

V. M. Buchštaber; Simon G. Gindikin  
Od Cavalieriho principu k tomografu

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 29 (1984), No. 4, 196--210

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137774>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1984

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Od Cavalieriho principu k tomografu

V. M. Buchštaber, S. G. Gindikin, Moskva

Viktor Matvějevič Buchštaber, kandidát fyzikálněmatematických věd je vedoucím vědeckým pracovníkem Všesvazového vědeckovýzkumného ústavu fyzikálnětechnických a radiotechnických měření Státního ústavu pro normy SSSR (Gosstandart). Pracuje v oboru numerických metod aplikované statistiky, teorie rozpoznávání obrazů a algebraické topologie. Je nositelem ceny Moskevské matematické společnosti.

Semjon Grigorjevič Gindikin, kandidát fyzikálněmatematických věd, je vedoucím vědeckým pracovníkem Lomonosovovy moskevské státní univerzity. Pracuje v oboru matematické fyziky, komplexní analýzy a teorie Lieových grup a je autorem knih: *Algebra logiky v zadačach*, Moskva 1972; *Razskazy o fizikach i matematikach*, Moskva 1981. V časopise „Priroda“ uveřejnil článek o Huygensovi (1979, č. 12). Je nositelem ceny Moskevské matematické společnosti.

(Podle redakční poznámky časopisu „Priroda“)

Často si neuvědomujeme, jak složitou úlohu každodenně řešíme, když si vytváříme trojrozměrné obrazy podle jejich dvourozměrných projekcí na sítnici oka. V poslední době se v souvislosti s problémem rozpoznávání obrazů objasnilo, jak delikátně při tom využíváme apriorních představ o geometrické struktuře zkoumaných objektů. Některými úlohami souvisejícími s danou problematikou se matematikové zabývali už od dob G. Mongea, tvůrce deskriptivní geometrie. Pouze velmi silné předpoklady o pravidelnosti zobrazovaných objektů (jako např., že se povrch tělesa může skládat pouze z kousků rovinných, válcových, kuželových, resp. kulových ploch) dovolují jednoznačně rekonstruovat stereometrický obraz na základě několika (obyčejně tří) projekcí.

Poměrně často však nemůžeme objekt považovat za dostatečně pravidelný a nemáme dost zkušeností k vytvoření zdůvodněných představ o jeho struktuře. V takové situaci je např. rentgenolog, když se snaží na základě jedné nebo nevelkého počtu projekcí rozeznat nádor na plicích nebo prohlubeň jizvy na dvanácterníku. Předností zkušeného rentgenologa nepochybně je, že při řešení této úlohy může využít svých představ o tom, jaký výsledek lze v každém konkrétním případě očekávat. Je proto zcela přirozené, že právě v rentgenologii vznikla otázka, zda nelze snížit požadovanou kvalifikaci specialisty tím, že podstatně zvětšíme počet využívaných projekcí. Na druhé straně se velký počet projekcí dá pouhým okem zpracovat velmi obtížně, a proto vzniká úloha o vytvoření trojrozměrného obrazu na základě velkého počtu projekcí (zhruba řečeno podle všech projekcí). Tuto úlohu v současné době úspěšně řeší počítačové tomografy, které se staly neoddělitelnou součástí vybavení předních světových klinik. O tom bylo napsáno mnoho popularizačních článků, v nichž se vysvětluje, jak se zkoumaný objekt „prosvěcuje“ paprsky ve všech směrech a jak počítač na základě velikosti jejich absorpce (pohlcování) rekonstruuje obraz. Málokde však najdeme vysvětlení, jak počítač tuto

---

V. M. BUCHŠTABER, S. G. GINDIKIN: *Ot principa Kaval'eri k tomografu*, Priroda 1983, č. 6, str. 12–24. Vyd. „Nauka“, Moskva. Přeložil Jiří KOPÁČEK. Obrázky pořídila redakce podle ruského originálu.

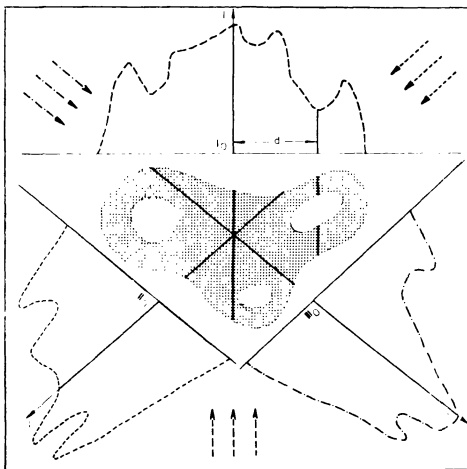
elementárně formulovanou úlohu řeší. Její řešení zdaleka není elementární jak co do užitého algoritmu, tak co do jeho numerické realizace. Touto úlohou a jejím místem v matematice se chceme v našem článku zabývat především.

### Formulace matematické úlohy

Začít musíme tím, že v rentgenové tomografii se představa o neviditelné struktuře objektu získává ne jako stereometrický obraz, ale jako reprezentativní soubor rovinných řezů, tj. obrázků, které bychom uviděli, kdybychom zkoumaný objekt rozřízli různými rovinami. Přitom se předpokládá, že dochází pouze k absorpci paprsků a nikoli k jejich ohybu, jakož i že koeficient absorpce  $f(x_1, x_2)$  jako funkce bodu  $x = (x_1, x_2)$  charakterizuje hledaný obraz. Pro určitost zatím předpokládejme, že  $f(x_1, x_2)$  je zadána na jednotkovém čtverci  $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$ .

Velikost absorpce na přímočarém paprsku je dána jistým integrálem podél tohoto paprsku. Přesná matematická formulace úlohy je tato: Určete funkci  $f(x_1, x_2)$  na čtverci, znáte-li její integrály podél všech přímek, které čtverec protínají. Taková úloha má řešení, a toto řešení lze dokonce vyjádřit přehlednou formulí, což ji odlišuje prakticky od všech analogických „inverzních“ úloh (např. od inverzní úlohy geofyziky). Při technickém řešení se samozřejmě musíme spokojit pouze s přibližným vzorcem, který využívá ne všechny přímky, ale pouze jejich konečný počet. Budeme se nejdříve zabývat přesným řešením naší úlohy.

Je-li situace „kontrastní“, máme tento její speciální případ: za  $f$  bereme charakteristickou funkci nějakého obrazce (množiny)  $D$ , tj. funkci rovnou jedné v bodech množiny  $D$  a nule vně  $D$ . Jinak řečeno, na čtverci máme zadán libovolný obrazec s „dírami“ (neboli ementálský sýr, jak matematikové někdy říkají). Pro každou přímku  $l$  nechť známe součet  $s(l)$  délek všech úseček, v nichž  $l$  protíná  $D$ . Ptáme se, zdali je možné rekonstruovat množinu  $D$  na základě znalosti funkce  $s(l)$  a jakým způsobem toho lze dosáhnout. Jak je vidět, je formulace úlohy zcela elementární a může nás překvapit, že její řešení zdaleka není elementární a navíc to není řešení geometrické, ale analytické.



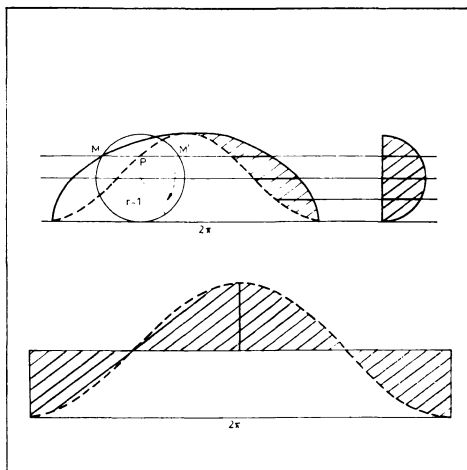
Funkce  $s(p)$  obrazce  $D$  (čárkované, čerchované, tečkované čáry). Obrazec  $D$  protínáme ve třech zvolených směrech (I, II, III) soustavou rovnoběžných přímek. Pro každý směr definujeme funkci  $s(p)$  přiřazující každé přímce vzdálené o  $p$  od libovolně (ale pevně) zvoleného bodu  $O$  součet délek úseček, ve kterých tato přímka protíná  $D$ . Je zřejmé, že pomocí pouze těchto funkcí není možné si udělat představu o obrazci  $D$ .

## Cavalieriho „nedělitelné části“

Takto formulovanou úlohou se matematikové začali zabývat teprve poměrně nedávno, až v tomto století. Práce, které s ní v jistém smyslu souvisejí, jsou však mnohem staršího data. Především je třeba připomenout B. Cavalieriho (1591–1647). Tento mnich, originální vědec, který měl blízko ke Galileovi, byl jednou z klíčových postav, které připravily cestu k vytvoření infinitezimálního počtu. Zabýval se výpočtem plošného obsahu „křivých“ obrazců a objemů „křivých“ těles, a přestože neměl k dispozici matematický jazyk adekvátní této úloze, snažil se vypracovat efektivní a dostatečně korektní numerické postupy. Obrazec, jehož plošný obsah se měl určit, si Cavalieri představoval složený z rovnoběžných úseček – „nedělitelných částí“ (asociace s atomistickým světovým názorem jsou zřejmé). Postuloval, že plošný obsah je určen délkami těchto úseček  $s(p)$  (protože jde o rovnoběžné úsečky, je možné je parametrizovat jedním číslem – parametrem  $p$ ). Tento postulát je znám pod jménem Cavalieriho princip. Různé obrazce mohou mít stejnou funkci  $s(p)$  (např. trojúhelníky se stejnými základnami a stejnými výškami) a potom mají stejné plošné obsahy. Cavalieri a jeho následovníci s obrovskou vynalézavostí transformovali obrazce, aby se přitom nezměnila funkce  $s(p)$ . (Nezapomněme na to, že výběr směru soustavy rovnoběžných příemek je libovolný, a toho lze velmi efektivně využít.) Počínaje určením plošného obsahu různých parabolických a hyperbolických úsečí, byly vypočteny plošné obsahy nejrozmanitějších obrazců, a zdálo se, že možnosti této metody jsou nevyčerpatelné.

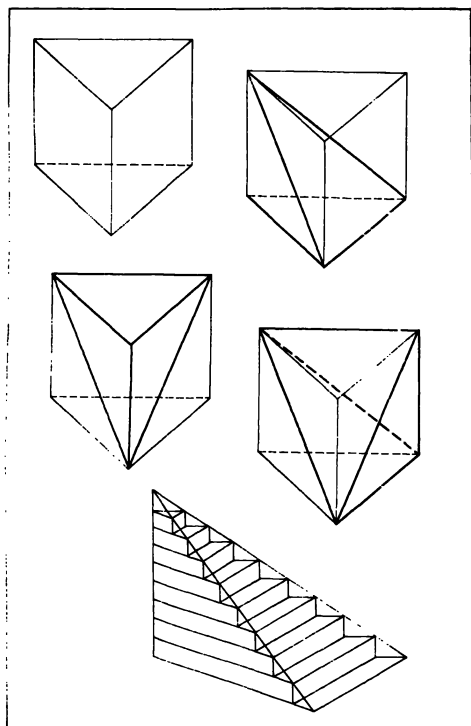
Ve stereometrické variantě Cavalieriho principu se trojrozměrnému tělesu přiřazují

Ilustrace jednoho z nejelegantnějších použití Cavalieriho metody patřící Robervalovi (pseudonym J. Pearsona) (1602–1672). Určuje se plošný obsah obrazce pod jedním obloukem cykloidy (na obrázku je vyznačena silnou čarou). Cykloida je křivka, kterou opisuje pevný bod  $M$  kružnice, která se kutálí bez klouzání po vodorovné přímce. (Na obrázku je nakreslena kružnice s poloměrem rovným jedné.) Pro výpočet zmíněného plošného obsahu se provádí tato pomocná konstrukce: pod obloukem cykloidy se na každé vodorovné přímce sestrojuje bod  $P$  – střed úsečky  $MM'$ , kde  $M'$  je druhý průsečík vytvářející kružnice se zvolenou vodorovnou přímkou. Později se zjistilo, že body  $P$  opisují sinusoidu (je vyznačena čárkovaně). Tady se sinusoida poprvé objevila v matematice! Roberval ji nazval „průvodkyní“ cykloidy. Plošný obsah obrazce pod sinusoidou se spočte snadno – je roven plošnému obsahu obdélníka, který je roven  $2\pi$  (viz dolejší obrázek). Zbylé části – tzv. Robervalovy lístky – jsou podle Cavalieriho principu stejně velké jako vytvářející kruh. Hledaný plošný obsah je proto roven  $2\pi + \pi = 3\pi$ .



plošné obsahy  $\tau(p)$  jeho řezů soustavou rovnoběžných rovin a tvrdí se, že tyto obsahy zcela určují jeho objem. Odtud například plyne, že trojboké jehlany, které mají stejně velkou základnu a stejnou výšku mají stejný objem.\*) Důkaz tohoto tvrzení pomocí známých „čertových schodů“ byl vždy nepříjemným místem ve středoškolských učebnicích stereometrie. Velmi efektivním se ukázal návrh přijmout ve středoškolské teorii objemů za axióm velmi výhodný Cavalieriho princip. Umožňuje to nejen objasnit všechny otázky týkající se objemů jehlanů, ale i jednoduše bez složitých limitních přechodů odvodit vzorce pro objem rozmanitých „okrouhlých“ těles. Úplný výklad příslušných úvah býval uváděn *petitem* ve známé učebnici A. P. Kiseleva.

Pro nás je podstatné, že Cavalieri jako první přiřadil rovinnému obrazci délky jeho průřezů se všemi přímkami a trojrozměrnému tělesu plošné obsahy jeho rovinných řezů. Odtud je už jen krok k tomu, abychom libovolné funkci dvou, popř. tří proměnných přiřadili její integrály podél přímek, rovin. V podstatě to už bylo to, co dnes nazýváme Radonovou transformací (o níž bude řeč dále). Cavalieri však použil tuto transfor-

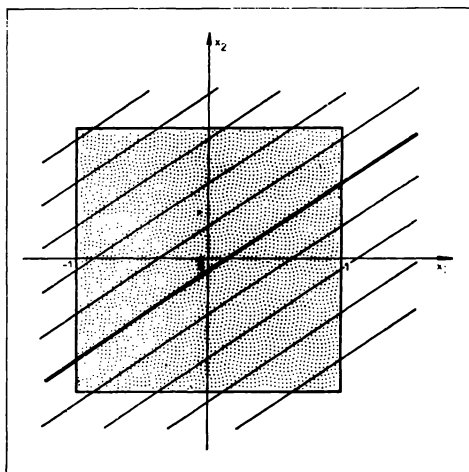
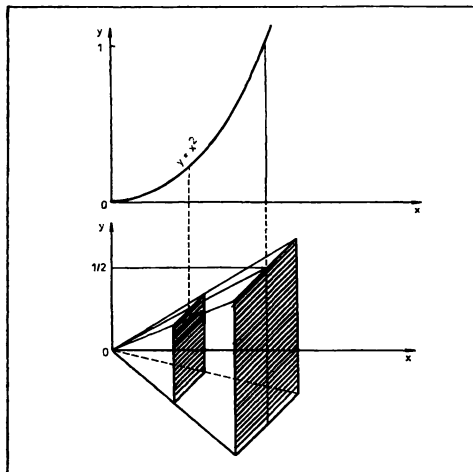


V elementární geometrii se vzorec pro objem trojbokého jehlanu odvozuje takto: trojboký hranol se rozdělí na tři trojboké jehlany se stejnými základnami a stejnými výškami (nahore). Tyto jehlany mají stejný objem, což ovšem bez limitního přechodu pouze prostředky elementární matematiky dokázat nelze. Dokazuje se to pomocí aproximace jehlanu tělesy tvořenými zvětšujícím se počtem hranolů (dole). Poslední konstrukce se často nazývá „čertovými schody“. Užijeme-li však Cavalieriho princip, je výše dokazované tvrzení zřejmé.

maci pouze ke studiu plošných obsahů v rovině a objemů v prostoru. Problém rekonstrukce obrazce na základě délek jeho řezů přímkami tehdy ještě neuzrál. A když inte-

\*) Toto odvození na rozdíl od jeho planimetrické analogie není triviální v důsledku toho, že trojboký jehlan není obecně možné rozdělit na části, z nichž je možno sestavit jiný trojboký jehlan se stejnou výškou a stejně velkou základnou.

grální počet umožnil automaticky řešit úlohy, které se pomocí Cavalieriho principu daly řešit pouze s notnou dávkou vynálezavosti, přešel Cavalieriho princip mezi historické texty a pouze ojediněle do středoškolských učebnic.



Plošný obsah  $S$  obrazce pod křivkou  $y = x^2$  (parabolický trojúhelník) se „skládá“ podle Cavalieriho principu z úseček délky  $x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Na druhé straně objem čtyřbokého jehlanu, jehož základna je jednotkový čtverec a výška je rovná jedné, se „skládá“ ze svislých čtverců, jejichž plošné obsahy jsou též rovny  $x^2$ . Za předpokladu, že plošný obsah parabolického trojúhelníka je roven objemu zmíněného jehlanu, dostal Cavalieri správný výsledek:  $S = 1/3$ . (Tyto úvahy lze provést přesně.)

Racionální přímka  $2x_1 - 3x_2 = 0,25$  (na obrázku je vyznačena silnější čarou) a přímky s ní přibližně  $2x_1 - 3x_2 = 0,25 + n$  ve čtverci  $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$ . Taková množina přímek má pozoruhodnou vlastnost: splením vyobrazeného čtverce podél protějších stran dostaneme anuloid (torus), na kterém úsečky (v nichž uvedené přímky protínají čtverec) vytvoří souvislou uzavřenou křivku.

## Radonova transformace a transformace k ní inverzní

Úloha určit funkci, známe-li její integrály podél všech přímek, byla zformulována a řešena v r. 1917 Johannem Karlem Augustem Radonem (1887–1956), známým rakouským matematikem, jehož jméno nese v matematice nejen zobrazení, o němž bude řeč dále, ale i jistý speciální druh míry a integrálu.

Nechť je dána funkce dvou proměnných  $f(x_1, x_2)$ . V rovině budeme zadávat přímky rovnicemi  $k \cdot x = p$ , kde  $k = (k_1, k_2)$ ,  $k_1, k_2, p$  jsou čísla a  $k \cdot x = k_1 x_1 + k_2 x_2$ . Přímka je určena trojicí čísel  $(k, p) = (k_1, k_2, p)$ , přičemž trojice  $(k, p)$  a  $(ck, cp)$ , které se liší pouze číselným součinitelem  $c$ , odpovídají téže přímce. Označíme  $Rf(k, p)$  integrál

funkce  $f$  podél přímky  $k.x = p$ . Zobrazení  $R : f \rightarrow Rf$ , přiřazující funkci  $f$  funkci  $Rf$  nazýváme Radonovou transformací.\*)

Úloha záleží v nalezení inverzního zobrazení k  $R$ , tj. v určení funkce  $f$ , známe-li funkci  $Rf$ . Ve speciálním případě, kdy  $f = f_D$  je charakteristická funkce rovinného obrazce  $D$  rovná nule vně  $D$  a jedné na  $D$ , dostáváme úlohu o určení  $D$  pomocí délek všech jeho řezů. Radon našel explicitní vzorec určující  $f$  pomocí  $Rf$ : hodnota funkce  $f$  v bodě  $x = (x_1, x_2)$  je rovna integrálu (přes množinu všech přímek) ze součinu  $Rf$  a funkce  $(p - k.x)^{-2}$ . Funkce  $(p - k.x)^{-2}$ , která se nazývá váhovou funkcí (nebo prostě vahou), je rovná nekonečnu pro  $p = k.x$ , tj. na přímkách procházejících bodem  $x = (x_1, x_2)$ . Standardními postupy lze však takovému integrálu dát rozumný smysl. Dosadíme-li do Radonovy inverzní formule funkci  $Rf$  vyjádřenou pomocí funkce  $f$ , obdržíme integrál z funkce  $f$ , v němž se každá hodnota  $f(x')$  objeví nekonečně mnohokrát v integrálech podél přímek procházejících bodem  $x'$ . Váhová funkce způsobí, že celkový příspěvek hodnot  $f(x')$  k integrálu je nulový pro každé  $x'$  různé od bodu  $x$ , v němž rekonstruujeme hodnotu funkce  $f$ , a zůstane jen příspěvek hodnoty  $f(x)$ .

Tyto úvahy si můžeme ozřejmit pomocí následující analogie. Nechť funkce  $f$  je definována v konečně mnoha bodech v rovině. Potom integrál podle každé přímky je třeba nahradit součtem hodnot  $y_i = f(x_i)$  v těch bodech  $x_i$  z definičního oboru funkce  $f$ , které leží na této přímce. Úloha určit funkci  $f$  se redukuje na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Přitom volbě váhové funkce odpovídá výběr takové lineární kombinace rovnic, která obsahuje pouze  $y^* = f(x^*)$ , kde  $x^*$  je vybraný bod z definičního oboru funkce  $f$ ; hodnoty  $y_i$  odpovídající ostatním bodům se navzájem zruší (analogie eliminační metody řešení soustavy lineárních algebraických rovnic). Připomeňme, že takové diskrétní analogie Radonovy inverzní formule se užívají při některých metodách její numerické realizace.

Radonovu transformaci je možné definovat i pro funkce  $n$  proměnných ( $n > 2$ ). Např. pro  $n = 3$  funkci  $f(x_1, x_2, x_3)$  přiřadíme její integrály přes roviny  $k.x = p$ , kde  $k.x = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ . Pro  $n = 3$  je inverzní formule jednodušší než pro  $n = 2$ . Abychom určili  $f$  v bodě  $x$ , je třeba vzít druhou derivaci  $Rf$  podle  $p$  a integrovat ji (přesněji vzít její průměr) přes množinu všech rovin procházejících bodem  $x$ . Proto k určení hodnoty  $f$  v bodě  $x$  stačí v případě  $n = 3$  znát integrály funkce  $f$  pouze přes roviny blízké k bodu  $x$ , zatímco v případě  $n = 2$  jsme k tomu potřebovali znát integrály obecně přes všechny přímky. Proto řekneme, že pro  $n = 3$  má inverzní formule lokální charakter, zatímco pro  $n = 2$  je nelokální. (Poznamenejme, že inverzní formule je lokální pro všechna  $n$  lichá a nelokální pro všechna  $n$  sudá.) Nelokální charakter inverzní formule vede k mnoha komplikacím při její numerické realizaci v počítačovém tomografu.

Vzniká přirozená otázka, zda je uvedená inverzní formule jediná možná, nebo zda existují i jiné vzorce umožňující určit  $f$  pomocí jejích integrálů  $Rf$ . Je možné ukázat, že pro funkce  $f$ , definované v celé rovině, je taková formule jediná. Na druhé straně, jak

\*) Podrobněji se lze o Radonově transformaci dočíst např. v knize I. M. GELFAND, M. I. GRAJEV, N. J. VILENKIN: *Integrovaná geometrie a svjazannyje s něj voprosy teorij predstavlenij*. Obobščennyje funkcion, vyp. 5, Moskva, 1962.

ukázal jeden z autorů\*), v případě funkcí definovaných pouze na čtverci  $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$  je možné užít jiné inverzní formule. Při jejím užití za prvé není potřeba znát integrály přes všechny přímky a za druhé integrování se nahrazuje sčítáním nekonečné řady. Nejprve popíšeme přímky, o které nám půjde. Budeme nazývat přímku  $k \cdot x = p$  racionální, je-li  $(k_1, k_2)$  dvojice nesoudělných celých čísel. Každé racionální přímce přiřadíme přímky s rovnicemi  $k \cdot x = p + n$ , kde  $n$  je celé. Takové přímky nazveme příbuznými. Racionální přímka protínající čtverec má  $|k_1| + |k_2|$  příbuzných přímek, které také protínají čtverec. Označíme-li  $C$  integrál z  $f$  přes čtverec (je-li  $f$  charakteristická funkce obrazce  $D$ , je  $C$  rovno plošnému obsahu tohoto obrazce), pak hledanou funkci na čtverci je možno najít podle vzorce

$$f(x) = C + \sum (k_1^2 + k_2^2)^{-1/2} \cdot (Rf(k, k \cdot x + n) - C),$$

kde se sčítá přes všechny dvojice  $(k_1, k_2)$  celých nesoudělných čísel a přes všechna  $n$ , tj. přes všechny racionální přímky procházející bodem  $x$  a s nimi příbuzné přímky. Každému  $k$  v tomto součtu odpovídá  $|k_1| + |k_2| + 1$  sčítanců. Nelokální charakter tohoto vzorce se projevuje v tom, že se sčítá nejen přes racionální přímky procházející bodem  $x$ , ale i přes jim příbuzné přímky. Je-li  $f$  dostatečně hladká (má dostatečný počet derivací), zmenšují se sčítance s růstem  $|k_1| + |k_2|$ . V současné době se konstruují numerické postupy založené na této formuli (ve spolupráci s N. D. Vveděnskou).

### Rovinné vlny

Mnohé vlastnosti Radonovy transformace mají neformální interpretaci v teorii vln. Připomeňme, že dvourozměrný vlnový proces (např. kmity membrány) se dá popsat řešením vlnové rovnice

$$\partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2,$$

kde  $u$  je funkce času  $t$  a souřadnic  $x_1, x_2$ .

Existuje jednoduchá metoda, umožňující napsat mnoho řešení této rovnice: je-li  $\psi(y)$  libovolná funkce jedné proměnné a  $k = (k_1, k_2)$  libovolný pevně zvolný vektor ( $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$ ), je funkce  $u(x, t) = \psi(k \cdot x - |k| t)$  řešením uvedené vlnové rovnice (což se ověří přímým výpočtem). Taková řešení se nazývají *rovinnými vlnami*. V počátečním čase  $t = 0$  máme funkci  $u(x, 0) = \psi(k \cdot x)$ , která je konstantní na každé přímce  $k \cdot x = p$  dané soustavy rovnoběžných přímek. Tato vlastnost zůstává zachována v libovolném časovém okamžiku, pouze hodnoty funkce se s jednotkovou rychlostí přesunují podél každé přímky dané soustavy rovnoběžných přímek. Protože časový vývoj rovinných vln má tak jednoduché vyjádření, je užitečné zapsat libovolný vlnový proces ve tvaru superpozice rovinných vln. Vyjádříme-li  $u(x, 0)$  jako superpozici rovinných vln, můžeme v každém čase  $t$  zjistit, jak se změnila každá vlna z rozkladu  $u(x, 0)$  a  $u(x, t)$  určit jako superpozici takto nalezených rovinných vln. Na tomto principu jsou založeny mnohé metody řešení vlnové rovnice. Např. při Fourierově metodě užíváme rozkladu na harmonické vlny  $\exp(ik \cdot x)$ .

\*) S. G. GINDIKIN; Sib. mat. žurn., 1966, Vol. 7, N° 3, str. 699.



Často je výhodné, aby rozklad obsahoval „co nejméně“ rovinných vln. Ukazuje se, že pro funkci  $f(x) = u(x, 0)$  můžeme sestavit rovinné vlny  $\varphi(k, k.x)$  s vlastností, že  $\varphi(ck, ck.x) = \varphi(k, k.x)$  (harmonické vlny takovou vlastnost nemají). Potom pro každé  $x$  dostaneme  $f(x)$  integrací funkce  $\varphi(k, k.x)$  přes jednotkovou kružnici  $k_1^2 + k_2^2 = 1$ . Tento postup je výhodnější než integrace přes celou rovinu  $k_1, k_2$ , jak tomu je při Fourierově metodě. Takové vlny se samozřejmě vyjadřují pomocí integrálů podél přímek  $k.x = p$ , tj. pomocí Radonovy transformace  $Rf(k, p)$ . Příslušné vyjádření dostaneme přímo užitím Radonovy inverzní formule:

$$\varphi(k, p) = \int Rf(k, q) (q - p)^{-2} dq .$$

(Jak jsme se již zmínili, existuje standardní způsob, jak obejít singularitu integrované funkce pro  $q = p$ .)

Tyto úvahy se dají doslovně zopakovat pro vlnovou rovnici v trojrozměrném prostoru. Rovinné vlny  $\psi(k.x)$  jsou konstantní na každé rovině z množiny rovnoběžných rovin  $k.x = p$  ( $k.x = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ ), a funkci  $f(x) = u(x, 0)$  dostaneme jako průměr přes jednotkovou sféru  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$  rovinných vln  $\varphi(k, k.x)$ , kde

$$\varphi(k, p) = d^2 Rf(k, p) / dp^2 .$$

Jednodušší tvar  $\varphi$  pro  $n = 3$  je důsledkem toho, že pro  $n = 3$  je jednodušší inverzní Radonova transformace. Hodnota  $\varphi$  na rovině  $k.x = p$  je proto určena hodnotami  $f$  pouze v úzkém pásu okolo této roviny.

Lokální charakter inverzní formule pro  $n = 3$  a nelokální pro  $n = 2$  mají principiální důsledky v teorii vln. Jestliže v počátečním okamžiku  $t = 0$  k počátečnímu stavu přidáme poruchu, soustředěnou v malém okolí bodu  $x$ , pak se tato porucha bude šířit jako sférická vlna se středem v bodě  $x$ . V okamžiku  $t$  se projeví v bodech vzdálených o  $t$  od bodu  $x$  (připomínáme znovu, že rychlost šíření je rovna jedné). Ve vzdálenějších bodech se tato porucha neprojeví, což znamená, že vlna má ostře vyjádřený přední okraj (čelo vlny); to platí v případě libovolné dimenze. Situace v bodech méně vzdálených než  $t$  je rozdílná pro  $n = 3$  a  $n = 2$ . V trojrozměrném případě se ani v těchto bodech už porucha projevovat nebude: vlna přešla – má ostrý zadní okraj (někdy se říká, že nedochází k difúzi vln). To souvisí s tím, že počáteční porucha při  $t = 0$  mění komponenty  $\varphi(k, p)$  v rozkladu  $u(x, 0)$  pouze v malém okolí  $p = k.x$ . V případě  $n = 2$  však tato porucha mění vlny  $\varphi(k, p)$  pro všechna  $p$ , a tedy se projeví ve všech bodech vzdálených od  $x$  méně než  $t$ . Ve dvourozměrném případě neexistuje ostrý zadní okraj vlny.

Všechny tyto rozdíly se projevují v klasických vzorcích pro řešení vlnové rovnice. Mnohé vlastnosti Radonovy transformace jsou už v nich implicitně obsaženy.

## Z historie tomografie

Bylo zapotřebí poměrně dosti času, než se Radonova transformace začala používat v medicíně, v tzv. počítačové tomografii. Sám termín „tomografie“ (popis řezů) je podstatně staršího data. Výše zmíněné nedostatky rentgenografie jako diagnostické metody byly zřejmé od jejích prvních kroků (rentgenografie vznikla v r. 1896). Tyto potíže jsou

spojeny s potížemi při odhadu hloubky viděného obrazu, s překrýváním se různých struktur na rentgenovém snímku. Odtud vznikla myšlenka, jak tyto nedostatky odstranit: je třeba zařídit, aby se jedna vybraná rovina zobrazovala ostře a ostatní rozmazaně. Bylo navrženo, aby se zdroj záření a detektor (rentgenový film) pohybovaly synchronizovaně opačnými směry. Jsou-li velikosti obou rychlostí stejné, pak do zvoleného bodu filmu přicházejí v různých časových okamžicích různé paprsky, které však procházejí týmž bodem v rovině stejně vzdálené od zdroje i detektoru. Proto se projekce bodů této roviny vzhledem k filmu nepohybují, zatímco projekce bodů ostatních rovin se pohybují: dostáváme ostrý obraz vybrané roviny a neostrý obraz všech ostatních. Měníme-li poměr mezi rychlostmi pohybu zdroje a detektoru, můžeme dostat ostrý obraz kterékoliv jiné roviny. Tato myšlenka byla patentována v r. 1921 (A. Bocage, Francie). Ale teprve po deseti letech se začaly na klinikách objevovat přístroje provádějící takovéto tomografické snímkování. Na konci třicátých let byly sestrojeny první sovětské tomografy.

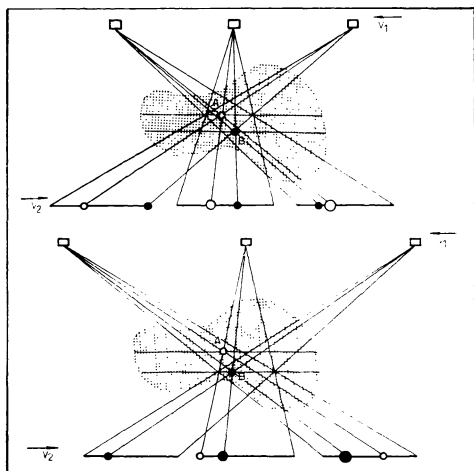


Schéma Bocageova tomografu. Zdroj záření se pohybuje v rovině kolmé k rovině obrázku s konstantní rychlostí  $v_1$ . V rovině rovnoběžné s rovinou, v níž se pohybuje zdroj, se v opačném směru pohybuje detektor-film s konstantní rychlostí  $v_2$ . V závislosti na poměru rychlostí  $v_1$  a  $v_2$  dostáváme na filmu ostré zobrazení různých řezů objektu rovinami rovnoběžnými s rovinou pohybujícího se zdroje. Na obrázku jsou zachyceny dva případy:  $v_1/v_2 = 1$  (nahore) a  $v_1/v_2 = 7/5$  (dole). V prvním případě obraz bodu  $A$  v rovině stejně vzdálené od rovin zdroje a detektoru je stále v jednom místě filmu (nezávisle na poloze zdroje). Proto se tento obraz při pohybu filmu stále zvětšuje (na obrázku je to znázorněno zvětšováním prázdného kroužku). Na druhé straně obraz bodu  $B$  v rovině, která dělí vzdálenost mezi oběma rovinami v poměru  $7/5$ , mění své místo na filmu, a proto je jeho obraz rozmazaný. Ve druhém případě si body  $A$  a  $B$  vymění úlohy. Tomografická seance proto dává ostrý obraz jednoho vybraného řezu tělesa a rozmazaný obraz všech ostatních řezů.

Jakou úlohu řeší popsaný tomografický přístroj z matematického hlediska? Do každého bodu  $A^*$  přichází v každém časovém okamžiku integrál  $Rf$  koeficientu absorpce  $f$  podél paprsku, spojujícího bod  $A^*$  se zdrojem záření. Výsledný obraz v bodě  $A^*$  odpovídá střední hodnotě veličiny  $Rf$  vypočtené pro všechny přímky procházející bodem  $A$  vybrané roviny (tento bod je jednoznačně určen bodem  $A^*$ ). Připomeňme, že výběr roviny je určen poměrem mezi rychlostmi zdroje a detektoru. Je-li  $F$  tato střední hodnota, pak se předpokládá (což se částečně potvrdilo), že podle  $F$  je možno určit  $f$  na vybrané rovině.

Srovnání těchto úvah s Radonovými výsledky je poučné. Bocage, řídě se inženýrskou logikou, pochopil, že hodnoty  $f$  lze počítat jako průměry integrálů  $Rf$ , ale nesnažil se najít správnou váhovou funkci pro tyto průměry. Spokojil se s intuitivními úvahami o stejnoměrném průměru veličiny  $Rf$  přes přímky procházející bodem  $A$  ve zvolené rovině. Pro realizaci své myšlenky navrhl důmyslný analogový přístroj. Ale i kdyby byl znal Radonovu formuli (v té době již byla známa), nemohl by ji realizovat. K tomu bylo nutné spojit rentgen s počítačem, což se dalo uskutečnit až za více než 30 let.

## Rekonstruktivní tomografie v astronomii

První praktické aplikace Radonovy formule nesouvisejí s medicínou, ale s radio-astronomií. Jde o práce A. Bracewella, v nichž bylo studováno ultravysokofrekvenční sluneční záření. Ultravysokofrekvenční antény, jichž Bracewell používal, bylo možno zaostřit na velmi úzký pás slunečního povrchu, a tím bylo možné měřit celkové záření takového pásu. Považujeme-li pásy za dostatečně úzké, pak (v už zavedených označeních) můžeme říci, že při skanování pásu měříme  $Rf(k, p)$ , kde směr  $k$  je pevný. V důsledku zemské rotace se orientace pásu v prostoru mění a dostáváme  $Rf(k, p)$  pro různé směry  $k$ . Pomocí Radonovy transformace Bracewell ze souboru čísel  $Rf$  určoval funkci  $f$  – rozložení jasu Slunce v ultravysokofrekvenčním pásmu.

Abyste zjistil, nakolik je jeho metoda korektní, zkoumal Bracewell spolu s A. Riddlem během března 1961 analogickým způsobem pole záření Měsíce pomocí Stanfordského interferometru. Za tuto dobu dostali výsledky pro 14 úhlových orientací, což stačilo k sestrojení mapy intenzity záření. Výsledky bylo možné srovnat s výsledky pozorování Měsíce pomocí úzce směřované antény s vysokou rozlišovací schopností. Bracewellovy a Riddleovy výsledky sice nebyly tak kvalitní, nicméně v podstatě adekvátně rekonstruovaly situaci.

Všimněme si ještě metody sestrojení mapy reflexní schopnosti Měsíce v oblasti poměrně dlouhých vln. Protože Měsíc vidíme pod úhlem  $30'$ , je k tomu potřeba radiolokační soustava s úhlovou rozlišovací schopností méně než  $1'$ . To by znamenalo, že by k tomu bylo zapotřebí antény s charakteristickými rozměry řádově několik kilometrů. Přitom metoda založená na dopplerovské tomografii umožňuje použití mnohem slabších radiolokačních systémů. Měsíc se ozařuje spojitým signálem a pozoruje se odražené záření na různých dopplerovských frekvencích.

Různé úseky frekvencí odpovídají různým pásům povrchu Měsíce rovnoběžným okamžité zdánlivé ose rotace Měsíce. Měříme proto hodnoty funkce  $Rf$ , kde  $f$  je rozložení reflexní schopnosti Měsíce. V některých dnech se osa otočí za dobu od východu do západu o  $180^\circ$  (díky tomu je Měsíc jediným objektem, na nějž lze tuto metodu použít). Můžeme proto získat dostatečné množství informace k tomu, abychom pomocí Radonovy inverzní formule mohli rekonstruovat funkci  $f$ .

## Počítačová tomografie v lékařství

Na začátku šedesátých let pronikla myšlenka určit funkci  $f$  pomocí jejích integrálů, tj. pomocí funkce  $Rf$  i do lékařské vědy, především do radiologie. Řadou odborníků byla „znovu objevena“ Radonova inverzní formule\*) a byly sestrojeny první přístroje pro tomografickou rekonstrukci obrazu. Vědci narazili na vážné inženýrské obtíže související s konstruováním skanerů (zařízení pro rychlé shromažďování výsledků rentgenového prosvěcování) a s jejich napojením na elektronické počítače. Od prvního pokusu k prvnímu sériově vyrobenému tomografu uplynulo více než 10 let. Např. už v r. 1963 D. Kuhl se spolupracovníky z pensylvánské univerzity sestrojili zařízení na skanování pacienta při radiologických vyšetřeních. A první klinicky použitelný počítačový tomograf se objevil v r. 1970. Bylo to zařízení na skanování hlavy napojené na počítač. Tomograf byl sestrojen G. Hounsfieldem v laboratořích firmy EMI\*\*). V r. 1971 byl instalován v nemocnici a v r. 1972 v Anglii patentován.\*\*\*) Na výstavě „Zdravotní péče 74“ byl už vystavován sériově vyrobený tomograf EMI-Scanner. V r. 1974 se objevily tomografy umožňující diagnostické vyšetření celého lidského těla. Byla tak vyřešena složitá technická úloha, protože zvětšování průměru skaneru vede k principiálním obtížím. Začala éra počítačové tomografie.\*\*\*\*)

V krátkém čase byl ve světě vybudován průmysl na výrobu tomografů; v současné době si navzájem konkurují téměř 20 společností. Jsou mezi nimi EMI (Anglie), CGR (Francie), General Electric (USA), Siemens (NSR) atd. V SSSR byl zkonstruován lékařský tomograf (SRT-1000) ve Vsesvazovém vědeckovýzkumném ústavu kabelového průmyslu. Je určen pro vyšetřování mozku.

Za posledních deset let bylo zkonstruováno již několik generací rentgenových tomografů, které se liší především konstrukcí skanerů a také tím, že první tomografy byly napojovány na univerzální počítače, zatímco v novějších se užívá speciálních procesorů. To však neznamená, že by novější typy nahrazovaly staré, protože zvětšení rychlosti shromažďování informace vede ke ztrátě přesnosti měření. Typ tomografu se volí podle konkrétní lékařské úlohy, pro niž byl zkonstruován.

Nejdůležitějšími parametry tomografů jsou rozlišovací schopnost a samozřejmě rychlost vytváření obrazů. Tato rychlost vzrostla natolik, že tomograf vydává tomogramy v reálném čase: lékař začíná dostávat informace prakticky okamžitě po zapnutí tomografu. To je věc zásadního významu, neboť pouze ona umožňuje aktivně ovlivňovat výběr dalších rovinných řezů. Není už nereálné tomografovat orgány v pohybu, např. pracující srdce. V tomto případě nemá smysl snímat různé řezy postupně; trvá-li snímek každého řezu asi 5 sekund, nemáme ze stovky postupně získaných řezů naději sestrojit rozumný jednotný obraz, protože během příslušných 8 minut se rozměry srdce budou

\*) Viz např. A. M. CORMACK, J. Appl. Phys., 1963, V. 34, N° 9, p. 2722.

\*\*\*) Je zajímavé, že firma EMI je světoznámá firma vyrábějící vysoce kvalitní gramodesky.

\*\*\*\*) G. N. HOUNSFIELD: *A method and apparatus for examination of a body by radiation, such as X-ray or gamma radiation*. The patent office, London, Patent specification 1283915, 1972.

\*\*\*\*\*) A. CORMACK a G. HOUNSFIELD dostali za své práce v oblasti lékařských věd Nobelovu cenu v r. 1979. Viz P. V. VLASOV, N. K. SVIRIDOV: *Laureaty Nobelevskoj premii 1978. Po medicině — G. N. Hounsfield a A. M. Cormack*. „Priroda“, 1980, N° 1, s. 91.

podstatně měnit. Je třeba všechny řezy snímat zároveň a pak z nich sestavit stereo-  
metrický obraz. Je zřejmé, že k tomu je zapotřebí přístroj obrovských rozměrů. Takový  
přístroj, nazvaný dynamickým prostorovým rekonstruktorem, byl sestaven na klinice  
ve městě Mayo (USA, stát Michigan). Má rozměry  $5 \times 7$  metrů a je v něm instalováno

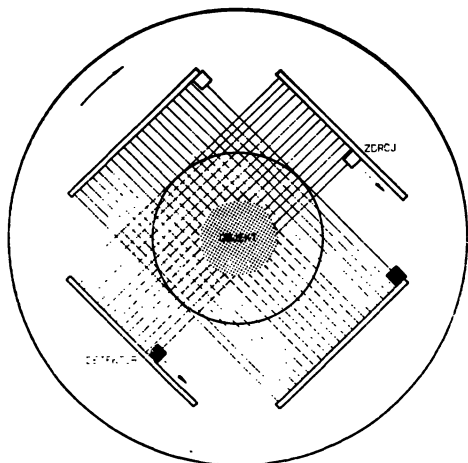


Schéma skaneru prvního počítačového Hounsfieldova tomografu. Směr ozařování se mění  
s krokem  $1^\circ$  (tj. celkem se ozařuje ve 180 smě-  
rech). Zdroj rentgenového záření a detektor se  
pohybují synchronizovaně v rovnoběžných vo-  
dítkách a při tom zdroj vyšle v každém směru  
svazek 160 rovnoběžných paprsků. Na obrázku  
jsou vyobrazeny 2 možné směry ozařování.  
Doba potřebná ke shromáždění výsledků všech  
ozařování je 5 minut. Tato data se zavádějí  
na počítač; obraz je algebraickým způsobem  
rekonstruován za 5,5 minuty. Výsledek se při-  
vádí na obrazovku displaye.

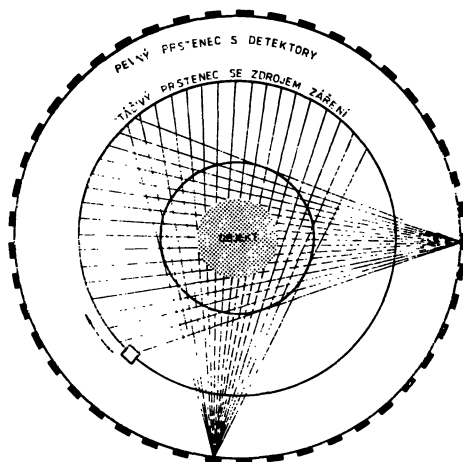
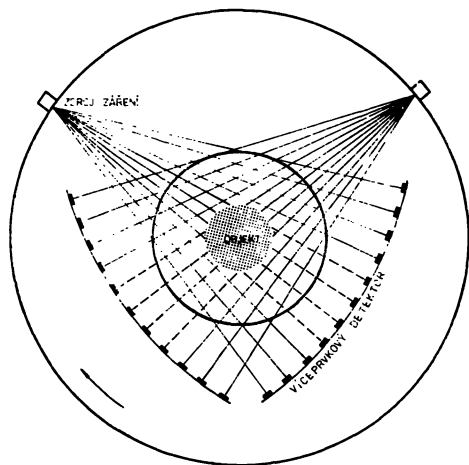


Schéma otáčivého skaneru s vějířovitým svaz-  
kem. Zdroj rentgenového záření a detektor jsou  
namontovány na otáčejících se prstencích.  
Každý impuls zdroje dává vějíř paprsků. Počet  
paprsků ve vějíři je omezen počtem detektorů  
a počet vějířů je možno zvětšovat zvětšením  
rychlosti otáčení a frekvence impulsů. Doba  
potřebná na shromáždění dat je při tomto způ-  
sobu skanování od 1 do 20 sekund. Za tuto dobu  
je možno dostat až 1000 vějířovitých projekcí.

Schéma skaneru s pevným prstencem detektorů  
a otáčejícím se zdrojem. Na vnější kružnici pev-  
ného prstence je namontován velký počet de-  
tektorů a uvnitř prstence je umístěna rentgenová  
trubice, která se spojitě otáčí kolem pacienta.  
Každý detektor přijme během jednoho otočení  
zdroje vějíř paprsků (na obrázku jsou zachyceny  
2 vějíře). Počet paprsků každého vějíře je možné  
zvětšovat zvětšením rychlosti pohybu zdroje  
a frekvence impulsů. Počet vějířů je omezen  
počtem detektorů.

28 rentgenových „děl“. Za jeden impuls, trvající řádově setinu sekundy, se získají informace o 256 řezech tloušťky 1 mm, což odpovídá oblasti s lineárními rozměry 25 cm. Velmi obtížná úloha rekonstrukce výsledného trojrozměrného obrazu však dosud není uspokojivě vyřešena přes nesporný pokrok i v tomto směru.

Pro současnou tomografii je charakteristické to, že se neomezuje jen na oblast rentgenologie. Tomografické přístroje se zavádějí i v mnohých jiných oblastech lékařské diagnostiky.

Všimněme si stručně emisní a ultrazvukové tomografie. Úlohou emisní tomografie je dostat obrázky zachycující rozložení radioaktivních izotopů zavedených s diagnostickým účelem do tkání lidského těla. Zdroj záření je v tomto případě uvnitř lidského těla – odtud název „emisní tomografie“. Ultrazvuková tomografie užívá, jak je zřejmé z názvu, ultrazvuku a její úlohou je získání dvourozměrných rozložení různých akustických parametrů tkání v příčných řezech těla. Nejdůležitějšími údaji jsou koeficient zeslabení a koeficient lomu ultrazvuku.

Pro realizaci počítačové tomografie je třeba znát trajektorie, po nichž se pohybuje paprsek od zdroje k detektoru. V rentgenové a emisní tomografii jde o přímky, v ultrazvukové tomografii to už přímky být nemusí. Ultrazvuk se láme při přechodu plochami oddělujícími tkáně s různými koeficienty lomu. Proto lze Radonovu transformaci použít v ultrazvukové tomografii jen pro měkké tkáně, kdy je možné zanedbat efekty způsobené refrakcí. To je např. případ diagnostiky nádoru mléčné žlázy, při níž je tato metoda velice efektivní. V jiných případech vzniká složitá matematická úloha o určení funkce  $f$  pomocí jejich integrálů podél křivek (nikoliv přímek) z jistého souboru. Inverzní formulí se pro takovou úlohu nepodařilo najít, a proto zde zůstává mnoho otázek nevyřešených, a to teoretických i numerických. Je třeba připomenout jednu velkou přednost ultrazvukových tomografů: jsou absolutně neškodné pro vyšetřovaný organismus.

JMR-tomografy jsou přístroje založené na efektu jaderné magnetické rezonance.\*) JMR-tomografie rozšiřuje oblast praktického užití tomografie (např. dává možnost zkoumat pacientovu krev). Velký zájem o JMR-tomografii je mj. proto, že umožňuje v řadě případů nahradit rentgenové tomografy přístroji méně škodlivými jak pro nemocné, tak i pro zdravotnický personál.

## Tomografie ve vědě a průmyslu

Tomografická metoda se užívá v řadě oblastí vědy a techniky: např. v holografické interferometrii, elektronové mikroskopii, hydroakustice oceánu, geofyzice.

Možnost použít Radonovu transformaci v elektronové mikroskopii je známa poměrně dávno. Problém spočívá v tom, že obraz objektů, jejichž velikost je menší než hloubka ostrosti elektronového mikroskopu (několik tisíc angströmů) vzniká složením jeho dvourozměrných řezů. Taková situace se analyzuje velmi obtížně. A i zde je možné úspěšně užít Radonovu transformaci. V r. 1968 ji použili D. de Rosier a A. Klug k re-

---

\*) Viz E. I. FEDIN: *JMR-introskopija-novij metod izučenija struktury biologičeskich objektov.* „Priroda“, 1980, N° 4, s. 77.

konstrukci různých virových struktur na základě elektronových mikrofotografií pořízených v procházejícím paprsku.\*)

Od r. 1970 Radonovu transformaci užívají B. K. Vajštejn a jeho spolupracovníci (Krystalografický ústav AV SSSR A. V. Šubnikova) k rekonstrukci struktury biologických molekul upravených kontrastní látkou, virů, bílkovinných krystalů na základě dat získaných elektronovou mikroskopií.\*\*)

Věnujme se podrobněji aplikacím tomografie v geofyzice. Začneme geotomografickým zpracováním dat elektromagnetického nebo seizmického prosvěcování zemin. V jednom vrtu se umístí zdroj signálů, ve druhém přijímač a určuje se doba průchodu signálu a jeho amplituda. Na základě těchto dat se vypočte rychlost šíření signálu a koeficient tlumení ve zkoumané zemině. V těch případech, kdy můžeme předpokládat platnost zákonů geometrické optiky (vzdálenost mezi zdrojem a přijímačem je mnohem větší než délka vlny, proudy vodivé jsou mnohem menší než proudy posuvné, koeficient lomu se mění plynule), můžeme k rekonstrukci užít Radonovu transformaci. Do geotomografie se vkládají velké naděje. Může být velmi efektivní např. při zjišťování oslabených zón před porubem, při mapování v šachtách, při vyhledávání a odhadu zásob ropy při druhém zpracování nalezišť. Zajímavý případ popisují C. Dines a R. Lytle\*\*\*), kteří pomocí geotomografického zpracování výsledků elektromagnetického prosvěcování sestrojili mapu koeficientu tlumení na pozemku Forrest Glenn (blízko Washingtonu), kde se projektovala trasa metra. Popsanou metodou byla získána podstatně úplnější informace, než je možné získat analýzou vzorků z jednotlivých vrtů. Užití tomografické metody je zde nezbytné, neboť potřebujeme získat informace o velmi rozsáhlé oblasti, kdy použití standardních metod by bylo neobyčejně pracné nebo dokonce nemožné (zhruba řečeno k získání kvalitní informace by bylo třeba udělat velké množství vrtů a pro každý z nich provést příslušnou analýzu).

Tento daleko ne úplný přehled možných použití tomografie zakončíme jejím užitím ke kontrole průmyslových výrobků bez jejich poškození. V r. 1982 se v Moskvě konala reprezentativní konference věnovaná této problematice. Při příležitosti této konference byla organizována výstava, na níž byl vystaven sovětský průmyslový tomograf (termín „průmyslový“ zde označuje oblast jeho použití).

## Matematické metody a algoritmy tomografie

K rozvoji tomografie nestačí pouze matematická teorie Radonovy transformace. Je třeba rozpracovat numerické metody a algoritmy využívající specifiky řešených úloh.

V pracích A. Bracewella (1956) byly jako první ověřeny algoritmy založené na souvislosti Radonovy transformace s Fourierovou transformací. Fourierovy koeficienty funkce  $Rf(k, p)$  jako funkce proměnné  $p$  (při pevném  $k$ ) dávají Fourierovy koeficienty funkce  $f(x)$  pro frekvence úměrné  $k$ . Známe-li proto spektrální rozklad funkce  $Rf(k, p)$

---

\*) Za práce v oblasti elektronové mikroskopie byla A. Klugovi v r. 1982 udělena Nobelova cena za chemii. Viz N. A. KISELEV, A. D. MIRZABEKOV: *Laureaty Nobelevskoj premii 1982. Po chemii — A. Klug.* „Priroda“, 1983, N° 1, s. 94.

\*\*) B. K. VAJŠTEJN: *Izvěstija AN SSSR, ser. fizičeskaja*, 1972, t. 36, N° 9, s. 1834.

\*\*\*) C. A. DINES, R. G. LYTLE: *TIHER*, 1979, t. 67, N° 7, s. 25.

jako funkce  $p$  pro různá  $k$ , známe fakticky spektrální rozklad funkce  $f$ . Pochopitelně hodnoty  $Rf(k, p)$  měříme pouze pro konečně mnoho směrů  $k_1, k_2, \dots, k_N$ , v důsledku toho dostáváme také neúplnou informaci o Fourierově transformaci funkce  $f$ , tj. pouze koeficienty odpovídající frekvencím  $k_1, k_2, \dots, k_N$ , a už na základě nich musíme odhadovat Fourierovy koeficienty funkce  $f$ . Tak např. de Rosier a Klug, kteří uvedenou metodu užíli v mikrobiologii, využívali velké symetrie zkoumaných virových struktur.

Ve většině komerčních tomografií je realizována tzv. metoda inverzní projekce na základě konvoluce. Na  $Rf(k, p)$  se díváme jako na třídu funkcí proměnné  $p$  závisících na parametru  $k$ . Abychom určili  $f$ , musíme nejdříve regularizovat  $Rf(k, p)$  podle proměnné  $p$ , integrovat je s vahou  $(p - q)^{-2}$  jednotně pro všechna  $k$  (upozorníme na to, že způsob regularizace není zdaleka libovolný, ale je určen Radonovou formulí) a nakonec provést v bodech  $p = k \cdot x$  integraci podle  $k$ . Tato metoda umožňuje rozpracovat algoritmy pro rychlou rekonstrukci funkce  $f$  při využití možností moderních počítačích strojů, provést zpracování funkce  $Rf(k, p)$  jako funkce  $p$  zároveň (souběžně) pro různá  $k$  a přitom sčítat už získané výsledky přes  $k$ .

Protože hodnoty  $Rf(k, p)$  známe jen pro konečně mnoho hodnot  $p$ , a to ještě pouze přibližně, je výběr způsobu regularizace obtížnou matematickou úlohou. Její řešení s uvážením specifiky konkrétní oblasti použití a konstrukce skaneru je jedním z hlavních výrobních tajemství firem vyrábějících tomografy.

V prvním počítačovém tomografu Hounsfield užil algebraickou metodu pro určení  $f(x)$  pomocí  $Rf(k, p)$ . Její podstata záleží v tom, že definiční obor funkce  $f$  rozdělíme na malé části a v každé z nich považujeme  $f$  za konstantní. K určení těchto hodnot dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic. Tato metoda se v inverzních úlohách matematické fyziky užívá často, ale v případě Radonovy úlohy má jednu specifickou zvláštnost: matice této soustavy je velmi řídká (mnoho jejích prvků je rovno nule). Algebraická metoda prakticky nezávisí na geometrii umístění detektorů a zdrojů (tj. na konkrétní konstrukci skanerů); jde při ní maximálně využít apriorní informace o funkci  $f$ . V řadě případů lze  $f$  uspokojivě rekonstruovat i tehdy, známe-li poměrně málo hodnot  $Rf(k, p)$  (tak je tomu např. při řešení úloh geotomografie).

Závěrem je třeba říci, že pro současnost je charakteristické nejen rozsáhlé použití tomografie především v lékařství, ale i vznik specifického „radonovského“ přístupu k analýze experimentálních dat získávaných v nejrůznějších oblastech praktických výzkumů. Přitom se ukazuje, že někdy jsou data shromážděná tradičním způsobem přímo uzpůsobena pro zpracování pomocí Radonovy inverzní formule, jindy mohou pracovníci ve výzkumu organizovat experiment již se zřetelem na existenci tohoto rekonstrukčního postupu.

#### Doporučená literatura

E. H. ČIKIRDIN, S. M. STOLCER, F. A. ASTRACHANCEV: *Rentgenovskije tomografičeskije apparaty*. Moskva, Medicina, 1976.

R. K. MÜLLER, M. KEVEH, C. WADE: *Rekonstruktivnaja tomografija i jejo primeněnije v ultrazvukovoj tēchnike*. TIIEP, 1979, t. 67, N° 4.

A. S. KAK: *Mašinaja tomografija s ispolzovanijem rentgenovskogo izlučēnija, radioaktivnych izotopov i ultrazvuka*. TIIEP, 1979, t. 67, N° 9.