Ladislav Rýdl
Jak se stala matematika deduktivní vědou

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 9 (1964), No. 2, 87--98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137660

JAK SE STALA MATEMATIKA DEDUKTIVNÍ VĚDOU

LADISLAV RÝDL, Pardubice

Ve čtvrtém svazku Acta antiqua maďarské akademie věd z roku 1956 se tímto problémem zabývá Á. SZABÓ v německy psaném článku.

Ve své práci zastává tři teze:

1. řecká matematika jako deduktivní věda vznikla nejpozději v první polovině 5. století před n. l. pod vlivem elejské filosofie,*)
2. právě eleaté už před touto rozhodující změnou poprvé v historii evropského myšlení jasně formulovali základní principy logiky,
3. deduktivní matematika by nebyla možná bez předem známé logiky, tj. pokud by matematik nezdůvodňoval svá tvrzení bez jejího vědomého užití.

K zdůvodnění tohoto pojetí rozvrhl autor svou práci ve čtyři kapitoly. V první kapitole se stručně zabývá historií nejdůležitějších otázek uvedeného problému v řecké matematice, a to na základě nových výsledků bádání o matematice předřeckých národů starého orientu. V druhé kapitole se zabývá novějšími pokusy vysvětlit vznik řecké matematiky. Ve třetí shrnuje nejdůležitější antické a moderní názory, na nichž jsou založeny uvedené teze. Konečně ve čtvrté kapitole rozvíjí a zdůvodňuje teorii o vzniku řecké exaktní vědy v zevrubnějším pojednání o metodě nepřímého matematického důkazu.

Pokusíme se v tomto pojednání velmi zkráceně postihnout podstatné myšlenky Szabóovy práce. Uvádíme prameny, jichž použil autor k podepření vyslovených tezí a doplňujeme text citacemi z pramenů v českém překladu.

I

V posledních desetiletích vědeckohistorického bádání o předřeckých matematických vědomostech Egypťanů a Babyloňanů se mění tradiční názor, že Řekové jsou zakladateli matematické vědy. (Výsledky těchto bádání jsou shrnuty v díle B. L. v. d. WAERDENA. Holandský originál v. d. Waerdena vyšel r. 1950. Á. Szabó čerpal z anglického překladu, který pod názvem Science awakening vyšel v Groningen r. 1954. Do němčiny byl přeložen r. 1956 a u nás je nejrozšířenější ruský překlad z r. 1959.) Zjistilo se totiž, že mnohé matematické znalosti, které byly podle řeckého podání kladeny do 6. nebo 5. století před n. l., byly známy v předřeckých kulturách už před mnoha staletími dříve. O mnohých matematických problémech a jejich historickém zařazení existují zatím jen domněnky. Tak např. někteří matematičtí historikové pochybují o tom, že je Pythagoras autorem známé věty. Podle řeckého podání je život Pythagorův kladen do 6. stol. před n. l. Ale někteří autoři. např. uvedený už B. L. v. d. Waerden ve svém díle Arithmetik der Pythagoreer I., Math. ann. 120

*) Filosofický směr založený XENOFANEM z Eley (540—460 př. n. l.): podstatu věcí lze postihnout jen rozumem, ne smysly, které podávají jen zdání.

(1947/49, str. 127—153), pochybují o tom, že byla tzv. Pythagorova věta známa v tak raném vědním stadiu. Na druhé straně však jiní autoři vyvracejí tento skeptický názor doklady o tom, že praktické důsledky této věty byly známy Babylóňanům už v 2. tisíciletí před n. l. (O. NEUGEBAUER: Vorlesungen über die Geschichte der antiken math. Wissenschaften, Berlin 1934; K. REIDEMEISTER: Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949).

Podobně značná část matematického vědění, o němž systematicky pojednává Euklides ve svých Elementech (z doby asi 300 let před n. l. — český překlad Fr. SERVÍTA Eukleidovy základy (Elementa) z r. 1907, ruský překlad s pozn. z r. 1949—1950), byla známa alespoň jako souhrn empirických znalostí v babylónské kultuře dlouho před Řeky. O. Neugebauer (Studien zur Geschichte der antiken Algebra III. v Quellen u. Studien z. Gesch. der Math., Abt. B., Bd. 3) uvádí, že v oblasti elementární geometrie, elementární nauky o poměrech a v nauce o rovnicích vyrůstala řecká matematika z obsahového materiálu babylónské matematiky. Někde dokonce (zápis čísel) se Řekové vrátili proti Babylóňanům o krok zpět (A. M. FRENKIAN: Études de mathématiques suméroakkadiennes, égyptiennes et grecques v Revue de l'Université de Bucarest, 1953, str. 9—20:*). I tu se názory rozcházejí. Podobně se vyjadřuje např. v. d. Waerden v něm. překladu Die griechische Zahlenschrift (str. 75), příznivěji se vyslovuje STRUIK v knize Abriss der Geschichte der Mathematik (str. 65). Stejně tak jako se změnil názor na zakladatele matematiky, mění se i názor na počátky matematiky samé. Dříve byl počátkům matematiky přisuzován „geometrický" charakter, neboť geometrie byla „méně abstraktní, názornější". Do značné míry vyplývá tento názor právě až z pojetí Euklidových Elementů a z toho, že v řecké matematice byla geometrie v popředí zájmu. V počátcích matematiky byla však „čistá, syntetická" geometrie velmi obtížná a podstatný pokrok geometrie souvisel v historii vždy s adekvátním rozvojem ostatních disciplín matematiky. Před řeckou kulturou je geometrie během dvoutisíciletého vývoje druhotným objektem. Ostatně byla vůbec podstatným znakem i řecké matematiky její názornost? Už Platón ve 4. stol. v VII. kap. svého díla „Stát" zdůrazňuje, že názornost geometrie není vůbec konkrétní názornost, že „nejde o konkrétní věci, ale geometrie zaměřuje pozornost na něco, co jinak než myšlením není přístupné." Podnítila názornost Řeky ke geometrizaci algebry? Podle nových výsledků historického bádání bylo podnětem k tomu jednak objevení iracionálních čísel, jednak nutnost převést výsledky předřecké „algebraické" algebry v algebru „geometrickou".

(B. L. v. d. Waerden v citovaném díle Science awakening: It is therefore logical necessity, not the mere delight in the visible, which compelled the Pythagoraens to transmute their algebra into a geometric form).**)

---

*) „Řekové nepřejali babylónskou poziční číselnou soustavu, znali-li ji vůbec, ale použili k vyjádření hodnoty čísla písmen."

**) Ne pouhá radost z názorného, ale logická nutnost přiměla pythagorovce dát algebře geometrickou formu.

V předřecké matematice nebyly známy pojmy věta, postulát, axióm, důkaz (O. BECKER: Grundlagen d. Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg/ München 1954, str. 22: „ani jednou nebyla zjištěna u Babylóňanů formulace obecné věty"). V souhrnu empirických znalostí byla stanovena jen pravidla, jak řešit určité, konkrétní úlohy. O důkazu v dnešním slova smyslu teprve nelze mluvit. Šlo nanejvýš o zkoušku použití pravidla. Deduktivní naukou se stala matematika až u Řeků, a protože přeměna souhrnu empirických znalostí v exaktní vědu je přirozeně nesmírně důležitým mezníkem v dalším vývoji, je jistě oprávněna otázka jak, kdy a proč se stala u Řeků matematika deduktivní vědou.

II

Často se vznik deduktivní matematiky spojuje s rozvojem logiky. Bezpochyby k tomu přispěl i definitoricko-axiomatický podklad v řecké matematice. (K. v. FRITZ: Die APXAI in der griechischen Mathematik, Archiv für Begriffsgeschichte, sv. I., Bonn 1955, str. 13—103.) Komentátor Euklidových Elementů, Proklos Diadochos (5. stol. n. l.), vykládá úmyslné zařazení definic, postulátů a axiómů na počátek I. knihy tím, že jsou oněmi „principy" (*ἀρχαί*), z nichž jsou vyvozeny věty (teorémy). A nezáleží na tom, zda všechny definice, postuláty a axiómy pocházejí od Euklida, nebo zda je převzal jako předchozí matematické znalosti, nebo dokonce, byly-li některé z nich dodatečně vloženy do jeho díla. (P. TANNERY: Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide (Mém. scient. II. 1912, str. 48—63 a A. M. FRENKIAN: Le postulat chez Euclide et chez les modernes, Paris 1940, str. 11—24). Uspořádání Euklidových Elementů a rozdělení veškerého matematického vědění na nedokazované „principy" a odvozené věty samo o sobě prokazuje, že autoru bylo známo už 300 let př. n. l., v čem spočívá matematický důkaz a jak daleko je nutné jej vést. Už Aristoteles generaci před Euklidem, ve 4. stol př. n. l., pojednává ve své knize Analytica posteriora o dokazovacích metodách a označuje jménem „principy" to, čehož existenci nebo platnost nelze dokázat. A před Aristotelem Platón v 1. polovině 4. stol. př. n. l. je téhož názoru alespoň na definice: „... geometři, aritmetikové a ostatní, kteří se zabývají podobnými vědami, vycházejí z určitých předpokladů a nepokládají za nutné přesvědčovat sebe i jiné o tom, co je přece každému jasné."

Řekové tedy už před Euklidem věděli, že matematika je vystavěna na předpokladech, které nelze dokázat, že matematika musí být — vyjádřeno dnešní formulací — budována na definitoricko-axiomatickém podkladu. Připusťme prozatím hypotézu, že Řekové mohli dojít k závěru, že je možné k vybudování matematiky vyjít z určité „soustavy"*) nedokazatelných vět. Takový základ má obdobu v rozvíjení aristotelské logiky vycházející ze známé Platónovy dialektiky (formou dialogu jeden z partnerů přesvědčuje druhého o správnosti určitého tvrzení tím, že logickými úsudky odvodí

*) Tohoto moderního názvu užíváme jen pro lepší srozumitelnost.

z premis, které partner pokládá za správné, dokazované tvrzení). Analogický je postup Euklidův. A matematika se právě proto nazývá vědou deduktivní, že odvozuje všechna svá tvrzení z takových premis, resp. že se její tvrzení vracejí k obecně uznávaným premisám. A ještě jedna okolnost nutí ke srovnání s aristotelskou logikou. Východiskem pro toho, kdo dokazuje určité tvrzení, je právě tato nakonec dokázaná věta, pro jejíž důkaz vyhledává potřebné premisy. Tak např. obsah většiny Euklidových pouček byl v praxi znám už národům starého Orientu a teprve Řekové se pokusili nalézt ony základní matematické věty, z nichž lze odvodit věty složitější. Po Euklidovi se matematika stává systematickou, deduktivní vědou, zatím co ve svých počátcích byla „vědou" experimentální, induktivní. Je ovšem málo pravděpodobné, že se Řekům podařilo najednou stanovit nejjednodušší základní věty, axiómy. Jejich určení prošlo patrně delším vývojem. Tento názor může být podpořen i Proklovou zprávou (Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii v edici G. Friedlein, Lipsko 1873, str. 183), že Apollonios z Pergy (asi 265 až 170 př. n. l.) se ještě v době po Euklidovi pokoušel dokázat první Euklidův axióm: „věci rovné téže věci jsou i navzájem sobě rovny". A už Proklos postřehl marnost tohoto Apolloniova pokusu. Tvrdí, že pokus o důkaz musel selhat proto, že Apollonios chtěl „méně zřejmými" premisami dokázat to, co je zřejmější než použité premisy. K. v. Fritz (v cit. díle) konstatuje, že první kroky k definitoricko-axiomatickým základům byly učiněny už před Aristotelem, neboť jinak by se Aristoteles nemohl odvolávat na důkazové metody matematiky. Poukazuje na to, že starší řecká matematika měla ve větší míře empirický charakter a opírala správnost svých tvrzení o názor. Později — v době Euklidově — byly empirický charakter a názornost potlačovány, matematika se stává abstraktnější. K. v. Fritz vyvozuje, že řecká matematika vycházející z pythagorovců v 5. stol. př. n. l. měla už zcela jiný charakter než Tháletova geometrie z 6. stol. př. n. l., a tvrdí s K. Reidemeisterem, že s pythagorovci začíná nová epocha řecké matematiky, která se už nespokojovala s evidencí správnosti pouhým názorem. Tato teorie ovšem neodpovídá ještě na otázky, zda a do jaké míry souvisí uskutečnění deduktivní matematiky s rozvojem logiky. Probíhal rozvoj obou věd paralelně? Ovlivňovaly se navzájem? Která z nich byla prvotní? Na tyto otázky se snaží odpovědět autoři Gy. Alexits a J. Fenyö (v populárně vědecké práci Matematika és dialektikus materializmus, Budapest 1948, které přes některé nepřesnosti nutno přiznat originální a zajímavé postřehy) takto: Vědecká matematika začíná vlastně s objevením nutnosti přísného důkazu; tato nutnost vyplynula ze společenské, sociální situace a její počátky nutno hledat v soudobé filosofii. Dialektický způsob diskuse sofistů vyvolal u Řeků potřebu logického dokazování, která se u jiných národů v té době neobjevuje. Á. Szabó se pozastavuje nad domněnkou autorů, že rozvoj matematiky vyplynul z potřeb výroby. Tuto myšlenku nelze ještě v té době zevšeobecnit. Až do doby Euklidovy lze ztěží pozorovat bližší spojitost mezi problémy deduktivní vědy a výrobou. Do té doby sotva lze mluvit o spojení vědy s denní praxí (např. Sokrates zdůrazňuje v platónském dialogu o státě, že k uspokojení potřeb praktického života postačí jen nepatrný zlomek geometrie a aritmetiky). Autoři zjednodušeně vyvozují, že rozvoj produkce umožnil demokracii řeckých otrokářů, že v demokracii existovala svoboda diskuse a v diskusích zavedli sofisté jako zběhlí debatéři protiklady různých mínění. Odtud prý se časem zrodila potřeba logického dokazování a sama logika. Tuto potřebu prý pocítil také řecký matematik. Při bližším pohledu na tento myšlenkový řetěz se však objeví i chronologická chyba. Spojíme-li počátky deduktivní matematiky s dobou Pythagorovou, tj. se 6. stol. př. n. l., musela už v této době existovat určitá nauka o logice. Ale činnost sofistů, která mohla ovlivnit rozvoj logiky, se klade do 5. stol. př. n. l. Další pochybnost o správnosti tohoto výkladu vzniká při pokusu odpovědět na otázku, v čem záležela právě u Řeků ona nutnost přísného matematického důkazu. Byla to vůbec potřeba Řeků? Nepřipisují jim ji autoři dodatečně? Je totiž zajímavé, jak ilustrují domnělý vznik potřeby přísného důkazu u Řeků. O známém přibližném vzorci $c \,.\, a/2$, který postačil starým Egypťanům k výpočtu obsahu rovnoramenného trojúhelníka o základně c a rameni a, resp. vzorci $(a + b)/2 \,.\, c/2$ k výpočtu obsahu obecného trojúhelníku o stranách a, b, c, blížícího se tvarem rovnoramennému, „protáhlému" trojúhelníku tvaru nilských delt (O. NEUGEBAUER: Vorlesungen über die Geschichte der antiken math. Wissenschaften, sv. I., Berlin 1934), dodávají, že při řešení architektonických úloh selhal. Pokusili se vůbec Řekové použít tohoto vzorce v architektuře? Proč jej nepoužili už Egypťané? Autoři vyvozují ze selhání empirického vzorce, že abstraktní zobecnění pouhé zkušenosti nezaručuje správnost a přesnost. A odtud prý vznikla potřeba matematického důkazu. I když tato myšlenka je pozoruhodná, nelze tvrdit, uvádí Á. Szabó, že praxe vyvolala potřebu důkazů. Řekové se při zavádění teoretické věty od ní dokonce záměrně odvraceli. Nejen neviděli, ale ani netušili přímý praktický užitek deduktivního důkazu. Nepřesvědčující je i tvrzení, že matematické vedení důkazu je jen rozvitá forma důkazů v denním životě. Vždyť tyto důkazy se kvalitativně od sebe liší. Nematematický důkaz vede k pravděpodobnosti tvrzení, jehož pravdivost je ověřována praxí, zkušeností, fakty. Starověcí řečtí matematici se však snažili dokazovat i „fakty", které byly v praxi známé po staletí a o jejichž pravdivosti nebyly nikdy pochybnosti. Matematika se stala právě proto vědou, že se nespokojila (s výjimkou axiómů) s pouhou empirickou pravdivostí faktů, se smyslovou evidencí jejich pravdivosti a že poznala, že i „nejzřejmější fakty" je třeba dokázat. Autoři proto neodpovídají na otázku, proč vlastně u Řeků se objevuje nutnost přísného matematického důkazu.

O výklad vzniku řecké exaktní vědy se pokouší i B. L. v. d. Waerden (citované Science awakening, str. 89). Poukazuje na to, že Řekové přejali mnohé matematické znalosti empirického původu od Egypťanů a Babylóňanů. Např. pro obsah kruhu používali Babylóňané vzorce $3\,r^2$, kdežto Egypťané vzorce $(8/9 \,.\, 2r)^2$. Řekové se patrně pokoušeli zjistit, který z nich je přesnější a tak asi ponenáhlu přicházeli na myšlenku exaktního vyvození. Tato teorie se zdá být přijatelnější, méně náročná než předchozí. Nehledá původ exaktní matematiky v souvislosti s rozvojem logiky, ani v nematematickém dokazování, ale vysvětluje vznik snahy po přesnosti jen v úvahách ryze matematického charakteru. Neodpovídá ovšem opět na otázku, co nutilo staré matematiky dokazovat i nejznámější fakty. Celý souhrn nejstarších matematických důkazů totiž nevyvolává dojem, že exaktní věda vznikla proto, aby řešila sporné otázky.

Shrneme-li předchozí úvahy, můžeme pokládat ony tři pokusy — vysvětlit, jak se matematika stala deduktivní vědou — za užitečná hlediska pro další zkoumání, ale problém ještě jimi vyřešen není.

III

Třináct knih Euklidových Elementů z 3. stol. př. n. l. je nejstarším souhrnem antické matematiky, který se stal klasickým. I přes námitky, vznášené proti nim, lze tvrdit, že přesný matematický důkaz u Řeků dosáhl vlastně nejvyššího vývojového stupně už za Euklida. Z toho by plynulo, že rozvoj deduktivní vědy spadá do předeuklidovské doby. Co se dovídáme z antického podání o tomto údobí?

Nejstarším dějepiscem řecké matematiky byl ve 4. stol. př. n. l. Aristotelův žák, Eudemos z Rhodu. Krátký výtah z jeho ztraceného díla podává v 5. stol. n. l. Proklos v komentáři k první knize Euklidových Elementů v tzv. Seznamu matematiků (přeložil a komentoval B. L. v. d. Waerden v cit. knize Science awakening, str. 90). Podle těchto pramenů nejstarší zástupce řecké matematiky, zvláště geometrie, Tháles v 6. stol. př. n. l., jednak sám mnohé objevil, jednak přinesl mnohé své vědění z Egypta. Pythagoras později, ale v témž století, změnil (podle Seznamu) geometrii (nazývanou tu filosofií) tak, že se stala součástí výchovy svobodného člověka, tj. Pythagorova matematika nebyla jen praktickou, ale i teoretickou vědou (podle antického pojetí se svobodný člověk nesměl zabývat praktickou činností, ale jen teorií). I řecký název „theoréma" pro matematickou větu svědčí o teoretickém podkladu tohoto označení. Podle Prokla změnil Pythagoras rozhodným způsobem matematiku tím, že její věty zkoumal ryze intelektuální cestou, nezávisle na konkrétním obsahu. Seznam se zmiňuje i o jiných matematicích před Euklidem, kteří se zabývali systematickým zpracováním matematiky, např. o prvním systematikovi Hippokratovi v 5. stol., o Leonovi v 1. pol. 4. stol. a Theudiovi z Magnesie v 2. pol. 4. stol. před n. l.

Všimněme si v dalším, do jaké míry je antické podání doplněno nebo modifikováno dnešní matematickou historií. Pokud jde o Tháleta, shoduje se výsledek moderního historického bádání s názory Seznamu. Tháles obohatil řeckou matematiku tím, že — i když jeho geometrie nebyla ještě vědou na „definitoricko-axiomatickém" podkladě — položil k ní první základy. Toto tvrzení lze historicky doložit (O. Becker: Gnómon *23*, 1951, str. 298) tím, že např. byl jím nebo jeho vrstevníky zaveden pojem úhlu, tj. už významné vědecké zobecnění v rané řecké geometrii. Tháles se však také zabývá co nejkonkrétnější formou problémů. Naproti tomu Pythagoras vyvozuje matematické věty nezávisle od konkrétní látky, pojmově. I když antické podání mluví o Tháletových „důkazech", není zcela zřejmé, co se jimi rozumí. Řecké slovo pro dokazování v původním významu *ἀποδεικνύναι* znamená totiž původně jen „ukázati", avšak moderní dějiny se pokoušejí se značnou spolehlivostí rekonstruovat Tháletův dokazovací způsob (citovaný K. v. Fritz). Euklides vyslovuje sice ve své I. knize Elementů tzv. axióm shodnosti: „věci, které se kryjí, jsou shodné“, ale je nápadné, že ve svých úvahách se vyhýbá jeho použití, i když tak mohl zabránit některým nesouladům v definicích shodnosti. Podle Prokla se empirické metody založené na pojmu *ἐφαρμόξειν* (krýti se) používalo v širším rozsahu také v takových důkazech, které se u Euklida už nevyskytují, a není patrně náhodou, že z pěti vět, které jsou antickým podáním připisovány Tháletovi, je možné čtyři dokázat přímo a pátou větu nepřímo touto metodou. Lze proto usuzovat, že Tháletův důkaz záležel i v užití této empirické metody. Tháles tedy v podstatě ještě ověřoval pravdivost svých tvrzení názorem. V jeho době proto ještě nedošlo k obratu v řecké matematice, který K. Reidemeister (cit. dříve) nazývá obratem od názorného k pojmovému.

Pokud jde o osobu Pythagorovu, je dnešní věda velmi skeptická k tvrzením Seznamu. Nejstarší prameny o Pythagorovi nikde o něm nemluví jako o velkém matematikovi a filosofovi (K. REINHARDT: Parmenides und die Geschichte der griech. Philosophie, Bonn 1916, str. 233 nebo E. FRANK: Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle/Saale 1923, str. 67). Sledujeme-li počátky pozdější pythagorovské legendy, narazíme na nejpravděpodobnější výklad, že Pythagoras jako velký matematik a filosof je romantickým výtvorem aristokratických a náboženských kruhů jižní Itálie a Sicílie z konce 5. a začátku 4. stol. př. n. l. Ne náhodou se Platón i Aristoteles zmiňují o pythagorovcích, nikoli však o Pythagorovi. Moderním bádáním se také zjistilo, že část matematických objevů připisovaných Pythagorovi pochází z doby dřívější, část z doby pozdější než ze 6. stol. př. n. l. (např. cit. K. REIDEMEISTER: Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949, str. 20 a str. 51 až 52 nebo E. SACHS, Die fünf platonischen Körper, Berlin 1917). Je proto třeba posuzovat zprávy Seznamů skepticky, ale na druhé straně nutno přiznat, že velmi spolehlivé antické prameny přinášejí zprávy o aritmetických studiích pythagorovců z 5. stol. I Aristoteles tvrdí, že pythagorovci se první zabývali „mathémáty“ (cit. K. Reidemeister: *μαθήματα* jako souhrn matematických vět a důkazů) a Platón zdůrazňuje jejich prvenství v nauce o číslech. Jejich matematika je vskutku už vybudována na základních větách. Vyslovují další věty skutečně nezávisle na konkrétní látce. K. Reidemeister dochází proto k závěru, že zakladatelé deduktivní matematiky jsou pythagorovci v 5. stol. př. n. l. Tím sice není ještě naše otázka zodpověděna, ale docházíme k pozoruhodné shodě mezi míněním tradičního antického podání, že zakladatelem exaktní vědy je Pythagoras, a moderní rekonstrukcí, že prvním představitelem deduktivní matematiky je aritmetika pythagorovců.

Z krátké Proklovy zprávy o nejstarších systematicích deduktivní vědy je nejpozoruhodnější v tomto smyslu jméno Hippokratovo (Hippokrates z Chiu, 5. stol. př. n. l.). Podle ní Hippokrates podal systematický přehled řecké matematiky, nezávisle potvrzený i moderním bádáním. Nejnovější historické výzkumy docházejí k závěru, že mimo to existoval v 5. stol. př. n. l. písemný záznam číselné teorie, který bez podstatných změn, snad jen zkrácen, byl převzat jako VII. kniha Euklidových Elementů. Naléhavě se nám nabízí potom tato domněnka: Pokusil-li se Hippokrates systematicky shrnout matematické vědění své doby, musíme klást počátky deduktivní vědy do doby před Hippokratem. Neúplné údaje Seznamu jsou doplněny moderním historickým bádáním o předeuklidovské řecké matematice, především prací O. BECKERA: Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente, Quellen und Studien zur Gesch. d. Math., Abt. B., Bd. 3, 1936, str. 533—553 a cit. prací B. L. v. d. WAERDENA: Die Arithmetik der Pythagoreer I., Math. Ann. 120, 1947/49, str. 127—153. O. Beckerovi se podařilo zjistit, že posledních 16 vět z nauky o sudých a lichých číslech IX. knihy Euklidových Elementů bylo buď Euklidem, nebo vydavatelem Elementů připojeno jako převzatý celek z předchozích znalostí, stejně tak jako v X. knize 17 vět z téže nauky, která tvořila nejstarší řecká „máthémata" a jejíž vznik O. Becker odhaduje na střed nebo na první polovinu 5. stol. př. n. l. Podobně van der Waerden zjistil, že prvních 36 vět VII. knihy pochází z doby před r. 400 př. n. l. Boetius (5. stol. n. l., De inst. mus. III 11, ed. G. Friedlein 1867, str. 285) zachoval matematický důkaz, v němž Archytas (430—360) předpokládal znalost vět, které se znovu objevují v VII. a VIII. knize Elementů. Musíme proto připustit, že věty, jejichž znalost Archytas předpokládal, musely být písemně zachyceny v nějaké práci z doby předchozí. Po bližším prozkoumání logického sledu těchto vět docházíme k zjištění uzavřeného celku, totiž k oněm prvním 36 větám VII. knihy, podle v. d. Waerdena kompaktní nauce (nebo aspoň části) číselné teorie z 5. stol. př. n. l.

Výsledky moderního bádání a antického podání lze proto shrnout v několik základních bodů, které představují nejdůležitější údaje potřebné k odpovědi na otázku, jak vznikla deduktivní matematika:

1. první řecký matematik 6. stol. př. n. l. Tháles prováděl svými „důkazy" jen názornou smyslovou evidenci, jeho „věda" byla ještě převážně empirického charakteru;
2. uprostřed nebo v první polovině 5. stol. př. n. l. vznikla pythagorejská nauka o sudých a lichých číslech, nejstarší dosud známé řecké pojednání z číselné teorie;
3. první matematické základy shrnul v 5. stol. př. n. l. Hippokrates (působil asi uprostřed 5. stol. v Athénách);
4. pythagorejská číselná teorie, obsažená v prvních 36 větách VII. Euklidovy knihy, byla zpracována jako nauka a písemně zachycena již v 5. stol. př. n. l.;
5. Archytas (430—360 př. n. l.) je ještě představitelem onoho pojetí matematiky, v němž aritmetika předcházela před geometrií. Po něm pak nadchází údobí geometrizace řecké aritmetiky.

Pokud jde o důkaz, deduktivní metodu staré řecké matematiky, byly už v pythagorejské matematice kladeny vysoké nároky na přesný důkaz. I zcela zřejmá fakta (např. v nauce o sudých a lichých číslech v IX. knize Eukl. Elementů, str. 21—29) jsou výslovně formulována a dokazována. Jiné — i evidentní věty — jsou vyvozeny z jednodušších faktů (tamtéž str. 30—32). Někteří matematikové (Archytas) dokonce až pedantsky přehánějí v podrobnostech vyvozování jednotlivých důkazových kroků (cit. B. L. v. d. Waerden v Math. Ann. 120, str. 139—140).

Nelze téměř pozorovat znatelný přechod mezi dokazovacím způsobem Tháletovým a způsobem, který je charakteristický pro pythagorovce. Přísný deduktivní matematický důkaz asi nevznikal ponenáhlu. A protože se u pythagorovců objevuje náhle v plné své náročnosti, musíme konstatovat, že se matematika stala deduktivní vědou v poměrně krátkém údobí mezi Tháletem a pythagorovci. Zbývá proto ještě vysvětlit, jak a proč došlo k onomu náhlému a překvapivému obratu v matematice.

IV

Předchozí úvahy vedou k domněnce, že deduktivní matematika je vlastně výtvorem pythagorovců, neboť oni sestavili nejstarší matematické věty a důkazy, z nichž mohla vzniknout deduktivní věda. Jak však přišli na myšlenku, že lze tvrzení matematického obsahu dokázat odlišně od Tháletova způsobu, a to na jejich dobu s tak udivující přísností?

Logická přísnost pythagorovské matematiky překvapovala i nejlepší znalce tohoto období. Ucelená kompozice VII. knihy Elementů dala podnět k pochybnostem, zda mohla vůbec vzniknout už v 5. stol. př. n. l. O. BECKER (Gnómon *23*, 1951, str. 299) ve své kritice citované v. d. Waerdenovy knihy Science awakening dochází k domněnce, že VII. Euklidova kniha pochází z doby před r. 400, a poznamenává: Konečná forma VII. knihy mohla vzniknout pozdějším přepracováním. Naproti tomu přiznává důležitý význam v. d. Waerdenovu upozornění na soulad vyspělé formy s vnitřní logikou základů číselné teorie v VII. knize.

Pythagorovci objevili možnost, jak se od matematických faktů vrátit k hypotézám, k jednoduchým premisám, z nichž jsou výsledné věty odvozeny myšlením (cit. Reidemeister, str. 52). Objevili myšlenkovou cestu, jak z názorného vyvodit obecnou větu. Protože však geometrický fakt je také smyslově vnímatelný a hypotéza myšlenkový prvek, lze říci, že objevili cestu, která od myšlenkové konstrukce vede ke smyslovému vjemu. Ovšem nejpřekvapivější je právě to, že od hypotéz došli k faktům přístupným jen myšlenkovému procesu (cit. K. Reidemeister tu upozorňuje na jeden z vrcholů pythagorovské nauky, totiž na znalost „nesouměřitelnosti"*) strany a úhlopříčky čtverce. Nesouměřitelnost nelze znázornit ani vnímat smysly, jako třeba tzv. Pythagorovu větu. Jak jen však přišli pythagorovci na podivuhodný nápad přejít od smyslového k hypotéze? Tušili snad, že pomocí hypotézy mohou objevit i to, co nelze znázornit, k čemu lze dospět jen myšlením, např. k uvedené nesouměřitelnosti? Pro to stále nemáme historické vysvětlení. Abychom vysvětlili vznik deduktivní matematiky historicky, musíme prozkoumat podrobněji metody důkazů oněch nejstarších vět. Toto zkoumání osvětluje některé charakteristické rysy starořecké matematiky.

Především nás bude zajímat, zda (jak tvrdí cit. K. v. FRITZ: Archai v řecké matematice) rozvoj dokazovacích metod v matematice souvisí s rozvojem logiky. Platí to

---

*) Pro zjednodušení úvahy je tu použito moderního pojmu místo původního: stranu a úhlopříčku čtverce nelze změřit toutéž jednotkovou úsečkou.

i pro nejstarší matematické věty? Vracela se opravdu už v 5. stol. př. n. l. složitější věta k jednodušším větám, resp. k definicím jako premisám? (Např. v IX. knize je věta o součtu lichých čísel dokázána pomocí věty o součtu sudých čísel a definice lichého, resp. sudého čísla.)

Teorie o původu deduktivní vědy v tomto způsobu důkazu se zdá být správná. Je však třeba si uvědomit, že vedle přímého důkazu se používalo už v nejstarším období i důkazu nepřímého. I když staré důkazy některých vět Euklides přepracoval, aby je přizpůsobil celkové skladbě díla, konstatují i pozdější rekonstrukce Euklidových Elementů, že značná část důkazů je nepřímých (O. Becker v cit. díle Die Lehre von Geraden u. Ungeraden... uvádí např. 8 nepřímých důkazů ze 17 v nauce o sudých a lichých číslech. Z prvních 36 vět VII. knihy je jich 15 dokázáno nepřímo, a i v některých zdánlivě přímých důkazech v VII. knize lze při podrobnějším průzkumu zjistit původní myšlenkový pochod nepřímého důkazu, který byl později změněn na přímý, např. věta 19.) Tento značný počet nepřímo dokazovaných vět je natolik nápadný, že se vynořuje myšlenka, zda tak časté použití nepřímého důkazu nemá určitý zvláštní význam. Metoda nepřímého důkazu objasňuje zčásti i psychologické podklady matematického zkoumání, ale otvírá i zcela novou perspektivu historické otázce, jak se asi zrodila myšlenka deduktivního důkazu. Neplyne snad z častého použití nepřímého důkazu, že byl od počátku nejpodstatnějším prostředkem deduktivní matematiky? K odpovědi na tuto otázku si všimněme příkladů nepřímého důkazu v nejstarší řecké matematice. Nejstarším známým nepřímým důkazem je důkaz 30. věty z IX. Euklidovy knihy: Je-li sudé číslo dělitelné lichým číslem, je jím dělitelná i jeho polovina. Důkaz této věty vychází z předchozí 29. věty, že součin dvou lichých čísel je liché číslo, a to po nepřímém důkazu, že součin sudého a lichého čísla může být jen sudé číslo. Nebudeme zde sledovat zcela známý myšlenkový pochod nepřímého důkazu. Uvědomme si jen v souhrnu několik charakteristických vlastností, které nám umožní domněnku o souvislosti deduktivní matematiky s rozvojem logiky. Nějaké tvrzení je buď pravdivé, nebo nepravdivé a vedle těchto dvou možností neexistuje třetí (známý logický požadavek tertium non datur). To znamená, že důkaz nějakého tvrzení je totéž, co vyvrácení jeho opaku. Významné pro nepřímý důkaz je pojetí, že vnitřní spor myšlení je známkou jeho nesprávnosti, tj. správná je taková mašlenka, která si sama neodporuje. Tedy závěrem: tomu, kdo prováděl nepřímý důkaz, muselo být známé logické kritérium pravdy — bezespornost. K ilustraci této teze uveďme ještě jeden příklad nepřímého důkazu z nejstarší řecké matematiky, který nám pomůže osvětlit problém, jak se vůbec přišlo na myšlenku matematické definice. Je to důkaz 31. věty ze VII. knihy, o níž bylo prokázáno (cít. van der Waerden), že pochází z 5. stol. př. n. l.: „každé složené číslo je dělitelné některým prvočíslem". K důkazu této věty byly známy tyto definice ze VII. knihy:

Def. 2: Číslo je (konečné) množství jednotek.

Def. 11: Prvočíslo je číslo, které má za dělitele jen jednotku.[1])

Def. 13: Složené číslo (ne prvočíslo) je číslo, které má nějaké jiné číslo za dělitele.[2])

Nebudeme opět sledovat průběh Euklidova důkazu, všimněme si jen základní myšlenky, že žádné jakkoliv velké číslo nemůže mít nekonečně mnoho stále menších a menších dělitelů. Tato myšlenka odkrývá při přesnějším zkoumání důkazu pozoruhodnou historickou souvislost. Kde hledat v 5. stol. př. n. l. opak tohoto tvrzení, resp. něco, co by mu logicky aspoň odpovídalo? Jak známo, eleat Zénón tvrdil, že každá úsečka má nekonečně mnoho stále menších dělitelů $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$...[3]) Autor důkazu nevyvrací Zénónovo tvrzení, jen zdůrazňuje, „že podobný proces není v oblasti čísel[4]) možný, neboť by odporoval definici čísla". Můžeme proto — aspoň v tomto případě — formulovat matematickou definici tak, že je zárukou bezespornosti každého tvrzení, jež je z ní odvozeno, jež se o ně opírá. Spojení motivu bezespornosti s metodou nepřímého důkazu může vést k důležitým závěrům. Je-li totiž bezespornost jediné logické kritérium pravdivosti nějakého tvrzení, musí být nepřímý důkaz primární druh důkazu a naproti tomu přímý důkaz sekundární.[5]) Co vlastně rozumíme v tomto vztahu slovy primární a sekundární? Konstatovat pravdivost nějakého tvrzení logickou cestou znamená u přímé metody důkazů navázat na jiné tvrzení, o jehož pravdivosti jsme se už dříve přesvědčili, přesněji řečeno, z něhož vyplývá pravdivost dokazovaného tvrzení. Zřejmě však můžeme přímým důkazem vřadit pravdivá tvrzení do jakéhosi nekonečného řetězu „pravd", v němž nikdy touto metodou nelze najít jen logickými prostředky poslední pravdivý, resp. nepravdivý článek. Proto tu mluvíme o druhotném logickém důkazu. Naproti tomu je metoda nepřímého důkazu prvotním druhem, neboť vskutku vždy existuje aspoň jedno tvrzení, jehož nepravdivost můžeme zjistit toliko logickými prostředky. Žádné tvrzení totiž, které si samo odporuje, nemůže být, bez ohledu na jeho vnitřní obsah, pravdivé. A právě nepřímý důkaz se vždy o tento prvotní logický poznatek opírá. Tvoříme totiž vždy závěry ze zkoumaného tvrzení (tj. uvažujeme všechny důsledky vyslovené věty) potud, pokud nedojdeme ke zřejmému sporu. Jen tak se totiž zdaří nepřímý důkaz. A z logické priority nepřímého důkazu vůči přímému lze soudit, že i historicky předcházel druh nepřímého důkazu přímému.

Vraťme se nyní k závěrům o dějinách řecké matematiky, které odtud vyplývají. Nejen existence, ale časté použití nepřímého důkazu v pythagorovské matematice 5. stol. př. n. l. svědčí zřejmě o tom, že řeckým matematikům této doby byla velmi dobře známa značně vyvinutá logika. Bez existující a vědomě užité logiky by zřejmě nebyla možná deduktivní matematika.

A tu se opět vynoří otázka: kde se tu vzala logika? Převzali ji matematikové odjinud nebo si ji vytvořili sami, zabývajíce se zkoumáním svého vlastního předmětu? Uvažme obě možnosti. Připustíme-li, že pythagorovci sami vynalezli logiku, ptejme se, co je

---

1) Rozuměj: dělitel různý od čísla samého.

2) Rozuměj: vedle dělitele 1.

3) Smysl zápisu je nám jasný, i když v dnešním pojetí méně přesný.

4) Rozuměj: celých.

5) Užijme těchto názvů, i když zatím nevíme, jsou-li v souhlasu s historickým vývojem.

vedlo k této dosud nepěstované myšlenkové činnosti? Nezdá se být pravděpodobné, že by logika vyrostla z empirických znalostí předchozí matematiky, že by k jejímu zrození vedly praktické důvody, ale spíše myšlenkové, rozumové zájmy, které matematici uplatnili na svém speciálním materiálu. Ale v tomto případě zůstává nevyjasněno, jak. Druhá možnost, totiž že ji převzali, je nesporně mnohem pravděpodobnější už proto, že lze nalézt historické souvislosti s logikou eleatů ze 6. a z počátku 5. stol. př. n. l., kteří působili v nedaleké jižní Itálii. Parménidés byl první, kdo zavedl v dějinách evropského myšlení tezi, že jediné kritérium pravdivosti je bezespornost. A způsob, jak poukazem na vnitřní spor popřít opačné tvrzení, byl typický pro eleaty.

Uvedli jsme už onu základní změnu v myšlení pythagorovských matematiků, totiž, že se nespokojovali s empirickou, názornou evidencí pravdy, ale že se snažili i nejzřejmější fakty „deduktivně" dokázat, ba možno říci, že se k praxi přímo obraceli zády. A právě toto nepochopitelné, protismyslné stanovisko, nedbat praktických zkušeností v případě takových znalostí, které z praktických zkušeností vyplývaly a byly určeny praktické potřebě, se rázem objevuje ve zcela jiném, přijatelném světle, uvědomíme-li si, že taková koncepce byla vlastně dědictvím eleatské logiky. Ta objevila vnitřní spor ve smyslových zkušenostech a odvrátila se od pouhých smyslových prostředků zkoumání pravdy.

Pythagorovskými matematiky byla nastoupena nová cesta poznávání, zkoumání pravdy ne pouhou smyslovou evidencí, ale ryze duševní činností.

Matematika byla v předřecké době toliko souhrnem praktických znalostí, odpovídajících zkušenosti, smyslovému poznání. Tím, že první pythagorovci na konci 6. nebo nejpozději v 1. polovině 5. století se pokusili použít logické metody eleatů na znalosti dotud pouze empirické, došlo k překvapujícímu rozvoji matematiky, která se tak stala deduktivní vědou v dnešním slova smyslu. Ale i naopak: logika tak našla svou nejvlastnější oblast působnosti. Odtud se nadále datuje nejenom pomoc logiky matematice, ale i přispění matematiky k rozvoji logiky. Proto také logika pozdějších matematiků je v mnohém vyspělejší než logika aristotelská.

Fotografie v nepřirozených barvách

Tak by se mohla nazývat fotografie na tzv. spektrozonální citlivé vrstvy; film je pokryt dvojitou vrstvou, jejíž jedna složka je citlivá ve viditelné a druhá v infračervené oblasti a zpracovává se jako barevný film tak, že obraz vytvořený jednou ze složek se zbarví např. červeně a druhý zeleně. Barvy výsledného obrazu naprosto neodpovídají skutečným, ale obraz spojuje v sobě rozlišovací schopnost infračervené i obyčejné citlivé vrstvy. Tohoto materiálu se používá v SSSR k leteckým snímkům.

Ivan Soudek