Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Věra Jelínková

Nekonečně malá veličina v základech matematické analýzy v 17. a 18. století

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 13 (1968), No. 3, 151--161

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137623`

NEKONEČNĚ MALÁ VELIČINA V ZÁKLADECH MATEMATICKÉ ANALÝZY V 17. A 18. STOLETÍ

VĚRA JELÍNKOVÁ, Praha

V dějinách matematiky vytváří 17. a 18. století období, v němž matematici začali studovat ve vzrůstající míře proměnné veličiny. Nejvýznamnějším odvětvím se postupně stal infinitezimální počet, jehož bouřlivý rozvoj zejména v 18. století daleko zastínil ostatní obory. Přece však jeho základy zůstávaly velmi vratké, neboť se opíraly o logicky nepropracované a nejasné pojmy. Jedním z těchto pojmů byla i tzv. „nekonečně malá veličina". V tomto článku se budeme snažit o načrtnutí hlavních sporů a snah o její bezesporné pojetí na konci 17. a během 18. století, přičemž důraz budeme klást mimo jiné na to, abychom nezkreslovali význam původních textů.

* * *

Analýza nekonečně malých veličin vznikla téměř současně ve dvou různých, navzájem nezávislých formách. Jejími zakladateli byli Isaac NEWTON (1643—1727) a Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646—1716). Časově první vznikla Newtonova „metoda fluxí", avšak Leibnizův počet diferenciálů byl publikován dříve.

Newton vytvořil svůj diferenciální a integrální počet v letech 1665—1666 v souvislosti se studiem mechaniky, se studiem pohybu. Výklad tohoto počtu podal v práci „*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*", která však vyšla tiskem v anglickém překladu teprve v roce 1736, tj. devět let po autorově smrti. Newton zde formuluje obě základní úlohy počtu nekonečně malých veličin:

I. Je-li v každém časovém okamžiku známa délka proběhnuté dráhy, je úkolem najít rychlost pohybu v daném časovém okamžiku.

II. Je-li známa rychlost pohybu závislá na čase, je úkolem najít délku dráhy za určitý čas.

Označí-li se dráha jako z a čas jako t, znamená to v dnešní terminologii v prvém případě derivování funkce $z = \mathrm{f}(t)$, tj. určení výrazu

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t};$$

ve druhém případě jde o nalezení $z = \int \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ z diferenciální rovnice prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \varphi(t).$$

Čas je u Newtona jen pomocným pojmem a slouží spíše jako příklad nezávisle proměnné veličiny. Nekonečně malé přírůstky takovéto veličiny označuje písmenem o, postupně vzrůstající nebo ubývající veličiny nazývá „fluenty" (z), rychlosti, s nimiž se veličiny mění „fluxe" ($\dot{z}$) a *nekonečně malé přírůstky* veličin (fluent) jsou „momenty fluxí" ($\dot{z}o$). Ačkoli Newton stále používá pojmu *nekonečně malé* veličiny, přesněji jej nedefinuje. Z jeho výpočtů jen vyplývá, že členy násobené činitelem o pokládá ve srovnání se členy, jež o neobsahují, za nuly. Má-li z daného vztahu mezi fluentami $f(x, y, z, \ldots) = 0$ (1) určit vztah mezi fluxemi, vytváří výraz

$$f(x + \dot{x}o\,, \quad y + \dot{y}o\,, \quad z + \dot{z}o\,, \ldots) = 0\,,$$

k jehož zjednodušení použije vztahu (1) a dostane vztah pouze mezi násobky nekonečně malých veličin. Potom provede dělení výrazem o a nakonec zanedbá všechny členy, v nichž se ještě o vyskytuje, neboť podle něho je možno považovat je ve srovnání s ostatními členy bez o za pouhé „nic". Nakonec dostává hledanou rovnici ve tvaru

$$F(x, y, z, \ldots, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots) = 0\,.$$

Není třeba zvlášť zdůrazňovat, že Newton používá své metody pouze tam, kde vede k cíli, totiž v podstatě jen pro algebraické funkce $f(x, y, z, \ldots)$.

Svou metodu Newton aplikoval na určování maxim a minim, k nalezení tečen, středu křivosti a poloměru křivosti křivky a nakonec ke kvadraturám ploch a rektifikaci oblouků. Se zveřejněním výsledků své práce však Newton nijak nepospíchal a velmi neochotně dával souhlas k publikaci i později, kdy propukl spor mezi ním a Leibnizem o prvenství objevu diferenciálního a integrálního počtu. Je možné, že příčinou toho byla kromě nedokonalosti metod řešení i nedostatečná logická odůvodněnost teorie fluxí. Newton si byl tohoto nedostatku dobře vědom, ale nedovedl se s ním vyrovnat. Názory na odůvodnění teorie fluxí několikrát změnil. V hledání východiska vytvořil *„metodu prvních a posledních poměrů"*, jakýsi prvopočátek teorie limit. Metoda záleží ve vyšetřování limitních poměrů *„sotva vznikajících"* (první poměry) a *„již již mizejících"* (poslední poměry) veličin. Říká: „Poslední poměry, jimiž veličiny mizí, nejsou ve skutečnosti poměry posledních veličin, nýbrž hraniční hodnoty, k nimž poměry neomezeně ubývajících veličin stále konvergují a k nimž se blíží více, než je libovolný předem daný rozdíl, který však nepřekročí ani skutečně nedosáhnou, dokud se veličiny nestanou nekonečně malými" ([22], 112).

A dále ještě uvádí: „Veličiny a poměry veličin, které v libovolném konečném čase se stále blíží stejné hodnotě a v průběhu tohoto času se k ní přiblíží až na libovolný předem daný rozdíl, budou si nakonec rovny".

Takovýto výklad nebyl pro Newtonovy současníky zcela jasný. Další osud teorie fluxí je proto spojen s ostrým bojem, zaměřeným zejména na její základy.

* * *

Leibniz pracoval na svém diferenciálním počtu v letech 1673–1676. V roce 1676 si začal dopisovat s Newtonem. V té době již věděl, že Newton pracuje na podobných problémech jako on. Proto jej seznámil se svými výsledky a doufal, že Newton učiní totéž. Ten však velmi pečlivě skrýval své objevy a přestal na Leibnizovy dopisy odpovídat. Leibniz pracoval tedy dále zcela samostatně. Snažil se ospravedlnit svůj objev buď logicky přísnou dedukcí, nebo dostatečně velkým množstvím praktických výsledků a úspěchů. Veřejnost seznámil se svým počtem až v roce 1684, kdy v lipském časopise „*Acta Eruditorum*" publikoval první článek o analýze nekonečně malých veličin s názvem „*Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*". Stať nemá ani deset stránek a nejsou v ní důkazy. Ale diferenciální počet se tu prvně objevuje ve tvaru, který připomíná jeho dnešní podobu. Leibniz nazval svůj algoritmus „*calculus differentialis*" – diferenciální počet ([14], 6). Ve srovnání s dřívějšími metodami považoval za jeho přednost, že se dá použít na lomené a iracionální výrazy stejně jako na celé a bez obtíží je možno ho aplikovat i na křivky transcendentní ([14], 7).

Ve svých úvahách vycházel Leibniz z problému sestrojení tečny ke křivce. Tečna je u něho přímka, která prochází dvěma body křivky, které jsou nekonečně málo od sebe vzdáleny. Podle Leibnize lze tuto nekonečně malou vzdálenost vyjádřit vždy jako funkci diferenciálu $\mathrm{d}x$ ([14], 7). S diferenciálem pak nakládal Leibniz značně libovolně. Někdy považoval diferenciál argumentu $\mathrm{d}x$ za úplně libovolnou veličinu a $\mathrm{d}y$ definoval vztahem $\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x/St$, kde St subtangenta křivky v bodě o souřadnicích x, y ([14], 3).

Na jiném místě zase pokládá $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ za veličiny úměrné okamžitým přírůstkům hodnot x a y ([14], 6).

V práci jsou uvedena všechna základní pravidla derivování. Je-li a, b konstantní a x, y, v, w, z jsou proměnné veličiny, pak

$$\mathrm{d}a = 0\,,$$

$$\mathrm{d}(ax) = a\mathrm{d}x\,;$$

pro $y = v$ je

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}v\,;$$

$$\mathrm{d}(z - y + w + x) = \mathrm{d}z - \mathrm{d}y + \mathrm{d}w + \mathrm{d}x\,;$$

$$\mathrm{d}(xv) = x\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}x\,;$$

$$\mathrm{d}\,\frac{v}{y} = \frac{\pm\, v\,\mathrm{d}y \mp y\,\mathrm{d}v}{yy}\,;$$

$$\mathrm{d}\,x^a = ax^{a-1}\,\mathrm{d}x\,; \quad \mathrm{d}\,\frac{1}{x^a} = -\,\frac{a\,\mathrm{d}x}{x^{a+1}}\,;$$

$$\mathrm{d}\,\sqrt[b]{(x^a)} = \frac{a}{b}\,\mathrm{d}x\,\sqrt[b]{(x^{a-b})}\,; \quad \mathrm{d}\,\frac{1}{\sqrt[b]{(x^a)}} = -\,\frac{a\,\mathrm{d}x}{b\,\sqrt[b]{(x^{a+b})}}$$

([14], 3–6).

Nutno však poznamenat, že ve studii „Nova Methodus..." se Leibniz ještě zdržel přesného výkladu své základní myšlenky a také přešel mlčením integrální počet, jehož hlavní princip v té době již dávno znal. Přišel totiž již dříve na myšlenku sčítání diferencí dx a dy a všiml si, že k součtům těchto diferencí vedou i úlohy o kvadraturách. Vyřkl názor, že řešení inverzních úloh k úlohám o tečnách lze převést na kvadratury. Připadl tak na vzájemnou souvislost mezi derivováním a integrováním. Integrálnímu počtu byla věnována práce, která vyšla až za dva roky po studii „Nova Methodus...", tedy roku 1686, a nazývala se *„De geometria recondita"*. Jsou v ní vyložena pravidla integrace některých elementárních funkcí.

* * *

Svými pracemi dali Newton a Leibniz základ nové matematické disciplíně, jejíž rozvoj a výsledky byly vskutku udivující. Rychle rostl počet úloh řešených jejich metodami. Ale tato nová nauka nesla ve svých základech nerozřešený spor mezi rostoucími praktickými úspěchy a logickým zdůvodněním operací s nekonečně malými veličinami. Zranitelnost takového stavu byla dosti citelná a projevila se velmi brzy. Proti *„počtu nekonečně malých"* vystoupili protivníci, kteří pochybovali nebo zavrhovali jeho metody, výsledky a zvláště pak výklad základních pojmů.

Leibnizův diferenciální počet měl hodně odpůrců. Nejzaníceněji z nich si vedl Bernhard NIEUWENTIJT (1654—1718). Jeho výtky nepatřily jen Leibnizovi, ale všem přívržencům diferenciálního počtu, zvláště pak také bratřím Bernoulliům a l'Hospitalovi. Kritika infinitezimálního počtu je obsažena ve dvou Nieuwentijtových spisech: *„Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia"* (1694) a *„Analysis infinitorum"* (1695). Nieuwentijt má k diferenciálnímu počtu v podstatě tři výhrady:

I. Leibnizův diferenciální počet trpí stejnými potížemi jako ostatní infinitezimální metody. Považuje veličiny, které jsou jen nekonečně malé, někdy přímo za nuly.

II. Chybí aplikace diferenciálního počtu na exponenciální funkce.

III. I když lze pochopit a přijmout první diferenciál dx, následující diferenciály d^2x, d^3x, ... nemají smysl.

Leibniz na Nieuwentijtovy výpady odpověděl přesnějším objasněním svých idejí, které vyšlo v Journal des Sçavans (1702) pod názvem *„Justification du calcul des infinitésimales etc..."*. Leibniz nejprve podal jasnou představu o funkcionální závislosti dvou proměnných veličin a do základů svého počtu nekonečně malých postavil „princip spojitosti". V souhlase s tímto principem rozdíl dvou veličin stávajících se sobě rovnými není již „nic" a nalézá se ve „stavu mizení". Dále ukazuje, že dvě mizející veličiny mohou mít konečný poměr, takže nehledě na jejich společné mizení, zachová se mezi nimi určitý rozdíl.

Na druhou námitku Nieuwentijtovu odpověděl Leibniz odvozením diferenciálu pro případ exponenciální funkce. Z kvadratury hyperboly mu bylo známo, že

$$\int \frac{dx}{x} = \log x .$$

Je-li dále $x^v = y$, pak z rovnice $v . \log x = \log y$ za použití integrální formule pro logaritmus vyplývá, že

$$v \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} .$$

$$v \frac{dx}{x} + dv \log x = \frac{dy}{y} .$$

Z toho ovšem po dosazení za y plyne, že

$$d(x^v) = x^v \frac{v}{x} dx + x^v \log x \, dv = vx^{v-1} dx + x^v \log x \, dv .$$

([4], III, 232). Při zavedení vyšších diferenciálů Leibniz poznamenává, že existuje nekonečně mnoho rozdílných řádů veličin, přičemž poměr veličiny některého řádu k veličině bezprostředně předcházejícícho nebo následujícího řádu lze vyjádřit pouze nulou nebo nekonečnem, zatímco poměr veličin téhož řádu může nabývat libovolných číselných hodnot. Utváří poměr $dx/dy = x/a$, kde a a dy znamenají konstanty. Odtud vypočítává $dx = x\,dy/a$ a derivováním dostává $ddx = dx\,dy/a = dx\,dx/x$, popřípadě $ddx/dx = dx/x$. ([4], III, 256). Tedy ddx se chová ku dx jako dx ku x neboli vyšší diferenciál je vůči nižšímu právě tak nekonečně malý jako první diferenciál vůči konečné veličině. Tímto způsobem oponoval Leibniz třetí Nieuwentijtově námitce, že vyšší diferenciály jsou něco nesmyslného.

Největším odpůrcem Newtonovy teorie fluxí byl irský arcibiskup Georg BERKELEY (1685–1753). Vydal v roce 1734 pojednání „*The Analyst*", ve kterém se snažil dokázat, že analýza stejně jako i ostatní vědy nemá solidnější základ než bohosloveсtví. Hlavní jeho odpor byl namířen proti fluxím, zvláště pak fluxím vyšších řádů. Že Newton označil fluxe jako rychlosti, s nimiž se veličiny mění, Berkeley ještě chápal. Nechápal však, co bude druhá, třetí fluxe atd., nechápal, co to znamená rychlost rychlosti. Také apeloval na zdravý lidský rozum a tázal se, jak je možno uvažovat o veličinách, které nejsou ani konečné ani nekonečné, o poměru ničeho k ničemu, o součinu konečné veličiny s ničím. Velkým podnětem k těmto pochybám bylo Newtonovo vypočtení fluxe mocniny x^n. Podle Newtona se nalezne z rozdílu

$$(x + o)^n - x^n = nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}o^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 . 3} x^{n-3}o^3 + \dots .$$

Dělí-li se přírůstek veličiny x^n činitelem o (předpokládá-li se tedy $o \neq 0$) a zanedbají-li se všechny členy, jež ještě o obsahují (tedy jako by $o = 0$), dostane se pro fluxi x^n

výraz nx^{n-1} ([4], III, 740). Z postupu je vidět, že v pojetí podstaty veličiny o existuje ohromný rozpor, který právě podnítil Berkeleye k ostrým výtkám. Když totiž veličina x obdržela při změně přírůstek o, musí tento přírůstek jako takový existovat, namítal Berkeley, a není tu žádné oprávnění považovat veličinu o, z jejíž nenulové existence se vychází, náhle za rovnou nule.

Také Berkeleyova kritika vyvolala živou polemiku, která pokračovala mezi matematiky s velkou intenzitou po celé 18. století. Ostré diskuse vedly sice někdy až k odmítání nové matematické disciplíny, ale na druhé straně měly ten klad, že vedly k pokusům vyložit základní pojmy infinitezimálního počtu bez logických sporů.

* * *

Tyto pokusy byly vedeny celkem třemi směry: První směr je charakteristický svým „naivním" pojetím idferenciálu $\mathrm{d}x$. Počítá s ním bez bližšího vysvětlení, někdy mu připisuje vlastnosti konečných veličin, tedy také $\mathrm{d}x \neq 0$, a jindy zase považuje $\mathrm{d}x = 0$.

Druhá skupina se snaží překlenout tyto rozpory. Existují v ní dvě tendence. Jednak je to pojetí Eulerovo, který se vyhýbá nekonečně malé veličině a pracuje jen s konečnými přírůstky Δx, jednak jsou tu vědci, zabývající se limitním přechodem a připravující tak půdu pro definici limity a derivace, jak ji zavedli později CAUCHY a BOLZANO.

Třetí skupinu tvoří matematici odmítající pojem nekonečně malé veličiny vůbec a snažící se odůvodnit infinitezimální počet algebraickou cestou.

Názory první skupiny jsou v podstatě obsaženy ve velmi rozšířené l'Hospitalově učebnici diferenciálního počtu. Nekonečně malá veličina je tu charakterizována některými vlastnostmi, vyjádřenými v podobě jakýchsi tehdejších axiomů. Nejpodstatnější z nich jsou tyto dva:

I. Dvě veličiny, které se liší jedna od druhé o nekonečně malou veličinu, nechť jsou považovány za sobě rovné.

II. Veličina, která se nekonečně málo zmenší nebo zvětší, nechť je považována za konstantní ([7], 12).

V této koncepci není přímo řečeno, že nekonečně malá veličina je nula, v konkrétních případech se však za ni považuje. Sama o sobě je pokládána za veličinu konstantní, větší než nula, avšak (v čemž je rozpor) menší než libovolná konečná veličina. Je omezená všemi konečnými veličinami shora. Jinak jsou jí připisovány vlastnosti, jaké mají všechna čísla, s nimiž se tehdy reálně počítalo. Proto aritmetické operace, definované původně pro přirozená čísla a přenášené i na ostatní číselné obory, se mechanicky přenášejí i na ni. Z předpokladu, že nekonečně malá veličina má vlastnosti konečné veličiny plyne, že je také do nekonečna dělitelná. Neustále opakovaným dělením se dostávají nekonečně malé veličiny vyšších řádů. Pokud se týče jejich vzájemných vztahů, ukazuje se, že nekonečně malou veličinu vyššího řádu možno zanedbat proti nekonečně malé nižšího řádu a tu lze opět zanedbat vůči veličině konečné. Žádné úvahy patřící k tomuto naivnímu pojetí infinitezimálního počtu však nevedly k řádnému zdůvodnění, kdy lze pokládat nekonečně malou veličinu za rovnou nule a kdy nikoli.

Dalším, kdo se pokusil objasnit podstatu infinitezimálního počtu, byl Leonard EULER. Ve vývoji Eulerových názorů na podstatu nekonečně malé veličiny lze postřehnout dvě tendence. První z nich je vyjádřena v „*Introductio in analysin infinitorum*". V této práci v souvislosti se studiem exponenciální funkce Euler říká: „Protože platí $a^0 = 1$, plyne z tohoto a z předpokladu, že a je číslo větší než jedna, a tedy při vzrůstání exponentu čísla a současně roste hodnota mocniny, že když exponent nekonečně málo převýší nulu, mocnina nekonečně málo převýší jednotku. Jestliže ω bude nekonečně malé číslo, tj. tak malý zlomek, že se jen tak tak nerovná nule, pak $a^\omega = 1 + \psi$, kde ψ bude také nekonečně malé". ([5], 21).

Zde je s plnou určitostí řečeno, že nekonečně malá veličina není rovna nule. Je to však názor, který Euler zastával asi v letech 1744–45. Později, když psal „*Institutiones calculi differentialis*", jej však změnil.

Eulerova učebnice diferenciálního počtu byla prvně vydána roku 1755 petrohradskou akademií. V ní Euler dokazuje, že nekonečně malá veličina je konstantní veličina rovná nule. Zavádí pravidla pro počítání s těmito „nulami". O poměru těchto nul tvrdí, že může nabývat libovolných hodnot. K tomuto tvrzení dospívá úvahou o „aritmetickém" a „geometrickém" porovnání jejich vztahu. Zatímco aritmeticky platí $n \,.\, 0 = 0$, geometricky ovšem lze tento vztah transformovat do úměry $n : 1 = 0 : 0$ pro libovolná n. To vedlo Eulera k závěru, že dvě nuly $n \,.\, 0$ a 0 nejsou si ve všech případech rovnocenné. Dvě nuly, čímž vlastně míní nekonečně malé veličiny, pak mohou mít libovolný poměr, ačkoli aritmeticky jsou si rovny ([5], 91).

V duchu tohoto srovnávání jsou pak odvozena všechna pravidla. Je-li a konečné, pak $a\,\mathrm{d}x = 0$; $a\,\mathrm{d}x$ je tedy také nekonečně malá, aritmeticky rovna $\mathrm{d}x$, geometricky však nikoli, neboť poměr $a\,\mathrm{d}x : \mathrm{d}x = a : 1$ je různý od jedné; $a \pm n\,\mathrm{d}x = a$ platí geometricky i aritmeticky. Zde Euler poznamenává, že nekonečně malé $n\,\mathrm{d}x$ je ve srovnání s konečnými veličinami ničím a je možné je zanedbat ([5], 92).

Zavádí také jako mocniny nuly diferenciály vyšších řádů $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}x^3$, $\mathrm{d}x^4, \ldots$, které vůči konečným veličinám i vůči $\mathrm{d}x$ opět možno zanedbat. Pak se také výraz $\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}x^2$ vůči $\mathrm{d}x$ nachází ve stavu rovnosti jak geometrické, tak aritmetické ([5], 92) a platí

$$a\,\mathrm{d}x^m + b\,\mathrm{d}x^n = a\,\mathrm{d}x^m\,, \quad \text{je-li} \quad m < n \;([5], 93)\,.$$

Je zajímavé si také všimnout, jak Euler zavádí nekonečně velkou veličinu. Pro něho je výsledkem dělení konečné veličiny veličinou nekonečně malou: $a/\mathrm{d}x = \infty$ a analogicky i $a/\infty = \mathrm{d}x$ ([5], 95).

V tomto pojetí nekonečně malé veličiny a nekonečna je Euler velmi blízký zastáncům naivního směru. Stejně jako pro ně, je pro Eulera nekonečně malá kvalitativně něco úplně stejného jako třeba $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ S naivisty se shoduje i v tom, že s nekonečně malou počítá jako s každým normálním reálným číslem.

Euler se snaží v podstatě vyhnout pojmu nekonečně malé veličiny. Podle něho také ona není vlastním předmětem studia diferenciálního počtu. Tento předmět vymezuje v úvodu své učebnice diferenciálního počtu.

„Je to metoda určení poměru mizejících přírůstků libovolných funkcí k mizejícím přírůstkům jejich argumentů, kterých ve svém průběhu nabývají" ([5], 39). Pro ilustraci uvádí příklad funkce x^2, jejíž argument vzroste o mizející přírůstek ω. Pak o poměru přírůstku x^2 ku ω platí ([5], 39):

$$\frac{2x\omega + \omega^2}{\omega} = \frac{2x + \omega}{1}.$$

A protože Euler pokládá $\omega = 0$, je tento poměr konečný a rovný $2x$. Diferenciální počet se tedy podle Eulera zabývá konečnými veličinami.

Přes to, že se Euler ve svém výkladu vlastně přiklání k naivnímu pojetí diferenciálního počtu, cítí již podvědomě nutnost limitního přechodu při chápání infinitezimálních veličin, ale neumí ho přesně vyjádřit. Svědčí o tom například výrok, který uvádí v souvislosti s již uvedenými přírůstky funkce x^2 a jejího argumentu x: „Je nutno si představit, že tyto přírůstky se stávají menšími a menšími a tehdy nacházíme, že jejich poměry se stále více a více přibližují k jakési určité hranici, které dosahují však teprve tehdy, když se úplně obracejí v nulu. Tato hranice, která tvoří jakoby poslední poměr uvedených přírůstků, je skutečným předmětem diferenciálního počtu" ([5], 41).

Ke vzniku prací zabývajících se limitními přechody dala podnět Berkeleyova kritika Newtonovy teorie fluxí a metoda prvních a posledních poměrů. Jedním z prvních, kdo začali tuto teorii rozpracovávat, byl B. Robins (1707—1751), jenž těmto problémům věnoval spis „*A discourse concerning the... methods of fluxions...*" a tři stati v časopise „Republic of letters" (říjen a listopad 1735 a duben 1736). Robins definoval pojem rovnosti v limitních případech: „Každá konstantní veličina, ke které se přibližuje, nikdy ji nepřestoupíc, spojitě se zvětšující nebo zmenšující proměnná, zkoumá se jako veličina, jíž se nakonec stává proměnná rovnou, jestliže předpokládáme, že rozdíl mezi proměnnou a konstantní limitou při jejím přiblížení k limitě může být menší než libovolná daná vhodně malá veličina" ([23], 155). A dále: „Přesně tak se mohou blížit k určité limitě poměry; poměr se nakonec zkoumá jako totožný s takovou limitou" ([23], 155).

V roce 1742 přišel Colin Maclaurin (1698—1746) se svou znamenitou prací „*A Treatise of Fluxions*". Vykládal pojem limity pomocí učení o tvoření veličin prostřednictvím pohybu. Formuloval dva základní principy.

I. Jestliže dvě veličiny vznikající pohybem se neustále rovnají, pak se neustále rovnají pohyby, které je vyvolávají.

II. Jestliže naopak jsou si stále rovny ony pohyby, pak si budou vždy rovny veličiny vyvolané jimi za tentýž čas ([23], 156).

Pomocí pohybu Maclaurin objasňoval i fluxe vyšších řádů, a to zavedením zrychlení různých řádů.

Z Newtonovy teorie fluxí vyšel i mladší současník Eulera Jean le Rond D'ALEMBERT (1717—1783). Své názory podrobně vyložil ve statích „*Différentielle*" a „*Limite*". D'Alembertova metoda se jen nepatrně lišila od Newtonovy metody prvních a posledních poměrů, ale d'Alembert přiblížil toto pojetí matematikům Evropy tím, že používal Leibnizovy symboliky. Zároveň podrobněji rozvinul Newtonovy myšlenky a dal jim formu metody limit ve vlastním pojetí: „Jedna veličina je limitou druhé veličiny, jestliže tato druhá se může přiblížit k první více, než je libovolná daná veličina, ať je tato poslední jakkoli malá, přičemž však přibližující se veličina nikdy nemůže předstihnout veličinu, ke které se blíží". Aby se vyhnul operacím s nulami, vyslovil d'Alembert ještě požadavek, že limita se nesmí ztotožnit s žádnou hodnotou proměnné. Jeho teorie však rovněž nebyla bez chyb a jedna z nejzávažnějších se týkala výpočtu derivace, který prováděl následujícím postupem: K proměnnému argumentu x přidal konečný přírůstek Δx, čímž funkce $y = f(x)$, která je pro d'Alemberta dána konečným analytickým výrazem složeným z elementárních funkcí, vzrostla o konečný přírůstek Δy. Poměr $\Delta y/\Delta x$, který je z daných vztahů sestaven, pak dále zjednodušuje. Při konečném kroku dosadí $\Delta x = 0$. Tato metoda je však založena na předpokladu, že je již znám rozklad $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ na řadu podle mocnin Δx, což je ve skutečnosti ekvivalentní tomu, že je již nalezena samotná derivace.

V roce 1784 vypsala berlínská akademie věd, jejímž presidentem byl tehdy Joseph Louis LAGRANGE (1736—1813), konkurs s cílem vytvořit jasnou a přesnou teorii „nekonečně malého" a „nekonečně velkého". Požadovalo se, aby byl předložen takový přesný a jasný matematický výklad, aby jeho studium nečinilo potíže a nebylo dlouhé. V konkursu zvítězil ženevský matematik S. L'HUILIER (1750—1840). Důsledně rozvinul počet „nekonečně malých", vycházeje při tom z Robinsových představ o limitě. Jeho spis vyšel roku 1786 v Berlíně pod názvem „*Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*", L'Huilier zdůrazňoval, že $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ nutno vyšetřovat ne jako zlomek, ale jako symbol limity zlomku, zejména $\lim\limits_{\Delta x = 0} \Delta f(x)/\Delta x$. Přesto, že l'Huilierova práce získala v konkursu první cenu, nedosáhla takového cíle, který měl při zadávání problému Lagrange na mysli.

* * *

Velkou nevýhodou teorie limit bylo také to, že neměla žádný algoritmický aparát, který by sloužil k nalezení limit. Proto se v 18. století objevila ještě jedna koncepce základů analýzy, nazývaná „algebraickou". Její podstata záležela v tom, že by se do základů analýzy položil pojem derivace, jehož definice by se opírala o skutečný způsob jejího nalezení a ne o mlhavé pojmy nekonečně malé veličiny, limity apod.

Operace derivování by se zaměnila algebraickým postupem nebo jakýmkoli jiným speciálním algoritmem.

První práce z oblasti algebraického diferenciálního počtu se objevily v Anglii. Byly to spisy Johna LANDENA (1719—1790) s názvy „*A discourse concerning the residual analysis*“ a „*The residual analysis*“. Landen vyšetřuje pro funkci $y = f(x)$ výraz $[f(x') - f(x)]/(x' - x)$, kde $x' \neq x$, a vyjadřuje jej řadou, jejíž členy nemají ve jmenovateli výraz $x' - x$. Klade potom $x' = x$ a takto obdrženou hodnotu výrazu nazývá „speciální hodnotou“ neboli podílem „reziduí“ ([23], 157). Landenovy úvahy stejně jako úvahy ostatních přívrženců algebraické analýzy se však opíraly o předpoklad, který považovali za samozřejmý, a to rozložení libovolné funkce $f(x)$ v řadu podle mocnin $x' - x$. Jak se ukázalo, byl tento postup vhodný jen pro polynomy. Jeho rozšíření na ostatní funkce bylo spojeno s těžkostmi, se kterými se tehdejší zastánci algebraické analýzy neuměli vyrovnat (rozšíření vlastností konečných součtů na nekonečné řady, vyjádřitelnost funkcí mocninnou řadou apod.).

Nejzávažnější prací, která se zabývala možnostmi algebraického diferenciálního počtu, byl velký spis LAGRANGEŮV „*Theorie des fonctions analytiques*“. Jejím ústředním bodem byla snaha dokázat větu, že každá funkce $y = f(x + \mathrm{h})$ je téměř všude (vlastně nemusí platit pro diskrétní hodnoty argumentu) rozložitelná na mocninnou řadu

$$f(x + h) = f(x) + ph + gh^2 + rh^3 + \ldots .$$

Důkaz provedl Lagrange tak, že vyloučil všechny zvláštní případy (možnost výskytu členů se zápornými nebo lomenými mocninami h atd.). Tím mu zbyla pro vyšetřování jen třída analytických funkcí, ostatní funkce označil jako výjimky. Mocninnou řadu užil Lagrange pro vyjádření funkcí polynomy, opíraje se o to, že pro všechna dostatečně malá h je každý člen rozkladu větší než součet po něm následujících členů. Pro konkrétní funkce odvodil formuli zbytku a začal užívat věty o střední hodnotě. Derivace definoval jako koeficienty při jednotlivých mocninách h, ovšem s přesností na příslušné číselné konstanty.

Podle Lagrangeových představ diferenciální počet tvořil část algebry, odlišující se jen specifickými algoritmy. „Algebra není nic jiného než teorie funkcí... V algebře ve vlastním slova smyslu se vyšetřují jen prvotní funkce pocházející z obyčejných algebraických operací; to je jen první větev teorie funkcí. Ve druhé větvi se vyšetřují derivace funkce a je to ta větev, kterou nazýváme „teorií analytických funkcí“ a která obsahuje všechno, co se vztahuje k novým počtům“ ([21], 42).

Brzy se však ukázalo, že Lagrangeova teorie není zcela v pořádku. Základní věta o rozložení funkce v řadu se v podstatě mlčky opírala o předpoklad, že každá funkce se dá rozložit na Taylorovu řadu. Kromě toho se také Lagrange nemohl vyhnout nepřímým odkazům na nekonečně malé a na limitní přechody. Operace s řadami se také ukázala neopodstatněná, protože se prováděla bez řádného vyšetřování konvergence řad. Přínos Lagrangeovy teorie však záležel v tom, že se zde prvně objevila teorie funcí jedné reálné proměnné.

* * *

Závěrem je možno říci, že žádný z uvedených směrů, kterými se ubírali matematikové 18. století při zdůvodňování základních operací s nekonečně malou veličinou, nevedl zcela uspokojivě k cíli. K uspokojivému výkladu pojmu nekonečně malé veličiny dochází až v prvé polovině 19. století, kdy nastává období revize základů matematické analýzy.

Literatura

[1] D'Alembert J.: Différentielle, *Encyklopedie IV*, 1754.
[2] D'Alembert L.: Limite, *Encyklopedie IX*, 1765.
[3] Berkeley G.: *The Analyst*, 1734.
[4] Cantor M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III, IV*, Leipzig 1901, 1908.
[5] Euler L.: *Institutiones calculi differentialis*, Petrohrad 1755, citováno podle ruského překladu. Эйлер Л.: Дифференциальное исчисление, Москва—Ленинград 1949.
[6] Euler L.: *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748.
[7] L'Hospital G. F.: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696.
[8] L'Huilier S.: *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, Berlin 1786.
[9] Juškevič A. P.: *Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis* (*Leonhard Euler zum 250. Geburtstag*, Berlin 1959).
[10] Lagrange J. L.: *Theorie des fonctions analytiques*, Paris 1881.
[11] Landen J.: *A discourse concerning the residual analysis*, 1758.
[12] Landen J.: *The residual analysis*, 1764.
[13] Leibniz G. W.: *De geometria recondita*, 1686.
[14] Leibniz G. W.: *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, Leipzig 1684; citováno z německého překladu Leibniz G. W.: *Neue Methode der Maxima, Minima sowie der Tangenten, die sich weder an gebrochenen, noch an irrationalen Grössen stösst, und eine eigentümliche darauf bezügliche Rechnungsart.* (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 162, Leipzig 1908).
[15] Maclaurin C.: *A Treatise of Fluxions*, Edinburg 1742.
[16] Newton I.: *Methodus fluxionem et serierum infinitarum* (angl. překlad 1736).
[17] Nieuwentijt B.: *Analysis infinitorum*, 1695.
[18] Nieuwentijt B.: *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia*, 1694.
[19] Nový L.: *Matematika v Čechách ve 2. polovině 18. století*, Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky 5, Praha 1960.
[20] Robins B.: *A discourse concerning the... methods of fluxions...*, Londýn 1735.
[21] Рыбников К. А.: История математики I, II, Москва 1960, 1963.
[22] Struik D. J.: *Dějiny matematiky*, Praha 1963.
[23] Wieleitner H.: История математики от Декарта до середины XIX, столетия, Москва 1960.