bariéry – možnost jejího spojitého rozšíření před Keldyšem nebyla vůbec jasná. Stojí snad za zmínku, že Poincaré uměl nalézt funkci, která byla bariérou z $H(U)$, ale jen pro některé regulární body speciálního typu. Po explicitním zavedení a zobecnění dospěl vývoj k „málo kvalitním" bariérám; jejich existenci však bylo možno dokázat pro každý regulární bod. Keldyšovo lemma bylo tedy dalším zdokonalením poznatků o pojmu bariéry.

Považujme Keldyšovo lemma za známé a předpokládejme, že $A$ je Keldyšův operátor na $U$. Volme $f \in C(\partial U)$, regulární bod $z \in \partial U$ a kladné číslo $\varepsilon$. Existuje okolí $V$ bodu $z$ tak, že pro každé $y \in \partial U \cap V$ je $f(y) < f(z) + \varepsilon$. Protože funkce $h$ je kladná na kompaktní množině $\partial U \setminus V$, existuje $c > 0$ tak, že $f - f(z) \leqq ch$ na $\partial U \setminus V$. Položíme-li $\varphi = f(z) + \varepsilon + ch$, máme $\varphi \in H(U)$ a $f \leqq \varphi$ na $\partial U$. Z vlastností (β), (γ) operátoru $A$ dostáváme na $U$

$$Af \leqq A\varphi = \varphi\,,$$

takže

$$\limsup_{x \to z, x \in U} Af(x) \leqq \varphi(z) = f(z) + \varepsilon\,.$$

Obdobně se dokáže, že

$$\liminf_{x \to z, x \in U} Af(x) \geqq f(z) - \varepsilon$$

a tedy funkce $Af$ má v bodě $z$ vzhledem k $U$ limitu $f(z)$. Stejnou limitu má ovšem perronovské řešení $Hf$. Vidíme, že omezená harmonická funkce $(Hf - Af)$ má v každém regulárním bodě limitu nula. Je známo, že taková funkce je identicky rovna nule na $U$ v důsledku principu maxima. Tím je dokázána jednoznačnost Keldyšova operátoru a $U$ je proto keldyšovská. Za zmínku stojí, že se při důkazu nevyužívá podmínky (α). Toho si povšiml v roce 1961 M. Brelot, který podal v [3] nový důkaz Keldyšovy věty. Je založen na mnohem jednodušší, nicméně netriviální konstrukci funkce s touto vlastností: Nechť $\varepsilon > 0$, $0 < a < b$, $z \in \partial U$ regulární bod a $V$ buď okolí bodu $z$. Pak existuje funkce $g_{\varepsilon,a,b} = g \in H(U)$ tak, že $0 \leqq g \leqq b$ na $\bar{U}$, $g(z) < \varepsilon$ a $g \geqq a$ na $\partial U \setminus V$. Toto oslabení Keldyšova lemmatu stačí k důkazu Keldyšovy věty; navíc pomocí funkcí typu $g_{\varepsilon,a,b}$ lze užitím vtipného postupu sestrojit funkci $h$ z Keldyšova lemmatu. Brelot dále dokazuje platnost Keldyšovy věty v obecnějším kontextu a dostává tak mj. tvrzení o jednoznačnosti rozumného zobecnění klasické D-úlohy pro obecnější rovnice, než je Laplaceova. Abychom mluvili srozumitelněji, musíme opustit půdu klasické teorie potenciálu a alespoň informativně se zmínit o jedné cestě, kterou se ubírá moderní teorie potenciálu.

Hlavním cílem teorie harmonických prostorů bylo vybudovat jednoduchý a dostatečně široký axiomatický systém pro teorii potenciálu. Ke standardním příkladům harmonických prostorů vede široká třída lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu eliptického a parabolického typu. Za základní příklady je třeba považovat klasickou teorii potenciálu (tj. v širokém smyslu studium řešení Laplaceovy rovnice) a příslušnou teorii pro rovnici vedení tepla, která ovšem ani zdaleka nebyla (a ostatně stále ještě není) tak propracována. V průběhu šedesátých a sedmdesátých let zaznamenala teorie harmonických prostorů značný rozmach (srv. [4], [1], [5]). Všechny důležité výsledky klasické teorie potenciálu (které nevyužívají pojmu Dirichletova integrálu) našly svůj odraz i v axiomatice. Byly tak mj. objasněny i vztahy mezi základními principy klasické teorie, která tím tak získala na průzračnosti a poodhalila ve vší hloubce svou logickou výstavbu. Vzhledem k tomu, že axiómy harmonického prostoru mají lokální charakter, výsledků lze užít při studiu parciálních diferenciálních rovnic na varietách. Obzvláště důležité jsou pravděpodobnostní aspekty axiomatické teorie potenciálu: teorie harmonických prostorů se často považuje za spojovací článek mezi parciálními diferenciálními rovnicemi a markovskými procesy.

Základní axiómy harmonického prostoru odrážejí tyto poznatky známé z klasické teorie potenciálu: „harmoničnost" je lokální pojem; existuje hodně množin, na nichž umíme řešit klasickou D-úlohu; supremum neklesající posloupnosti harmonických funkcí je harmonická funkce – pokud jsou splněny vhodné předpoklady o konečnosti limitní funkce (Harnackova věta).

*Harmonický prostor* je lokálně kompaktní topologický prostor $X$ a zobrazení $\mathscr{H}$, které každé otevřené množině $U \subset X$ přiřazuje lineární prostor $\mathscr{H}(U)$ funkcí spojitých na $U$ tak, že platí:

*Axióm svazku*: Jsou-li $U$, $V$ otevřené množiny, $V \subset U$ a $h \in \mathscr{H}(U)$, pak $h|_V \in \mathscr{H}(V)$. Nechť $\{U_i\}_{i \in I}$ je systém otevřených množin a $h$ je funkce na $\bigcup U_i$. Jestliže $h|_{U_i} \in \mathscr{H}(U_i)$ pro každé $i \in I$, pak $h \in \mathscr{H}(U)$.

Funkce z $\mathscr{H}(U)$ se nazývají harmonické funkce na $U$. Pro takto zavedené „abstraktní" harmonické funkce se definuje řešení Dirichletovy úlohy a regulární množina analogicky jako v klasickém případě.

*Axióm báze.* Existuje báze topologického prostoru $X$ tvořená regulárními množinami.

*Axióm konvergence.* Je-li $h_n$ neklesající posloupnost harmonických funkcí na otevřené množině $U \subset X$ a $h = \sup h_n$ je funkce konečná na husté podmnožině v $U$, pak $h$ je harmonická funkce.

Tyto tři axiómy tvoří základ teorie harmonických prostorů, jak je vyložena v [1]. Brelotova axiomatika (viz [4]) požaduje silnější verzi axiómu konvergence: Je-li $U$ oblast a $h = \sup h_n$ je funkce konečná v jednom bodě, pak je $h$ na $U$ harmonická. V důsledku toho rovnice parabolického typu nejsou zahrnuty do Brelotovy teorie. „Rumunská" axiomatika (Constantinescu - Cornea [5]) vychází ze svazku kuželů hyperharmonických funkcí a systém axiómů je jiný. Tato teorie zahrnuje Brelotův i Bauerův přístup – i když to na první pohled není patrné.

Poznamenejme ještě, že k rozvinutí bohatší teorie se přidává další axióm, který – zhruba řečeno – vyjadřuje, že systém superharmonických funkcí není příliš chudý. Naším cílem není (a v tomto omezeném prostoru zdaleka nemůže být) vykládat nejrůznější jemnosti axiomatických teorií potenciálu, ani jejich přínos pro samotnou teorii potenciálu nebo dokonce ještě i pro oblast parciálních diferenciálních rovnic, teorii pravděpodobnosti, funkcionální analýzu apod. Důležité je teď pro nás vědět, že vcelku s malými změnami lze perronovskou metodu řešení D-úlohy převést do kontextu axiomatické teorie potenciálu. Není nutno zdůrazňovat, že také pojem Keldyšova operátoru a keldyšovské množiny mají dobrý smysl.

Připomeňme si, že M. Brelot [3] v roce 1961 dokázal (za dodatečného axiómu, který je splněn pro eliptické rovnice) Keldyšovu větu v rámci své axiomatiky. J. Lukeš [12] upozornil v roce 1974 na skutečnost, že pro rovnici vedení tepla existují nekeldyšovské množiny, a sestrojil (v harmonickém prostoru v Bauerově smyslu) třídu Keldyšových operátorů obecně různých od perronovského řešení. Tím vyniká jeden z významných rozdílů mezi Brelotovým a Bauerovým axiomatickým systémem. Z výsledků J. Bliedtnera a W. Hansena [2] z roku 1975 a zmíněné Lukešovy práce plyne, že $U \subset X$ *je keldyšovská, právě když množina* $\partial_i U$ *jejích neregulárních bodů je zanedbatelná* v tomto smyslu: Je-li $f$ charakteristická funkce množiny $\partial_i U$, pak $Hf = 0$ identicky v $U$ (neboli, v termínech harmonické míry, $\mu_x(\partial_i U) = 0$ pro každé $x \in U$). Z této věty také plyne charakteristika harmonických prostorů, v nichž každá (relativně kompaktní otevřená) podmnožina je keldyšovská. Funkcionální přístup ke Keldyšově větě je vyšetřován J. Lukešem ([13], 1977), operátory $A$ splňující pouze podmínky ($\beta$), ($\gamma$) jsou studovány v práci [17] z roku 1978. Poznamenejme, že zajímavý důkaz Keldyšovy věty pro klasický případ je uveden v Landkofově učebnici [11].

Víme již, že obecně existují nekeldyšovské množiny. J. Lukeš a I. Netuka [14] dokázali, že v každém harmonickém prostoru existují libovolně velké keldyšovské množiny. Přesně řečeno: *Je-li* $K \subset X$ *kompaktní,* $V \subset X$ *otevřená a* $K \subset V$, *pak existuje keldyšovská množina* $U$ *tak, že* $K \subset U \subset \bar{U} \subset V$. Na základě této věty definovali zobecněné řešení wienerovského typu, které ovšem představuje Keldyšův operátor. Pozoruhodné je, že i na nekeldyšovských množinách splývá s perronovským řešením. Ukazuje se, že perronovské řešení mezi (obecně nekonečně mnoha) Keldyšovými operátory zaujímá prominentní postavení. Ve prospěch právě tohoto zobecněného řešení mluví také pravděpodobnostní interpretace D-úlohy.

Na závěr se ještě podívejme, jak Keldyšovo lemma a Keldyšova věta zapadají zcela přirozeným způsobem do kontextu *Choquetovy teorie*, moderní partie funkcionální analýzy. (Výklad bude stručný – zájemce o hlubší studium odkazujeme na [6], [16].)

Nechť $Y$ je metrizovatelný kompaktní topologický prostor, $C(Y)$ je Banachův prostor spojitých funkcí na $Y$. Předpokládejme, že $P$ je uzavřený podprostor prostoru $C(Y)$ oddělující body prostoru $Y$ a obsahující konstantní funkce. Pro $y \in Y$ označíme $\mathscr{M}_y$ systém všech nezáporných měr $\mu$ na $Y$, pro něž $f(y) = \int f \, d\mu$, $f \in P$. Prvkům z $\mathscr{M}_y$ se říká *míry reprezentující bod* $y$. Zřejmě pro Diracovu míru $\varepsilon_y$ soustředěnou v bodě $y$ platí vždy $\varepsilon_y \in \mathscr{M}_y$. Množinu

$$Ch_P Y = \{y \in Y; \mathscr{M}_y = \{\varepsilon_y\}\}$$

nazýváme *Choquetova hranice* $Y$ vzhledem k $P$. Množina $Ch_P Y$ nemusí být uzavřená, je však vždy typu $G_\delta$. Jestliže $y \in Y$ a existuje nezáporná funkce $h \in P$, která se anuluje pouze v bodě $y$, nazveme *$y$ exponovaným bodem*. Každý exponovaný bod patří do Choquetovy hranice.

Jedním z důležitých výsledků Choquetovy teorie je tato věta o reprezentaci: *Pro každý bod $y \in Y$ existuje míra $v_y$ reprezentující bod $y$ a soustředěná na $Ch_P Y$* (tj. platí $v_y(Y \setminus Ch_P Y) = 0$). Jestliže pro každé $y \in Y$ existuje *právě jedna* míra s touto vlastností, nazveme prostor $P$ *simpliciální*. Je známo, že pokud $P$ je simpliciální, je každý bod Choquetovy hranice $Ch_P Y$ exponovaný.

Poznamenejme, že prostor $P$ je simpliciální, právě když je řešitelná tato „slabá" formulace Dirichletovy úlohy: Je-li $K \subset Ch_P Y$ uzavřená podmnožina a $f \in C(K)$, pak existuje $u \in P$ tak, že $u|_K = f$. Přitom lze navíc požadovat

$$\sup u(Y) = \sup f(K), \ \inf u(Y) = \inf u(K) .$$

Vraťme se opět k harmonickým funkcím, tentokrát však již v abstraktním kontextu. Nechť opět $U$ je neprázdná relativně kompaktní otevřená množina v harmonickém prostoru $X$, stejně jako dříve

$$H(U) = \{h \in C(\overline{U});\ h|_U \in \mathscr{H}(U)\}$$

a nechť $H(U)$ obsahuje konstanty a odděluje body množiny $U$. Označme $W(U)$ množinu všech minim konečných systémů funkcí z $H(U)$. Ze Stone-Weierstrassovy věty plyne, že $W(U) - W(U)$ je hustý podprostor v $C(\overline{U})$. Položme nyní v předchozím výkladu $Y = \overline{U}$, $P = H(U)$ a ptejme se, co v tomto případě znamená $Ch_P Y$ a zda je $P$ simpliciální. Řada matematiků (Brelot, Bauer, Gamelin, Rossi, Köhn, Sieveking, Boboc, Cornea, Effros, Kazdan, Bliedtner, Hansen a další — citace viz [2]) přispěli v posledních patnácti letech k zodpovězení těchto otázek. Nyní je známo, že $H(U)$ je vždy simpliciální ([2], 1975) — tím je zodpovězen delší dobu otevřený problém — a za dodatečných předpokladů (speciálně když je $\partial_i U$ zanedbatelná) je Choquetova hranice rovna množině regulárních bodů. Zejména je tomu tak např. pro Laplaceovu rovnici, obecněji pro eliptické rovnice, ale ne pro rovnici pro vedení tepla. Kromě toho je známa potenciálně teoretická charakteristika jak Choquetovy hranice, tak i (jednoznačně) určené míry reprezentující bod $y$ nesené Choquetovou hranicí.

Naším centrálním zájmem je však role Keldyšovy věty v teorii potenciálu, proto se k ní vraťme. Nechť $U$ má opět shora uvedené vlastnosti, $A$ je Keldyšův operátor na $U$ a $y \in U$. Je-li

$$Af(y) = \int f \, d\alpha_y, \ f \in C(\partial U) ,$$

je $\alpha_y$ podle podmínky $(\gamma)$ míra reprezentující bod $y$. Dá se dokázat (viz [2]), že $\alpha_y$ leží „mezi" mírou $v_y$ a harmonickou mírou $\mu_y$ v uspořádání indukovaném kuželem $W(U)$:

$$v_y(w) \leqq \alpha_y(w) \leqq \mu_y(w), \ w \in W(U) .$$

Předpokládejme nyní, že množina $\partial_i U$ je zanedbatelná. Potom je každý regulární bod též bodem Choquetovy hranice, a je tedy exponovaný, neboť $H(U)$ je simpliciální. To dává v klasickém případě právě Keldyšovo lemma. Za uvedených předpokladů platí podle [2] rovnost $\nu_y = \mu_y$ pro každé $y$, a $U$ je proto keldyšovská. Tím jsme se (pro klasický případ) vrátili ke Keldyšově větě.

Kdo je trochu více obeznámen s Keldyšovými výsledky v teorii potenciálu, ví, že jsme si vybrali jen jeden – možností bylo však více. Tím, že jsme se ho pokusili zasadit do celkového rámce, za který nám posloužila část historie teorie potenciálu, jsme sledovali určitý cíl – doufáme, že se nám podařilo ukázat, jak právě tento výsledek ovlivňoval práce v této disciplíně až do naší doby, tedy bezmála po čtyřicet let. A protože jsme začali Dirichletovou úlohou (1828), která reprezentuje problematiku intenzívně studovanou cca 150 let, je to z tohoto zorného úhlu výsledek mimořádně významný.

## Literatura


[1] H. Bauer: *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie.* Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[2] J. Bliedtner, W. Hansen: *Simplicial cones in potential theory.* Invent. Math. *29* (1975), 83–110.

[3] M. Brelot: *Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet.* J. Analyse Math. *8* (1960/61), 273–288.

[4] M. Brelot: *Les étapes et aspects multiples de la théorie du potentiel.* Enseignement Math. *8* (1972), 1–36.

[5] C. Constantinescu, A. Cornea: *Potential theory on harmonic spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[6] G. Choquet: *Lectures on analysis, vol. II.* W. A. Benjamin, INC., Reading, 1969.

[7] M. V. Keldyš: *O razrešimosti i ustojčivosti zadači Dirichle.* Uspěchi Mat. Nauk. *8* (1941), 171–292.

[8] M. V. Keldyš: *O zadače Dirichle.* Dokl. Akad. Nauk SSSR *32* (1941), 308–309.

[9] *Mstislav Vsevolodovič Keldyš (k šestidesatiletiju so dnja rožděnija).* Uspěchi Mat. Nauk *26* (1971), 3–14.

[10] J. Král, I. Netuka, J. Veselý: *Teorie potenciálu II, III, IV.* SPN, Praha, 1972, 1976, 1977.

[11] N. S. Landkof: *Osnovy sovremennoj teorii potenciala.* Nauka, Moskva, 1966.

[12] J. Lukeš: *Théorème de Keldych dans la théorie axiomatique de Bauer des fonctions harmoniques.* Czechoslovak Math. J. *24* (1974), 114–125.

[13] J. Lukeš: *Functional approach to the Brelot-Keldych theorem.* Czechoslovak Math. J. *27* (1977), 609–616.

[14] J. Lukeš, I. Netuka: *The Wiener type solution of the Dirichlet problem in potential theory.* Math. Ann. *224* (1976), 173–178.

[15] A. F. Monna: *Note sur le problème de Dirichlet.* Nieuw Arch. Wisk. *19* (1971), 58–64.

[16] R. R. Phelps: *Lectures on Choquet's theorem.* D. Van Nostrand Comp., INC., Princeton, 1966 (existuje ruský překlad).

[17] H. Schirmeier, U. Schirmeier: *Einige Bemerkungen über den Satz von Keldych.* Math. Ann. *236* (1978), 245–254.