Jiří Podolský

Zrození Maxwellovy teorie a formalismu vektorové analýzy

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 43 (1998), No. 3, 237--248

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137586

Zrození Maxwellovy teorie a formalismu vektorové analýzy

Jiří Podolský, Praha

Motto:

„Až do Maxwella se za fyzikální realitu — pokud měla představovat děje v přírodě — pokládaly hmotné body, které se mění jen pohybem v souladu s obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Po Maxwellovi se mělo za to, že fyzikální realitu představují spojitá pole, která se nedají vykládat mechanicky a řídí se parciálními diferenciálními rovnicemi. Je to ta nejpronikavější a nejplodnější proměna v chápání fyzikální reality, jakou vůbec fyzika prožila od Newtona.“

A. EINSTEIN, *Jak vidím svět*

Letos uplynulo 125 let od vydání slavného *Traktátu o elektřině a magnetismu* [1], životního díla Jamese Clerka Maxwella (13. 6. 1831 – 5. 11. 1879). Tento geniální teoretický fyzik (ovšem i zručný experimentátor), jemuž zde chceme vzdát hold, v *Traktátu* završil a shrnul své představy o dynamickém elektromagnetickém poli jakožto zprostředkovateli veškerého elektrického i magnetického působení. Maxwellova idea měla zásadní význam teoretický, což demonstruje i výše uvedený Einsteinův citát. Současně však ovlivnila osud lidstva zřejmě více než kterákoli jiná fyzikální myšlenka: předpověď elektromagnetických vln se stala východiskem pro většinu komunikačních vymožeností, jimiž disponuje svět na přelomu druhého a třetího tisíciletí. Cílem našeho příspěvku je rozborem původních Maxwellových prací ukázat zrod elektrodynamiky a vývoj jejího formalismu.

1. Dynamická teorie elektromagnetického pole

J. C. Maxwell navázal na předchozí představy Michaela Faradaye (1791–1867) o magnetických silokřivkách a „elektro-tonickém stavu“, zobecnil je a jako první matematicky zformuloval představu elektromagnetického pole jako nositele a zprostředkovatele elektrických a magnetických interakcí. Tato revoluční fyzikální myšlenka se ovšem vynořovala postupně. Jeho první články [2], [3] byly ještě silně inspirovány Thomsonovou snahou [4] vysvětlit zákony elektřiny a magnetismu mechanicky, například jako pohyb speciálního viskózního prostředí; Maxwell se ovšem postupně od mechanických představ oprošťoval. Své slavné rovnice pole představil poprvé koncem roku 1864 v článku [5] nazvaném *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field.* Dílo má celkem 7 částí a rozsah 71 stran. Obecná první část *Introductory* začíná

RNDr. JIŘÍ PODOLSKÝ, CSc. (1963), je odborným asistentem na katedře teoretické fyziky MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8 (`podolsky@mbox.troja.mff.cuni.cz`).

konstatováním skutečnosti, že snaha o matematickou formulaci elektřiny a magnetismu v podobě „silového působení na dálku“ po vzoru Newtonovy gravitační teorie naráží na základní problém, totiž že síla mezi interagujícími elektrickými částicemi nutně závisí nejen na vzdálenosti, ale též na jejich relativní *rychlosti*. Maxwell sice velmi hezkými slovy oceňuje hloubku i praktickou užitečnost Weberovy a Neumannovy teorie tohoto typu z r. 1849, resp. 1858, přesto však mu obtíže související s předpokladem sil závislých na rychlosti zabraňují v tom, považovat uvedenou teorii za konečnou a správnou. Sám proto přichází s jinou myšlenkou, s *dynamickou* teorií elektromagnetického *pole*. Maxwell přímo píše:

> I have therefore preferred to seek an explanation of the fact in another direction, by supposing them to be produced by actions which go on in the surrounding medium as well as in the excited bodies, and endeavouring to explain the action between distant bodies without assuming the existence of forces capable of acting directly at sensible distances.
>
> The theory I propose may therefore be called a theory of the *Electromagnetic Field*, because it has to do with the space in the neighbourhood of the electric or magnetic bodies, and it may be called a *Dynamical* Theory, because it assumes that in that space there is matter in motion, by which the observed electromagnetic phenomena are produced.[1])

Maxwell dále uvádí, že prostor, který elektromagnetické pole vyplňuje, může obsahovat libovolnou hmotu nebo být „prázdný“. I ve vakuovém případě ovšem stále ještě obsahuje dostatek „materiálu“, který má elastické vlastnosti a může přijímat a vysílat světelné a tepelné vlnění. Tento fakt je pro něj důvodem pro existenci éteru (aethereal medium), který vyplňuje prostor a proniká i tělesy. Éter je možné uvést do vlnového pohybu, a proto může velkou (avšak konečnou) rychlostí zprostředkovat přenos energie a pohybů „obyčejné“ hmoty z jednoho místa na druhé.

Článek pokračuje shrnutím některých experimentálních faktů dávajících do vzájemných souvislostí jevy elektrické, magnetické a optické. Ve druhé části *On Electromagnetic Induction* Maxwell podrobně rozebírá jev indukce, propočítává vzájemné působení proudů v různých obvodech a zkoumá analogii s mechanikou. Zavádí například veličinu „elektromagnetická hybnost“ proudu (electromagnetic momentum), jejíž změna nastává vždy jen působením elektromotorické síly, podobně jako změna hybnosti tělesa je dána působením mechanické síly. Zabývá se i problémem měření uvedených veličin. V závěru druhé části již přistupuje ke studiu elektromagnetického pole: zavádí magnetické siločáry, k nim kolmé ekvipotenciály a vyjmenovává jejich základní vlastnosti.

---

[1]) Upřednostnil jsem tudíž hledat jiné vysvětlení, předpokládat, že vznikají působením, jež přechází do okolního prostředí stejně jako do excitovaných těles, a snažit se vysvětlit působení mezi vzdálenými objekty bez předpokladu existence sil bezprostředně působících na dálku.

Teorie, kterou navrhuji, by tudíž mohla být nazývána teorií *elektromagnetického pole*, neboť se týká prostoru v okolí elektrických nebo magnetických těles, a mohla by být nazývána teorií *dynamickou*, neboť předpokládá, že v uvedeném prostoru se hmota pohybuje, čímž pozorované elektromagnetické jevy vznikají.

Vlastní formulace teorie elektromagnetického pole je obsahem třetí části článku nazvané *General Equations of the Electromagnetic Field.* Velmi přehledným způsoben v ní Maxwell na pouhých 8 stranách textu zavádí dvacet fyzikálních veličin popisujících stav a dynamiku každé elektromagnetické soustavy, současně zavádí dvacet rovnic, které uvedené veličiny svazují a v zadaných podmínkách též jednoznačně určují.

Zmíněné veličiny a rovnice nyní uvádíme přesně v té podobě, v jaké jsou v článku [5] z r. 1864 zapsány, a to v levé části následujících dvou tabulek. Vidíme, že veličiny i rovnice Maxwell rozepsal po složkách v kartézských souřadnicích. Celý systém působí mírně nepřehledně zejména proto, že v souladu s dobovými zvyklostmi byly pro kartézské složky dané vektorové veličiny použity *různé* symboly, nikoli stejný symbol s indexem. Pro lepší orientaci proto uvádíme v pravé části tabulek též dnešní vektorovou notaci veličin i Maxwellových rovnic (v SI soustavě jednotek):

veličiny:

Maxwellova notace, 1864		dnešní vektorová notace	
electromagnetic momentum	F, G, H	$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$	vektorový potenciál
magnetic intensity	α, β, γ	$\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$	magnetická intenzita
electromotive force	P, Q, R	$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$	elektromotorická síla
current due to true conduction	p, q, r	$\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$	proudová hustota
electric displacement	f, g, h	$\vec{D} = (D_x, D_y, D_z)$	elektrická indukce
total current	p', q', r'	$\vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t$	$\vec{j}$ + Maxwellův proud
quantity of free electricity	e	ϱ	hustota náboje
electric potential	Ψ	φ	skalární potenciál
coefficient of magnetic induction	μ	μ	permeabilita
coefficient of electric elasticity	k	$\varepsilon \sim k^{-1}$	permitivita

Kromě drobné formální odlišnosti, totiž že parciální derivace nejsou ještě zapisovány symbolem ∂, shledáváme zde dvě odchylky fyzikální. Především není dosud dostatečně zřetelně odlišena elektromotorická síla $\vec{F} \sim (P, Q, R)$ od vektoru elektrické intenzity $\vec{E}$, jenž vystupuje v Maxwellových rovnicích elektrické „elasticity“ a „rezistence“. Navíc dnes fundamentální vektory elektrické intenzity $\vec{E}$ a magnetické indukce $\vec{B}$ v původní formulaci z roku 1864 nenajdeme. Jak je vidět, místo nich Maxwell zavedl skalární a vektorový potenciál $\varphi \sim \Psi$ a $\vec{A} \sim (F, G, H)$. Díky $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ a $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t - \operatorname{grad} \varphi$ jsou ovšem identicky splněny vztahy $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ a $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, tedy druhá sada Maxwellových rovnic v dnešní notaci.

rovnice:

magnetic force $\mu\alpha = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}$ $\mu\beta = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} - \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$ $\mu\gamma = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}$	$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$
electric currents $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z} = 4\pi p' = 4\pi\left(p + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$ $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} - \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x} = 4\pi q' = 4\pi\left(q + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)$ $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}y} = 4\pi r' = 4\pi\left(r + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
electromotive force $P = \mu\left(\gamma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \beta\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}$ $Q = \mu\left(\alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y}$ $R = \mu\left(\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z}$	$\vec{F}/q = \vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}$
electric elasticity $P = kf$ $Q = kg$ $R = kh$	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
electric resistance $P = -\varrho p$ $Q = -\varrho q$ $R = -\varrho r$	$\vec{E} = \vec{j}/\gamma$
free electricity $e + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = 0$	$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$
continuity $\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = 0$	$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$

Třetí část článku Maxwell uzavírá odvozením důležitého vztahu pro „vnitřní" energii elektromagnetického pole

$$E = \sum \left\{ \frac{1}{8\pi}(\alpha\mu\alpha + \beta\mu\beta + \gamma\mu\gamma) + \frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh) \right\} \mathrm{d}V,$$

ve kterém snadno rozeznáváme dnešní výraz $\iiint \frac{1}{2}(\vec{H}\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot\vec{D})\,\mathrm{d}V$. K samotnému pojmu *energie pole* navíc podává důležité vysvětlení:

> In using such words as electric momentum and electric elasticity in reference to the known phenomena of the induction of currents and the polarization of dielectrics, I wish merely to direct the mind of the reader to mechanical phenomena which will assist him in understanding the electrical ones. All such phrases in the present paper are to be considered as illustrative, not as explanatory.
>
> In speaking of the Energy of the field, however, I wish to be understood literally. All energy is the same as mechanical energy, whether it exists in the form of motion or in that of elasticity, or in any other form. The energy in electromagnetic phenomena is mechanical energy. The only question is, Where does it reside? On the old theories it resides in the electrified bodies, conducting circuits, and magnets, in the form of an unknown quality called potential energy, or the power of producing certain effects at a distance. On our theory it resides in the electromagnetic field, in the space surrounding the electrified and magnetic bodies, as well as in those bodies themselves.[2])

Ze slov „veškerá energie je totožná s energií mechanickou" plyne, že Maxwell ještě zcela nezavrhl snahu vysvětlit elektromagnetické jevy pomocí specifických pohybů a napětí elastického éteru, i když konkrétně tuto představu (narozdíl od předchozího článku [3]) již dále nerozpracovává a nepropaguje.

V následující čtvrté části *Mechanical Actions in the Field* autor z předchozích obecných vztahů odvozuje zákony pro mechanické síly, jež působí na elektrické proudy, magnety a nabitá tělesa umístěná do elektromagnetického pole. Pátá část nese název *Theory of Condensers* a Maxwell v ní odvozuje vztahy pro elektrické veličiny v kondenzátorech.

Zcela fundamentální, doslova epochální význam má ovšem následující šestá část práce nazvaná *Electromagnetic Theory of Light.* Maxwell v ní jako přímočarý důsledek svých rovnic ukazuje, že rozruchy elektromagnetického pole se ve vakuu mohou šířit

---

[2]) Pokud jde o používání slov jako elektrická hybnost či elektrická pružnost ve vztahu k známým jevům indukce proudů a polarizace dielektrik, je mým cílem pouze zaměřit čtenářovu pozornost směrem k jistým mechanickým jevům, které mu napomohou pochopit analogické jevy elektrické. Všechny tyto výrazy v předkládaném článku by měly být chápány jako pouhá ilustrace, nikoli vysvětlení.

Pokud však hovořím o energii pole, přeji si být chápán doslova. Veškerá energie je totožná s energií mechanickou, ať existuje ve formě pohybu, pružnosti, nebo kterékoli jiné podobě. Energie v elektromagnetických jevech je mechanická energie. Jedinou otázkou je: Kde tato energie sídlí? Podle starých teorií sídlí v nabitých tělesech, vodivých obvodech a magnetech, v podobě neurčité veličiny zvané potenciální energie či ve schopnosti vyvolávat jistá působení na dálku. Podle naší teorie sídlí v elektromagnetickém poli, v prostoru obklopujícím nabitá a zmagnetovaná tělesa, stejně jako v tělesech samých.

v podobě transverzálních vln:

$$k\nabla^2\mu\alpha = 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\alpha,$$

$$k\nabla^2\mu\beta = 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\beta,$$

$$k\nabla^2\mu\gamma = 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\gamma,$$

$$l\mu\alpha + m\mu\beta + n\mu\gamma = 0,$$

kde l, m, n jsou směrové kosiny šíření (dnešní zápis rovnic je $\Delta\vec{B} = \varepsilon\mu\,\partial^2\vec{B}/\partial t^2$, $\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$, kde $\vec{k}$ je vlnový vektor). Rychlost šíření elektromagnetických vln je odtud $v = \sqrt{k/4\pi\mu}$, což podle měření Webera a Kohlrausche z roku 1857 dává ve vzduchu rychlost $v = 310\,740\,000$ metrů za sekundu. Tuto hodnotu Maxwell srovnává s rychlostí světla ve vzduchu $c = 314\,858\,000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (Fizeau, 1849), resp. $c = 298\,000\,000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (Foucault, 1862) a s rychlostí světla ve vakuu $c = 308\,000\,000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ získanou měřením aberace. Shoda experimentálních hodnot v a c je pozoruhodná! Protože měření veličiny v byla prováděna ryze elektromagneticky (autor dokonce přímo píše, že „světlo bylo v tomto experimentu použito pouze tak, že se hledělo na měřicí přístroje“), zatímco měření c se explicitně neopírala o elektřinu či magnetismus, činí Maxwell následující logický závěr:

> The agreement of the results seems to shew that light and magnetism are affections of the same substance, and that light is an electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws.[3])

Geniální autor tak na pouhých čtyřech stránkách vytvořil elektromagnetickou teorii světla a sjednotil tím elektřinu a magnetismus s optikou; nepřímo ukázal i možnost existence elektromagnetických vln jiných vlnových délek. Jaké dalekosáhlé praktické důsledky, které ovšem naplno využilo až následující 20. století, bude tento jeho navýsost teoretický objev mít, nemohl samozřejmě Maxwell tehdy tušit...

Jeho článek [5] tím však zdaleka nekončí. Pečlivě dokazuje, že elektromagnetickým polem se mohou šířit pouze příčné vibrace, což opět koresponduje s optikou. Dává do souvislostí permitivitu prostředí s indexem lomu, počítá šíření vln ve vodivém prostředí (odvozuje koeficient tlumení a absorpci), hodnotu amplitud elektrické i magnetické složky slunečního světla a k dovršení všeho propočítává šíření elektromagnetického vlnění anizotropním prostředím krystalu! V poslední, sedmé části článku *Calculation of the Coefficients of Electromagnetic Induction* navíc ještě uvádí tři nezávislé metody pro výpočet koeficientu vzájemné indukce dvou proudových smyček obecného tvaru, které pak aplikuje na některé konkrétní situace. Závěrem odtud odvozuje korekční členy, jimiž zpřesňuje měření prováděná Výborem britské asociace pro určení standardu elektrického odporu. To jen dokazuje všestrannost Maxwellovy osobnosti, který nebyl jen geniálním teoretikem, ale též technicky zručným experimentátorem s nebývalým citem pro rovnováhu nutnou pro každý pokrok v přírodovědném bádání.

---

[3]) Shoda těchto výsledků zřejmě prokazuje, že světlo a magnetismus jsou projevy téže substance a že světlo je elektromagnetický rozruch šířící se polem podle zákonů elektromagnetismu.

2. Traktát o elektřině a magnetismu

A Treatise on Electricity and Magnetism [1] je hlavní, nejslavnější a doslova celoživotní dílo J. C. Maxwella. V tomto rozsáhlém tisícistránkovém traktátu autor shrnuje a na mnoha místech originálním způsobem rozvíjí teorii elektromagnetismu, a to jak po stránce matematických formulací, tak po stránce fyzikální a pojmové. Maxwell pochopitelně navazuje na své předchozí práce [2], [3] a především pak na [5], kde poprvé představil rovnice pole jako ucelený systém (viz výše). V *Traktátu* jsou tyto rovnice uvedeny ve svazku II, části IV, kapitole IX *General Equations of the Electromagnetic Field*. Oproti práci [5] je však zde uváděná soustava rovnic fyzikálně propracovanější (zejména pokud jde o ujasnění různých materiálových vztahů) a navíc matematicky elegantnější. Maxwell si byl vědom, že zápis soustavy diferenciálních rovnic pomocí kartézských složek veličin je zdlouhavý a nepřehledný, a proto navrhl kratší, symbolický zápis pomocí *kvaternionů*. Veličiny zapisuje pomocí „vektorů“, přičemž však pod tímto pojmem ještě nechápe vektor v dnešním obvyklém smyslu, ale rozumí jím „vektorovou část“ kvaternionu (viz následující kapitola). Tyto „vektory“ označuje německými gotickými písmeny (švabachem)[4]. Veličiny a rovnice elektromagnetického pole pak mají tvar, který shrnujeme v následujících tabulkách[5]:

vektorové veličiny:

Maxwellova notace, 1873		dnešní vektorová notace	
radius vector of a point	$\varrho = (x, y, z)$	$\vec{r} = (x, y, z)$	polohový vektor
electromagnetic momentum	$\mathcal{A} = (F, G, H)$	$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$	vektorový potenciál
magnetic induction	$\mathcal{B} = (a, b, c)$	$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$	magnetická indukce
total electric current	$\mathcal{C} = (u, v, w)$	$\vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t$	$\vec{j}$ + Maxwellův proud
electric displacement	$\mathcal{D} = (f, g, h)$	$\vec{D} = (D_x, D_y, D_z)$	elektrická indukce
electromotive force	$\mathcal{E} = (P, Q, R)$	$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$	elektrická intenzita
mechanical force	$\mathcal{F} = (X, Y, Z)$	$\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$	Lorentzova síla
velocity of a point	$\mathcal{G} = \dot{\varrho} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$	$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$	rychlost
magnetic force	$\mathcal{H} = (\alpha, \beta, \gamma)$	$\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$	magnetická intenzita
intensity of magnetization	$\mathcal{J} = (A, B, C)$	$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$	magnetická polarizace
current of conduction	$\mathcal{K} = (p, q, r)$	$\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$	proudová hustota

[4]) Pro lepší čitelnost je zde přepisujeme kaligrafickým typem.

[5]) Jak Maxwell sám zdůraznil, podstatnou součástí jeho teorie je tvrzení, podle něhož proud $\mathcal{C}$ není totožný s $\mathcal{K}$; platí mezi nimi vztah $\mathcal{C} = \mathcal{K} + \dot{\mathcal{D}}$. Právě zavedení „posuvného Maxwellova proudu“ $\partial\vec{D}/\partial t$ patří mezi největší objev, který strukturu celé teorie dobudoval. Teprve jeho implementací do „Ampérova zákona“, $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t$, je rovnice kontinuity $\partial\varrho/\partial t + \operatorname{div}\vec{j} = 0$ splněna identicky (aplikací operátoru div a užitím $\operatorname{div}\vec{D} = \varrho$).

skalární veličiny:

Maxwellova notace, 1873		dnešní notace	
electric potential	Ψ	φ	skalární potenciál
magnetic potential	Ω	φ_m	magnetostatický potenciál
electric density	e	ϱ	hustota náboje
density of magnetic 'matter'	m	ϱ_m	hustota magnetického náboje

materiálové veličiny:

Maxwellova notace, 1873		dnešní notace	
conductivity for electric currents	C	γ	měrná vodivost
dielectric inductive capacity	K	ε	permitivita
magnetic inductive capacity	μ	μ	permeabilita

rovnice:

Maxwellova notace, 1873		dnešní notace
magnetic induction	$\mathcal{B} = V\nabla\mathcal{A}$	$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$
electromotive force	$\mathcal{E} = V\mathcal{G}\mathcal{B} - \dot{\mathcal{A}} - \nabla\Psi$	$\vec{F}/q = \vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}$
mechanical force	$\mathcal{F} = V\mathcal{C}\mathcal{B} - e\nabla\Psi - m\nabla\Omega$	$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} + \varrho\vec{E}$
magnetization	$\mathcal{B} = \mathcal{H} + 4\pi\mathcal{J}$	$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{J}$
electric currents	$4\pi\mathcal{C} = V\nabla\mathcal{H}$	$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$
current of conduction	$\mathcal{K} = C\mathcal{E}$	$\vec{j} = \gamma\vec{E}$
electric displacement	$\mathcal{D} = \dfrac{1}{4\pi}K\mathcal{E}$	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
total current	$\mathcal{C} = \mathcal{K} + \dot{\mathcal{D}}$	$\vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$
magnetic induction	$\mathcal{B} = \mu\mathcal{H}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
electric volume-density	$e = S\nabla\mathcal{D}$	$\operatorname{div}\vec{D} = \varrho$
magnetic volume-density	$m = S\nabla\mathcal{J}$	$\operatorname{div}\vec{J} = -\varrho_m$
magnetic force	$\mathcal{H} = -\nabla\Omega$	$\vec{H} = -\nabla\varphi_m$

V následující kapitole nyní podrobně vysvětlíme výše uvedený kvaternionový zápis rovnic a Maxwellem použitou symboliku.

3. Od kvaternionů k vektorové analýze

Slovo „vektor“ je odvozeno z latinského *vecto*: vozit, přenášet (*vector* doslova znamená nosič, jezdec). Představa síly jakožto fyzikální veličiny vektorového charakteru je sice pradávná[6]), abstraktní matematický formalizmus vektorového prostoru však kupodivu vznikal dlouho a obtížně. Počátkem 19. století se k reprezentaci vektorů v rovině již běžně používalo komplexních čísel. Snaha postihnout obdobným způsobem pravidla pro operace s vektory v třírozměrném prostoru vyvolala nutnost konstrukce „třírozměrných komplexních čísel“. Toho bylo dosaženo v roce 1843, kdy irský fyzik a astronom W. R. Hamilton (1805–1865) zavedl tzv. *kvaterniony.*

Kvaternion je veličina, kterou lze zapsat ve tvaru $a = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, kde a_i jsou skaláry (a_0 je „skalární část“, zbytek pak „vektorová část“ kvaternionu, přičemž a_1, a_2, a_3 lze chápat například jako kartézské souřadnice v prostoru), zatímco hyperkomplexní jednotky **i**, **j**, **k** jsou analogony imaginární jednotky **i** dobře známé z teorie komplexních čísel. Sčítání dvou kvaternionů je definováno obvyklým způsobem „po složkách“, násobení je určeno základními pravidly pro násobení jednotek **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,$$
$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{ki} = \mathbf{j},$$
$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

Součin dvou kvaternionů $a = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ a $b = b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ tudíž je

$$\begin{aligned} ab = a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) &+ \\ + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} &+ \\ + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} &+ \\ + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}&. \end{aligned}$$

Hamilton také zavedl kvaternionový diferenciální operátor označovaný $\boldsymbol{\nabla}$

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

jehož jméno *nabla* pochází z asyrského pojmenování pro harfičku podobného tvaru. Aplikován na *skalární funkci* $f(x, y, z)$ dává vektor

$$\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Aplikován na *vektorovou funkci* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ dává kvaternion

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = \qquad (1) \\ &= -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

[6]) Pravidlo pro skládání dvou vektorů vyslovil poprvé explicitně Galileo Galilei, v jistém smyslu bylo však známo již Aristotelovi.

Hamilton byl velkým propagátorem kvaternionového počtu[7]) a sám jej prakticky použil k řešení řady fyzikálních problémů, především v mechanice. Jak jsme již uvedli, další jejich aplikaci nalezl Maxwell. Uvědomil si, že rovnice elektromagnetismu se dají přehledněji zapsat právě pomocí Hamiltonových kvaternionů, pokud oddělíme skalární a vektorovou část $\nabla\mathbf{v}$. Maxwell zadefinoval *skalární část* $\nabla\mathbf{v}$ jako

$$S\nabla\mathbf{v} = -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right), \tag{2}$$

viz (1), a nazval ji *konvergencí* $\mathbf{v}$ (tento výraz byl již znám z teorie kontinua, kde $\mathbf{v}$ představovalo pole rychlosti proudění). Moderní pojem *divergence* zavedl krátce nato W. L. Clifford (1845–1879), $\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv -S\nabla\mathbf{v}$. Vektorovou část $\nabla\mathbf{v}$ označil Maxwell

$$V\nabla\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{3}$$

a nazval ji *rotací* $\mathbf{v}$ nebo též $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ (tento výraz popisuje při proudění tekutiny její víření). Výraz $\operatorname{rot}\mathbf{v}$, běžnější ve středoevropském prostoru, se vyskytuje jako synonymum $\operatorname{curl}\mathbf{v}$. Právě tento význam uvedený v (2) a (3) mají symboly $S\nabla$ a $V\nabla$ v předchozí tabulce shrnující zápis rovnic použitý Maxwellem v jeho *Traktátu*[8]).

K definitivnímu překonání kvaternionového přístupu a ke vzniku moderní vektorové analýzy došlo posléze až na přelomu století především zásluhou Gibbse a Heavisida. Jejich práce byla zcela nezávislá, výsledky však (až na drobné rozdíly v zápisu) identické.

Američan J. W. Gibbs (1839–1903) byl profesorem matematické fyziky. Jeho úsilí o vybudování jednoduššího a přehlednějšího vektorového aparátu bylo motivováno převážně pedagogicky a akademicky. V roce 1881 vznikl jeho spis *Elements of Vector Analysis*, který zprvu cirkuloval jen mezi jeho studenty a teprve v roce 1901 dostal knižní podobu [6] (knihu ovšem sepsal Gibbsův žák E. B. Wilson). Příčina spočívala

[7]) Téměř současně (na Hamiltonovi ovšem zcela nezávisle) zavedl v roce 1844 v Německu H. G. Grassmann (1809–1877) abstraktní matematický počet, v němž figurovaly n-rozměrné veličiny $a = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, kde a_i jsou skaláry a e_i jsou základní jednotky (dnes bychom řekli „vektory kartézské báze“). Grassmann zavedl dva druhy součinů: *vnitřní* („skalární“) daný pravidlem $e_i/e_j = \delta_{ij}$, takže $a/b = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, a *vnější* („vektorový“), pro nějž $[e_ie_i] = 0$ a $[e_ie_j] = -[e_je_i]$ pro $i \neq j$, takže pro $n = 3$ platí $[ab] = (a_2b_3 - a_3b_2)[e_2e_3] + (a_3b_1 - a_1b_3)[e_3e_1] + (a_1b_2 - a_2b_1)[e_1e_2]$. Vidíme, že Grassmannův vnitřní součin je až na znaménko ekvivalentní skalární části Hamiltonova součinu kvaternionů a a b v případě, že výchozí kvaterniony nemají skalární část ($a_0 = 0 = b_0$, tj. jsou-li to vektory). Pokud navíc identifikujeme $[e_ie_j] = \varepsilon_{ijk}e_k$, je Grassmannův vnější součin ekvivalentní vektorové části kvaternionového součinu vektorů. Hlavní rozdíl obou koncepcí spočívá v tom, že v Hamiltonově teorii je vektor jen jednou částí kvaternionu, v Grassmannově algebře je vektor veličinou základní. Grassmannova práce, jakkoli byla originální a průkopnická mírou abstrakce, zůstala ovšem takřka neznámá ještě mnoho let po své publikaci.

[8]) Pro úplnost uveďme, že Maxwellův příspěvek k vektorové analýze spočívá též ve formulaci známých identit $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ a $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ a rovněž v uvědomění si faktu, že Laplaceův operátor vznikne dvojí aplikací ∇.

především v Gibbsově skromnosti a přesvědčení, že spíše než o originální matematický příspěvek šlo o pouhé shrnutí a přeformulování práce jiných myslitelů.

O. Heaviside (1850–1925) byl britský elektroinženýr. Jeho práce byla proto zaměřena mnohem „praktičtěji“ na aplikování Maxwellovy teorie. Kvaterniony zavrhl jako nevhodný matematický nástroj a místo nich rozvinul vektorovou analýzu, kterou považoval za způsob zkráceného vyjádření složitých (a v kartézských složkách často se opakujících) výrazů [7].

Závěrem srovnejme Gibbsovu notaci s Heavisideovou:

operace	Gibbs	Heaviside
skalární součin	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$\mathbf{ab}$
vektorový součin	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$\mathrm{V}\mathbf{ab}$
gradient	$\boldsymbol{\nabla}$	$\boldsymbol{\nabla}$
divergence	$\boldsymbol{\nabla} \cdot$	div
rotace	$\boldsymbol{\nabla} \times$	curl

Je zřejmé, že tím, kdo jako první zapsal Maxwellovy rovnice v dnes užívaném elegantním a přehledném tvaru,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{D} = \varrho,$$
$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\jmath}, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

byl právě Heaviside.

4. Shrnutí

James Clerk Maxwell představil své slavné rovnice elektromagnetického pole v roce 1864 nejprve rozepsané po složkách v kartézských souřadnicích. Jejich dnešní vektorový zápis pomocí operátorů divergence a rotace se vynořil až počátkem 20. století. Cesta k této symbolické notaci Maxwellových rovnic byla poměrně dlouhá a vedla přes kvaterniony.

Pokud bychom na tomto místě měli učinit nějaký „filozofický“ závěr, zněl by asi takto: vhodný formalizmus je netriviální součástí každé teorie. Teprve on umožňuje vystihnout a plně uchopit to podstatné, efektivně rozvinout důsledky teorie včetně případných technických aplikací a umožnit tím i její srovnání s experimentem.

Literatura

[1] MAXWELL, J. C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism.* Clarendon Press, Oxford, 1873.

[2] MAXWELL, J. C.: *On Faraday's Lines of Force.* Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. X, Part I (1855–56).
[3] MAXWELL, J. C.: *On Physical Lines of Force.* Philosophical Magazine, Vol. XXI (1861–62).
[4] THOMSON, W.: *On a Mechanical Representation of Electric, Magnetic and Galvanic Forces.* Camb. and Dub. Math. Jour. (Jan. 1847).
[5] MAXWELL, J. C.: *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field.* Royal Society Transactions, Vol. CLV (1864).
[6] GIBBS, J. W., WILSON, E. B.: *Vector Analysis.* Dover, New York, reprint 1960.
[7] HEAVISIDE, O.: *Electromagnetic Theory.* Dover, New York, reprint 1925.
[8] CROWE, M. J.: *History of Vector Analysis.* University of Notre Dame Press, Indiana 1967.
[9] KLINE, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press, Oxford 1972.

Názory na výuku matematiky na středních školách (v USA)

Tento článek je první ze série příspěvků založených na odpovědích odborníků „z teorie i praxe“ na otázky týkající se výuky matematiky na střední škole. Odborníci z řad matematiků, didaktiků a učitelů matematiky odpovídali na tyto otázky:

1. Když se zamyslíte nad tím, co by z matematiky měli znát absolventi středních škol, čemu dáváte největší váhu?
2. Jaké základní rysy by podle vás měly mít všechny osnovy vyučování matematice na středních školách?
3. Jak poznáme, že je výuka matematiky na středních školách dobrá?
4. Co považujete za nejdůležitější kvality středoškolského učitele matematiky v oblastech matematického vzdělání, vztahu k matematice a přístupu ke studentům?
5. Co byla první věc, která ve vás vzbudila zájem o matematiku?

Respondenti byli vybráni z okruhu lidí, které známe, nebo nám byli doporučeni, kteří se nad tímto problémem už zamýšleli a věnovali mu jisté úsilí. Snažili jsme se získat co nejširší spektrum názorů a rad. Všichni respondenti zodpověděli všechny otázky; my jsme potom vybrali k otištění ty odpovědi, které reprezentují celé spektrum

Views on High School Mathematics Education. Notices of the AMS, Vol. *43* (1996), No. 8, 873–886.

Přeložila HELENA DURNOVÁ.