Jan Fischer

Záludnosti poruchové teorie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 43 (1998), No. 2, 100--103

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137532

Záludnosti poruchové teorie

Jan Fischer, Praha

Úvod

Pro většinu úloh v kvantové teorii je příznačná nutnost použít poruchový počet. Chceme-li učinit zkoumaný problém řešitelným, jsme často nuceni jej nejprve zjednodušit zanedbáním řady efektů, čímž sice jeho řešení usnadníme, ale současně ohrozíme jeho fyzikální relevanci. Je obecnou zkušeností, že přesně mohou být řešeny jen zjednodušené problémy.

Známe-li řešení f_0 zjednodušené rovnice, můžeme do ní zavést korekční členy a řešení $f(g)$ vzniklé rovnice vyjádřit ve tvaru řady v mocninách parametru g charakterizujícího tyto korekce, přičemž f_0 je nultou aproximací poruchové řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n. \tag{1}$$

Poruchový parametr g (může jich být i víc) je považován za numericky malou veličinu, která však může popisovat významný efekt.

První otázkou je, jaký je vztah mezi řadou (1) a funkcí $f(g)$. K tomu je třeba vědět, jaký má (1) přesně smysl a v jakém smyslu je řada (1) přiřazena funkci $f(g)$. Je třeba uvažovat komplexní hodnoty g.

Nejjednodušší je situace tehdy, když $f(g)$ je holomorfní v kruhu se středem v počátku a s poloměrem $\varrho > 0$. Pak je (1) Taylorovým rozvojem funkce $f(g)$ a určuje ji jednoznačně v tom smyslu, že $f(g)$ je *rovna* (1) všude uvnitř kruhu konvergence. Koeficienty f_n jsou naopak jednoznačně dány derivacemi $f(g)$ v počátku.

Je-li $\varrho = 0$, platí rovnost

$$f(g) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n \tag{2}$$

v nejlepším případě jen v počátku a přestává být aplikačně zajímavá. Můžeme-li však *místo* (2) předpokládat platnost *asymptotického* vztahu

$$f(g) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n \tag{3}$$

Doc. RNDr. Jan Fischer, DrSc. (1932), Fyzikální ústav Akademie věd České republiky, Na Slovance 2, 180 40 Praha 8.

Příspěvek k diskusi o současnosti a budoucnosti fyzikální výuky, pořádané Jednotou českých matematiků a fyziků dne 19. 3. 1997 na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně.

pro $g \to 0$, existuje pro libovolnou posloupnost $\{f_n\}$ taková funkce $f(g)$, že (3) je splněno [1]. Na rozdíl od (2) však vztah (3) neurčuje funkci $f(g)$ jednoznačně, ani když jsou všechna f_n explicite dána a je určena množina směrů, podél nichž se děje limitní přechod $g \to 0$; i tehdy může podmínce (3) vyhovovat celá třída funkcí. Situace se změní, jsou-li na zbytek $f(g) - \sum_{n=0}^{N} f_n g^n$ naloženy vhodné dodatečné podmínky; tímto způsobem lze z celé třídy funkcí vyčlenit jedinou, kterou pak nazveme součtem řady. Postup se nazývá sumace (resumace).

Diskuse

Takovéto dodatečné podmínky i samy předpoklady (2), (3) musí mít fyzikální obsah a motivaci. Nelze se spokojit např. s tím, že nějakým přerovnáním řady dostaneme konvergentní výraz, není-li toto přerovnání fyzikálně zdůvodněno. To je závažné proto, že ve mnoha konkrétních situacích jsou poruchové rozvoje divergentní a/nebo má rozvíjená funkce v počátku singularitu (to není obecně totéž).

Rovněž sama konvergence poruchové řady není nutně kritériem „rozumnosti" teorie. Za možné „kandidáty" takového kritéria můžeme spíš než konvergenci považovat hladkost nebo jednoznačnost. Platí-li rovnice (2), je zodpovězena otázka po konvergenci:

1. (konvergence): Je řada konvergentní, tj. existuje limita výrazu

$$f_{(N)}(g) = \sum_{n=0}^{N} f_n g^n \tag{4}$$

pro $N \to \infty$ při pevném g? (Pro jaké hodnoty g?)

Vztah (3) je odpovědí na otázku o hladkosti:

2. (hladkost): Je výraz

$$\left| f(g) - \sum_{n=0}^{N} f_n g^n \right| \tag{5}$$

omezený, v jaké oblasti hodnot (N, g) (kde g je komplexní a N přirozené), a jaký tvar má omezující funkce?

Konečně je tu otázka jednoznačnosti:

3. (jednoznačnost): Určuje posloupnost $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ jednoznačně rozvíjenou funkci $f(g)$ a za jakých podmínek?

Ad 1. I když se zdá, že konvergence poruchové řady je v konkrétních teoriích spíše výjimečná, v mnoha případech není přesná odpověď dodnes známa. Důležitější je otázka jednoznačného určení funkce z řady; ta je na konvergenci značně nezávislá. I divergentní řada může určovat funkci jednoznačně a konvergentní nemusí.

Mezi fyziky — a tím i ve fyzikální výuce — přetrvává nedůvěra k používání divergentních řad a strach z něho. (Podobnou nedůvěru chovali matematici, ale před

150 a více lety; k tomu viz zajímavé podrobnosti v [1, 2].) Ale ani divergentní, ba ani borelovsky nesumovatelné řady nejsou pohromou, nýbrž jen signálem o nepoužitelnosti příslušné (sumační) metody v dané situaci. Signálem, že využitý informační poklad teorie není dostatečný k určení rozvíjené funkce. Je to výzva k sesbírání poztrácených hodnot. Nejsou-li takové, je to výzva k doplnění a zkompletování teorie.

Ad 2. Hladkost je vlastností asymptotických rozvojů funkcí. Je vítaná, ale není to technická podmínka nebo ctnost z nouze, nýbrž nesamozřejmá relace s fyzikálním obsahem: říká, že stav bez interakce je (i se svými derivacemi) mezní hodnotou stavu s interakcí. To je hluboce netriviální výrok a má své důsledky; vypovídá o tom, že mezi stavem s interakcí a stavem bez interakce je (dokonce nekonečně) hladký přechod. Uvážíme-li, jak velký je rozdíl mezi světem s interakcemi a světem bez nich, učiníme si představu, jak citelným omezením obecnosti předpoklad o asymptotičnosti je, a dojdeme možná k závěru, že bychom v daném problému takový předpoklad nemuseli dělat.

Ad 3. Zatímco u taylorovských rozvojů je jednoznačnost zaručena, u asymptotických rozvojů je k jejímu dosažení nutno doplnit dodatečnou informaci, nejlépe ve formě analytičnosti (viz Oehme [3]). To vede k sumačním metodám typu Borelovy a k jejím zobecněním. Snaha o dosažení jednoznačnosti volá po neporuchovém doplnění. Úkolem je zohlednit co nejvíce informací z toho, co nebylo vzato v úvahu standardním formalismem kvantové teorie; viz [4]. Podle toho je nutno volit sumační metodu, která se ovšem může i velmi lišit od toho, co je dnes známé a obvyklé (Borel, Padé).

Připojme několik shrnujících poznámek:

1. Ani divergence, ani borelovská nesumovatelnost poruchové řady nesvědčí o nekonzistentnosti teorie. Spíše naznačuje, že nějaká informace chybí nebo není dostatečně využita. Je ovšem možné i to, že lze řadu definovat jinou sumační metodou.
2. Asymptotičnost je společná vlastnost řady a třídy rozvíjených funkcí.
3. Asymptotičnost není samozřejmý předpoklad, má fyzikální obsah.
4. Analytičnost funkce je nutno vyšetřovat spolu s asymptotickým rozvojem, jinak se tatáž řada může sumovat k různým funkcím.
5. Asymptotická řada nemusí být divergentní.
6. Je-li asymptotická řada konvergentní, neznamená to ještě, že jednoznačně určuje rozvíjenou funkci.

Závěr

Ve většině známých teorií od anharmonického oscilátoru přes kvantovou chromodynamiku po teorii strun svědčí odhady pro velmi podobné chování poruchových koeficientů při vysokých řádech, totiž $n!$ nebo obecněji $\Gamma(an+b)$. To by mohlo budit dojem, že všechny mají stejné problémy, ba dokonce že popisují obdobnou fyzikální situaci. Tak tomu však není. Jednak je v členech vysokých řádů pravděpodobná možnost subtilních kompenzací, jednak má na jednoznačnost značný vliv oblast analytičnosti hledané funkce. Tak mohou mít různé teorie ve skutečnosti společnou jen jistou, spíše tu méně podstatnou část, která volá pokaždé po jiném (neporuchovém) doplnění.

S nástupem divergentních řad (resp. singulárních funkcí) nepřichází pohroma. Exaktnost tím netrpí. Mohlo by se zdát, že do fyziky vtrhla zvůle. Nevtrhla. (Ta by vtrhla tehdy, kdybychom informaci v teorii chybějící doplnili něčím formálním, fyzikálně bezobsažným; kdybychom se například spokojili s tím, že se nám podařilo přerovnat řadu tak, aby součet dal konečné číslo.) Nástupem divergentních řad se stalo jen to, že poruchová teorie přišla o (byť významnou) část svého fyzikálního obsahu a prediktivní schopnosti. Její důležitost klesla, ne však na nulu. Výsledek znamená výzvu neporuchovému sektoru, v každém problému asi jinou.

Cílem tohoto příspěvku je upozornit na některé dosud nedoceňované skutečnosti. Poruchová teorie není jednoznačná, pracuje se ztrátami, některé informace neposbírá a nezpracuje. Je zdrojem informací, ale ne jediným. Není soběstačná; proto je současně i výzvou. Není však libovolná, jak by se mohlo zdát při povrchním pohledu např. na sumační metody divergentních řad.

Jejím omezením však je, že předpokládá hladký přechod mezi stavem s interakcí a stavem bez interakce. Tento silný omezující předpoklad obsahovala vždycky, jenže se zdál samozřejmý a přirozený. I dnes je většina úvah založena na tomto předpokladu; je však otázka, zda je vhodné se na něj nadále vázat.

Vzhledem k tomu, že poruchová teorie je aktuální v mnoha fyzikálních oborech, přemosťuje mnoho oborů a jde napříč fyzikou, týkají se uvedené problémy většího počtu disciplín i fyziky jako celku. Odtud vychází mé doporučení věnovat i při výuce pozornost obecným aspektům poruchové teorie vymezováním jejích kompetencí ve fyzice a její role v konkrétních situacích.

Literatura

[1] HARDY, G. H.: *Divergent series.* Oxford University Press, Oxford, 1949.
[2] BASDEVANT, J. L.: Fortschritte der Physik *20* (1972), 283.
[3] OEHME, R.: Int. J. Mod. Phys. *A 10* (1995), 1995.
[4] FISCHER, J.: Int. J. Mod. Phys. *A 12* (1997), 3625.