Milan Pišl

Cirkulární kubiky a bicirkulárni kvartiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 1, 32--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137392

CIRKULÁRNÍ KUBIKY A BICIRKULÁRNÍ KVARTIKY

MILAN PIŠL
(Katedra mat. el. fak. ČVUT)

V článku jsou studovány vlastnosti cirkulárních kubik a bicirkulárních kvartik. Pozornost se věnuje hlavně těm vlastnostem těchto křivek, jichž lze použít k jejich konstrukci a k technickým aplikacím, čemuž bude věnován samostatný článek. Při výkladu bylo použito aparátu a výsledků z autorova článku „Křivky v Gaussově rovině", uveřejněného v tomto časopise, ročník II (1957), č. 1, str. 4—13, č. 2, str. 144—156 a č. 3, str. 271—284.

1. Kubiky a kvartiky v isotropických souřadnicích

1.1 Rovnice kubiky a cirkulární kubiky. Křivka 3. stupně neboli kubika je geometrickým místem bodů (ξ, η, t), vyhovujících rovnici[1])

$$A_0 t^3 + (\bar{\alpha}_1 \xi t^2 + \alpha_1 \eta t^2) + (\bar{\alpha}_2 \xi^2 t + A_2 \xi \eta t + \alpha_2 \eta^2 t) + \\ + (\bar{\alpha}_3 \xi^3 + \bar{\beta}_0 \xi^2 \eta + \beta_0 \xi \eta^2 + \alpha_3 \eta^3) = 0 \,. \qquad (1.0)$$

Kubika se nazývá cirkulární, prochází-li kruhovými body $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$; pak $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3 = 0$ a (1.0) přejde ve tvar

$$A_0 t^3 + (\bar{\alpha}_1 \xi + \alpha_1 \eta)\, t^2 + (\bar{\alpha}_2 \xi^2 + A_2 \xi \eta + \alpha_2 \eta^2)\, t + (\bar{\beta}_0 \xi^2 \eta + \beta_0 \xi \eta^2) = 0 \,. \qquad (1.1)$$

V nehomogenních souřadnicích pro reálné body ($\eta = \bar{\xi}$, $t \neq 0$,[2]) a označíme-li $\frac{\xi}{t} = z$, $\frac{\eta}{t} = \bar{z}$, $A_0 = D$, $\alpha_1 = 2\gamma$, $\alpha_2 = \alpha$, $A_2 = 2A$, $\beta_0 = 2\beta \neq 0$) má cirkulární kubika rovnici

$$2\bar{\beta} z^2 \bar{z} + 2\beta z \bar{z}^2 + \bar{\alpha} z^2 + \alpha \bar{z}^2 + 2A z \bar{z} + 2\bar{\gamma} z + 2\gamma \bar{z} + D = 0 \,, \quad \beta \neq 0 \,. \qquad (1.2)$$

1.2 Rovnice kvartiky a bicirkulární kvartiky. Křivka 4. stupně neboli kvartika je geometrickým místem bodů (ξ, η, t), vyhovujících rovnici

$$A_0 t^4 + (\bar{\alpha}_1 \xi t^3 + \alpha_1 \eta t^3) + (\bar{\alpha}_2 \xi^2 t^2 + A_2 \xi \eta t^2 + \alpha_2 \eta^2 t^2) + (\alpha_3 \xi^3 t + \bar{\beta}_0 \xi^2 \eta t + \beta_0 \xi \eta^2 t + \alpha_3 \eta^3 t) + \\ + (\bar{\alpha}_4 \xi^4 + \bar{\beta}_1 \xi^3 \eta + A_3 \xi^2 \eta^2 + \beta_1 \xi \eta^3 + \alpha_4 \eta^4) = 0 \,. \qquad (1.3)$$

Bicirkulární se nazývá kvartika, má-li kruhové body za dvojnásobné[3]); pak je $\alpha_4 = \bar{\alpha}_4 = 0$, $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3 = 0$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1 = 0$, a rovnice bicirkulární kvartiky zní

$$A_0 t^4 + (\bar{\alpha}_1 \xi + \alpha_1 \eta)\, t^3 + (\bar{\alpha}_2 \xi^2 + A_2 \xi \eta + \alpha_2 \eta^2)\, t^2 + (\bar{\beta}_0 \xi^2 \eta + \beta_0 \xi \eta^2)\, t + A_3 \xi^2 \eta^2 = 0 \,. \qquad (1.4)$$

V nehomogenních souřadnicích pro reálné body (při stejném označení jako v (1.2) a při $A_3 = C \neq 0$) nabude (1.4) tvaru

$$C z^2 \bar{z}^2 + 2\bar{\beta} z^2 \bar{z} + 2\beta z \bar{z}^2 + \bar{\alpha} z^2 + \alpha \bar{z}^2 + 2A z \bar{z} + 2\bar{\gamma} z + 2\gamma \bar{z} + D = 0 \,, \quad C \neq 0 \,. \qquad (1.5)$$

1.3 Tečna cirkulární kubiky. Rovnici každé cirkulární kubiky lze podle (1.1) psát ve tvaru

$$F(\xi, \eta, t) \equiv 2\bar{\beta} \xi^2 \eta + 2\beta \xi \eta^2 + \bar{\alpha} \xi^2 t + \alpha \eta^2 t + \\ + 2A \xi \eta t + 2\bar{\gamma} \xi t^2 + 2\gamma \eta t^2 + D t^3 = 0 \,. \qquad (1.6)$$

---

[1]) Viz tento časopis, roč. II, 1957, str. 155, odst. 5.3.)

[2]) Tamtéž, odst. 5.1.

[3]) Viz B. Bydžovský, *Úvod do algebraické geometrie*, 1948, str. 314.

Označme $\dfrac{\partial F}{\partial \xi} = 2F_1$, $\dfrac{\partial F}{\partial \eta} = 2F_2$, $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 2F_3$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 2F_{11}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 2F_{22}$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2F_{33}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = 2F_{12}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial t} = 2F_{13}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial t} = 2F_{23}.$$

Bod (ξ_1, η_1, t_1) křivky $F = 0$, pro který

$$F_i(\xi_1, \eta_1, t_1) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.7}$$

nazveme singulárním bodem, v opačném případě regulárním bodem křivky. Singulární bod křivky, v němž nejsou rovny nule všechny druhé parciální derivace F, nazveme dvojnásobným bodem křivky.

Křivka má v regulárním bodě určitou jedinou tečnu o rovnici[4])

$$F_1(\xi_1, \eta_1, t_1)\,\xi + F_2(\xi_1, \eta_1, t_1)\,\eta + F_3(\xi_1, \eta_1, t_1)\,t = 0. \tag{1.8}$$

Předpokládejme, že v rovnici cirkulární kubiky (1.6) je $\beta \neq 0$ (jinak by se kubika rozpadala v kuželosečku a nevlastní přímku), pak rovnice tečny v kruhovém bodě $(1, 0, 0)$ resp. $(0, 1, 0)$ zní

$$2\bar{\beta}\eta + \bar{\alpha}t = 0 \quad \text{resp.} \quad 2\beta\xi + \alpha t = 0. \tag{1.9}$$

Nevlastní přímka $t = 0$ protíná cirkulární kubiku (1.6) (kde $\beta \neq 0$) kromě v kruhových bodech ještě v reálném nevlastním bodě $(j\beta, -j\bar{\beta}, 0)$. Tečna v tomto bodě je asymptotou křivky a její rovnice je podle (1.8)

$$2\beta\bar{\beta}^2\xi + 2\beta^2\bar{\beta}\eta + (2A\beta\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta^2 - \alpha\bar{\beta}^2)\,t = 0. \tag{1.10}$$

1.4 Tečna bicirkulární kvartiky. Rovnici bicirkulární kvartiky pišme podle (1.4) ve tvaru

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta, t) \equiv{} & C\xi^2\eta^2 + 2\bar{\beta}\xi^2\eta t + 2\beta\xi\eta^2 t + \bar{\alpha}\xi^2 t^2 + \\ & + \alpha\eta^2 t^2 + 2A\xi\eta t^2 + 2\bar{\gamma}\xi t^3 + 2\gamma\eta t^3 + Dt^4 = 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

($C \neq 0$, jinak by se kvartika rozpadala v kubiku a nevlastní přímku), a označme

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 2F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 2F_2, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 2F_3, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 2F_{11}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 2F_{22}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2F_{33},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = 2F_{12}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial t} = 2F_{13}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial t} = 2F_{23}, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^2 \partial \eta} = 4F_{112}, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial \xi \partial \eta^2} = 4F_{122}.$$

Tečna v bodě (ξ_1, η_1, t_1) bude mít podle (1.8) opět rovnici

$$F_1(\xi_1, \eta_1, t_1)\,\xi + F_2(\xi_1, \eta_1, t_1)\,\eta + F_3(\xi_1, \eta_1, t_1)\,t = 0.$$

Dvojnásobný bod křivky, v němž jsou tečny reálné různé, nazývá se uzlovým bodem; jsou-li tyto tečny imaginární různé, nazývá se isolovaným bodem. Bod dvojnásobný s jedinou tečnou se nazývá bodem úvratu.

Kruhové body $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ jsou pro bicirkulární kvartiku dvojnásobné, a poněvadž jsou též body souřadnicovými, dostaneme rovnice tečen v těchto bodech, položíme-li roven nule koeficient při ξ^2 resp. η^2 v (1.11)[5]), tedy z rovnice

$$F(\xi, \eta, t) \equiv \xi^2(C\eta^2 + 2\bar{\beta}\eta t + \bar{\alpha}t^2) + \ldots \equiv \eta^2(C\xi^2 + 2\beta\xi t + \alpha t^2) + \ldots = 0,$$

dostaneme rovnice tečen v kruhových bodech ve tvaru

$$C\eta^2 + 2\bar{\beta}\eta t + \bar{\alpha}t^2 = 0 \quad \text{resp.} \quad C\xi^2 + 2\beta\xi t + \alpha t^2 = 0. \tag{1.12}$$

---

[4]) Tamtéž, str. 312.

[5]) Tamtéž, odst. 34, str. 79.

Rovnice (1.12) představují dvě přímky imaginární různé, je-li $C\alpha - \beta^2 \neq 0$ ($\Leftrightarrow C\bar{\alpha} - \bar{\beta}^2 \neq 0$), a dvě přímky splývající, je-li $C\alpha - \beta^2 = C\bar{\alpha} - \bar{\beta}^2 = 0$. Máme tedy výsledek: *Kruhové body* (1, 0, 0) *a* (0, 1, 0) *jsou body isolovanými resp. body úvratu bicirkulární kvartiky* (1.11), *je-li*

$$C\alpha - \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow C\bar{\alpha} - \bar{\beta}^2 \neq 0 \quad \textit{resp.} \quad C\alpha - \beta^2 = C\bar{\alpha} - \bar{\beta}^2 = 0\,. \tag{1.13), (1.14}$$

Všimněme si, že nevlastní přímka $t = 0$ protíná bicirkulární kvartiku (1.11) pouze v kruhových bodech, t. j. všechny reálné body bicirkulární kvartiky jsou vlastní.

1.5 Transformace posunutím. Uvažujme pouze reálné body vlastní. Rovnice bicirkulární kvartiky v nehomogenním tvaru je (1.5); $f(z) \equiv Cz^2\bar{z}^2 + 2\bar{\beta}z^2\bar{z} + \ldots = 0$, $C \neq 0$. Pro parciální derivace funkce f (při zcela analogickém označení jako v předcházejícím odstavci) platí $f_1 = \bar{f}_2$, $f_2 = \bar{f}_1$, $f_3 = \bar{f}_3$, $f_{11} = \bar{f}_{22}$, $f_{22} = \bar{f}_{11}$, $f_{12} = \bar{f}_{12}$, $f_{112} = \bar{f}_{112}$, $f_{122} = \bar{f}_{112}$.

Provedeme-li transformaci posunutím $z = w + z_0$ s novým počátkem z_0, přejde rovnice (1.5) v rovnici[6])

$$\begin{aligned} f(w) \equiv\; & Cw^2\bar{w}^2 + 2f_{112}(z_0)\,w^2\bar{w} + 2f_{122}(z_0)\,w\bar{w}^2 + f_{11}(z_0)\,w^2 + \\ & + f_{22}(z_0)\,\bar{w}^2 + 2f_{12}(z_0)\,w\bar{w} + 2f_1(z_0)\,w + 2f_2(z_0)\,\bar{w} + f(z_0) = 0\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Poznámka: Rovnici cirkulární kubiky (1.2) před a po transformaci, jakož i výrazy pro první, druhé a třetí parciální derivace dostaneme, položíme-li v příslušných výrazech tohoto odstavce $C = 0$.

2. Cirkulární kubika a bicirkulární kvartika s reálným dvojnásobným bodem

Podle předcházejícího odstavce křivka o rovnici

$$f(z) \equiv Cz^2\bar{z}^2 + 2\bar{\beta}z^2\bar{z} + 2\beta z\bar{z}^2 + \bar{\alpha}z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z} + 2\bar{\gamma}z + 2\gamma\bar{z} + D = 0 \tag{2.1}$$

je pro $C = 0$ cirkulární kubikou a pro $C \neq 0$ bicirkulární kvartikou. Nechť z_0 je reálný dvojnásobný bod křivky (2.1). Pak (viz (1.7)) $f(z_0) = f_1(z_0) = f_2(z_0) = f_3(z_0) = 0$. Zvolme z_0 za nový počátek a proveďme transformaci posunutím $z = w + z_0$. (2.1) pak přejde v rovnici (viz (1.15))

$$f(w) \equiv Cw^2\bar{w}^2 + 2f_{112}(z_0)\,w^2\bar{w}^2 + 2f_{122}(z_0)\,w\bar{w}^2 + f_{11}(z_0)\,w^2 + f_{22}(z_0)\,\bar{w}^2 + 2f_{12}(z_0)\,w\bar{w} = 0\,. \tag{2.2}$$

Máme tedy výsledek: *Rovnici každé bicirkulární kvartiky resp. cirkulární kubiky s reálným dvojnásobným bodem lze posunem uvést na tvar*

$$f(z) \equiv Cz^2\bar{z}^2 + 2\bar{\beta}z^2\bar{z} + 2\beta z\bar{z}^2 + \bar{\alpha}z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z} = 0\,, \quad C \neq 0 \text{ resp. } C = 0\,. \tag{2.3}$$

Tečny v dvojnásobném bodě můžeme určit methodou z odst. 1.4, neboť dvojnásobný bod křivky (2.3) je bodem souřadnicovým. Z homogenisovaného tvaru rovnice (2.3) je ihned vidět, že rovnice tečen v dvojnásobném bodě křivky (2.3) zní

$$\bar{\alpha}z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z} = 0\,. \tag{2.4}$$

Rovnice (2.4) představuje dvě přímky reálné různé, je-li diskriminant $\alpha\bar{\alpha} - A^2 > 0$. dvě reálné splývající přímky, je-li $\alpha\bar{\alpha} - A^2 = 0$ a dvě přímky konjugované, je-li $\alpha\bar{\alpha} - A^2 < 0$.[7]) Odtud a podle definice dvojnásobného bodu z odst. 1.4 plyne:

[6]) Viz pozn.[1]), odst. 1.2.

[7]) Viz. pozn.[1]), odst. 7.7.

Křivka (2.3) *má dvojnásobný bod bodem uzlovým nebo bodem úvratu nebo bodem isolovaným podle toho, je-li*

$$\alpha\bar{\alpha} - A^2 \gtreqless 0\,. \tag{2.5}$$

Označme determinant z koeficientů rovnice (2.3)

$$Z = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}, & A, & \bar{\beta} \\ A, & \alpha, & \beta \\ \bar{\beta}, & \beta, & C \end{vmatrix}; \tag{2.6}$$

pro jeho algebraické doplňky platí $Z_{11} = C\alpha - \beta^2$, $Z_{22} = \bar{Z}_{11}$, $Z_{13} = A\beta - \alpha\bar{\beta}$, $Z_{23} = \bar{Z}_{13}$, $Z_{12} = \bar{Z}_{12} = \beta\bar{\beta} - AC$, $Z_{33} = \bar{Z}_{33} = \alpha\bar{\alpha} - A^2$. Pomocí těchto označení a podle (1.14) a (2.5) můžeme vyslovit větu:

Cirkulární kubika (2.3) ($C = 0$) *má vždy dvojnásobný bod, který je bodem úvratu pro* $Z_{33} = 0$. *Bicirkulární kvartika* (2.3) ($C \neq 0$) *má vždy tři dvojnásobné body. Jsou to vesměs body úvratu, je-li* $Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = 0$. *Dva z nich jsou body úvratu (oba body kruhové), je-li* $Z_{11} = Z_{22} = 0$. *Konečně pouze jeden z nich (reálný) je bodem úvratu, je-li* $Z_{33} = 0$.

Pomocí determinantu (2.6) můžeme snadno rozhodnout o singulárnosti křivky (2.3). Dá se snadno ukázat[8]), že křivka (2.3) se rozpadne právě tehdy, je-li $\alpha Z = 0$. V dalším se budeme zabývat jen nerozložitelnými křivkami, t. j. budeme předpokládat $\alpha Z \neq 0$.

Poznámka: Nerozložitelná křivka s maximálním počtem (u kubiky 1, u kvartiky 3) dvojnásobných bodů je rodu nula. V dalším budeme pod pojmem cirkulární kubika a bicirkulární kvartika rozumět jen křivky rodu nula.

3. Ohniska

3.1 Ohniska bicirkulární kvartiky. Ohniska křivky definujeme jako průsečíky tečen, vedených ke křivce z kruhových bodů. Jsou-li body dotyku těchto tečen body vlastní nazýváme příslušné ohniska řádná; jsou-li body dotyku nevlastní, nazýváme ohniska mimořádnými.

Mimořádná ohniska bicirkulární kvartiky (2.3) ($C \neq 0$) najdeme řešením soustavy (1.12): $C\xi^2 + 2\beta t + \alpha t^2 = 0$, $C\eta^2 + 2\bar{\beta}\eta t + \bar{\alpha}t^2 = 0$. Diskriminant první rovnice je $-Z_{11}$, druhé $-Z_{22}$. Rozlišíme dva případy:

a) Je-li $Z_{11} \neq 0$ ($\Leftrightarrow Z_{22} \neq 0$), dostaneme čtyři různá řešení

$$\begin{aligned} \xi_1 : \eta_1 : t_1 &= (-\beta + \sqrt{-Z_{11}}) : (-\bar{\beta} + \sqrt{-Z_{22}}) : C\,, \\ \xi_2 : \eta_2 : t_2 &= (-\beta - \sqrt{-Z_{11}}) : (-\bar{\beta} - \sqrt{-Z_{22}}) : C\,, \\ \xi_3 : \eta_3 : t_3 &= (-\beta + \sqrt{-Z_{11}}) : (-\bar{\beta} - \sqrt{-Z_{22}}) : C\,, \\ \xi_4 : \eta_4 : t_4 &= (-\beta - \sqrt{-Z_{11}}) : (-\bar{\beta} + \sqrt{-Z_{22}}) : C\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Všechny čtyři body jsou vlastní, první dva jsou reálné, druhé dva konjugované.

b) Je-li $Z_{11} = Z_{22} = 0$, dostáváme jediné řešení reálné

$$\xi_1 : \eta_1 : t_1 = (-\beta) : (-\bar{\beta}) : C\,. \tag{3.2}$$

K vyšetření řádných ohnisek potřebujeme počet tečen z kruhových bodů k bicirkulární kvartice (2.3) ($C \neq 0$) a jejich rovnice. Počet tečen stanovíme pomocí t. zv. prvního vzorce Plückerova[9])

$$m = n(n - 1) - 2u - 3k \tag{3.3}$$

[8]) Viz pozn. [3]), odst. 137, str. 328.

[9]) Tamtéž, odst. 156—7.

(kde m je třída, n stupeň, u počet uzlů nebo isolovaných bodů, k počet bodů úvratu křivky) s přihlédnutím k tomu, že kruhové body, z nichž tečny vedeme, jsou pro bicirkulární kvartiku body dvojnásobnými. Hledaný počet tečen je tedy $m - t$, kde $t = 4$, má-li kvartika kruhové body za isolované, a $t = 3$, jsou-li kruhové body body úvratu.

Ukážeme nyní, jak se určí rovnice hledaných tečen. Rovnici bicirkulární kvartiky pišme ve tvaru

$$C\xi^2\eta^2 + 2\bar{\beta}\xi^2\eta + 2\beta\xi\eta^2 + \bar{\alpha}\xi^2 + \alpha\eta^2 + 2A\xi\eta = 0\,, \quad C \neq 0\,, \tag{3.5}$$

a zvolme libovolný vlastní bod (ξ_1, η_1). Jeho spojnice s kruhovými body mají rovnice

$$\eta = \eta_1 \quad \text{resp.} \quad \xi = \xi_1 \tag{3.6}$$

($\xi_1, \eta_1 \neq 0$, neboť počátek je dvojnásobný bod křivky (3.5)). Pro průsečíky přímek (3.6) s křivkou (3.5) dostáváme rovnici

$$(C\eta_1^2 + 2\bar{\beta}\eta_1 + \bar{\alpha})\,\xi^2 + 2(\beta\eta_1 + A)\,\eta_1\xi + \alpha\eta_1^2 = 0 \quad \text{resp.} \quad (C\xi_1^2 + 2\beta\xi_1 + \alpha)\,\eta^2 + $$
$$+ 2(\bar{\beta}\xi_1 + A)\,\xi_1\eta + \bar{\alpha}\xi_1^2 = 0\,. \tag{3.7}$$

Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímky (3.6) byly tečnami křivky (3.5), je, aby diskriminanty rovnic (3.7) byly rovny nule, tedy $(C\eta_1^2 + 2\bar{\beta}\eta_1 + \bar{\alpha})\,\alpha\eta_1^2 - (\beta\eta_1 + A)^2\,\eta_1^2 \equiv (Z_{11}\eta_1^2 - 2Z_{13}\eta_1 + Z_{33})\,\eta_1^2 = 0$ resp. $(C\xi_1^2 + 2\beta\xi_1 + \alpha)\,\bar{\alpha}\xi_1^2 - (\bar{\beta}\xi_1 + A)^2\,\xi_1^2 \equiv (Z_{22}\xi_1^2 - 2Z_{23}\xi_1 + Z_{33})\,\xi_1^2 = 0$. Rovnice hledaných tečen tedy zní

$$Z_{11}\eta^2 - 2Z_{13}\eta + Z_{33} = 0 \quad \text{resp.} \quad Z_{22}\xi^2 - 2Z_{23}\xi + Z_{33} = 0\,. \tag{3.8}$$

Rozlišíme nyní čtyři případy:

a) Je-li $Z_{11} \neq 0$ ($\Leftrightarrow Z_{22} \neq 0$), $Z_{33} \neq 0$, nemá bicirkulární kvartika bodů úvratu (viz odst. 2), tedy $u = 3$, $k = 0$, $m = 6$ a $m - t = 2$. Z každého kruhového bodu lze vést dvě tečny (3.8). Diskriminanty prvé resp. druhé z rovnic (3.8) jsou $-\alpha Z \neq 0$ resp. $-\bar{\alpha}Z \neq 0$ (viz podmínku nerozložitelnosti křivky v odst. 2); soustava (3.8) má tedy čtyři různá řešení

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{Z_{23} + \sqrt{-\bar{\alpha}Z}}{Z_{22}}\,, & \eta_1 &= \bar{\xi}_1 = \frac{Z_{13} + \sqrt{-\alpha Z}}{Z_{11}}\,,\\
\xi_2 &= \frac{Z_{23} - \sqrt{-\bar{\alpha}Z}}{Z_{22}}\,, & \eta_2 &= \bar{\xi}_2 = \frac{Z_{13} - \sqrt{-\alpha Z}}{Z_{11}}\,,\\
\xi_3 &= \frac{Z_{23} + \sqrt{-\bar{\alpha}Z}}{Z_{22}}\,, & \eta_3 &= \frac{Z_{13} - \sqrt{-\alpha Z}}{Z_{11}}\,,\\
\xi_4 &= \frac{Z_{23} - \sqrt{-\bar{\alpha}Z}}{Z_{22}}\,, & \eta_4 &= \frac{Z_{13} + \sqrt{-\alpha Z}}{Z_{11}}\,,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

z nichž první dvě představují reálné body, druhá dvě body konjugované.

b) Je-li $Z_{11} \neq 0$ ($\Leftrightarrow Z_{22} \neq 0$), $Z_{33} = 0$, má kvartika reálný bod úvratu (viz odst. 2), tedy $u = 2$, $k = 1$, $m = 5$, $m - t = 1$. Z každého kruhového bodu lze vést po jedné tečně; jejich rovnici dostaneme z (3.8), položíme-li podle předpokladu $Z_{33} = 0$, tedy

$$Z_{11}\eta - 2Z_{13} = 0 \quad \text{resp.} \quad Z_{22}\xi - 2Z_{23} = 0\,, \tag{3.8*}$$

kde $Z_{13} \neq 0$, $Z_{23} \neq 0$ (neboť jinak by se křivka rozpadla). Soustava (3.8)* dává jediné řešení reálné

$$\xi_1 = \frac{2Z_{23}}{Z_{22}}\,, \quad \eta_1 = \bar{\xi}_1 = \frac{2Z_{13}}{Z_{11}}\,. \tag{3.9*}$$

c) Je-li $Z_{11} = Z_{22} = 0$, $Z_{33} \neq 0$, jsou oba kruhové body body úvratu (viz odst. 2), tedy $u = 1$, $k = 2$, $m = 4$, $m - t = 1$, takže z každého kruhového bodu lze vést po jedné tečně. Jejich rovnice dostaneme z (3.8), položíme-li podle předpokladu $Z_{11} = Z_{22} = 0$, tedy

$$2Z_{13}\eta - Z_{33} = 0 \quad \text{resp.} \quad 2Z_{23}\xi - Z_{33} = 0\,, \tag{3.8)**}$$

kde opět $Z_{13} \neq 0$, $Z_{23} \neq 0$ (jinak by se křivka rozpadla). Soustava (3.8)** dává jediné řešení reálné

$$\xi_1 = \frac{Z_{33}}{2Z_{23}}\,, \quad \mu_1 = \bar{\xi}_1 = \frac{Z_{33}}{2Z_{13}}\,. \tag{3.9)**}$$

d) Je-li $Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = 0$, má kvartika všechny tři dvojnásobné body za body úvratu (viz odst. 2), tedy $u = 0$, $k = 3$, $m = 3$, $m - t = 0$. Z kruhových bodů nelze tedy vést žádnou tečnu ke křivce, což ukazuje také soustava (3.8), která se v tomto případě redukuje na $\eta = 0$ resp. $\xi = 0$ (což jsme podle (3.6) vyloučili).

Souhrnně máme tedy výsledek:

Bicirkulární kvartika bez bodů úvratu má čtyři řádná ohniska (z nichž dvě jsou reálná) a čtyři mimořádná ohniska (z nichž dvě jsou reálná).

Bicirkulární kvartika s jedním bodem úvratu má jediné ohnisko řádné (reálné) a čtyři mimořádná ohniska (z nichž jsou dvě reálná).

Bicirkulární kvartika se dvěma body úvratu má jediné ohnisko řádné (reálné) a jediné ohnisko mimořádné (reálné).

Bicirkulární kvartika se třemi body úvratu nemá řádných ohnisek a mimořádné ohnisko má jediné (reálné).

3.2 Ohniska cirkulární kubiky. K vyšetření mimořádných ohnisek cirkulární kubiky (2.3) ($C = 0$) stačí najít řešení soustavy (1.9): $2\bar{\beta}\eta + \bar{\alpha}t = 0$, $\bar{\beta} \neq 0$, $2\beta\xi + \alpha t = 0$, $\beta \neq 0$. Tato soustava dává jediné řešení, a to reálné

$$\xi_1 : \eta_1 : t_1 = \left(-\frac{\alpha}{2\beta}\right) : \left(-\frac{\bar{\alpha}}{2\bar{\beta}}\right) : 1\,. \tag{3.10}$$

Řádná ohniska cirkulární kubiky (2.3) ($C = 0$, $\beta \neq 0$) stanovíme analogicky jako u bicirkulární kvartiky. Protože však kruhové body jsou regulárními body křivky, je $t = 2$. Dále je vzhl. k $C = 0$)

$$Z = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}, & A, & \bar{\beta} \\ A, & \alpha, & \beta \\ \bar{\beta}, & \beta, & 0 \end{vmatrix},$$

a tedy soustava (3.8) se změní v soustavu

$$\beta^2\eta^2 + 2Z_{13}\eta - Z_{33} = 0\,, \quad \bar{\beta}^2\xi^2 + 2Z_{23}\xi - Z_{33} = 0\,. \tag{3.11}$$

Rozlišíme nyní dva případy:

a) Je-li $Z_{33} \neq 0$, nemá křivka bodu úvratu (viz odst. 2), tedy $u = 1$, $k = 0$, $m = 4$, $m - t = 2$. Z každého kruhového bodu lze vést dvě tečny o rovnicích (3.11). Soustava (3.11) má čtyři různá řešení:

$$\xi_1 = \frac{-Z_{23} - \sqrt{-\bar{\alpha}Z}}{\bar{\beta}^2}\,, \quad \eta_1 = \bar{\xi}_1 = \frac{-Z_{13} - \sqrt{-\alpha Z}}{\beta^2}\,,$$

$$\xi_2 = \frac{-Z_{23} + \sqrt{-\bar{\alpha}Z}}{\bar{\beta}^2}\,, \quad \eta_2 = \bar{\xi}_2 = \frac{-Z_{13} + \sqrt{-\alpha Z}}{\beta^2}\,,$$

$$\xi_3 = \frac{-Z_{23} - \sqrt{-\bar{\alpha} Z}}{\bar{\beta}^2}, \quad \eta_3 = \frac{-Z_{13} + \sqrt{-\alpha Z}}{\beta^2},$$

$$\xi_4 = \frac{-Z_{23} + \sqrt{-\bar{\alpha} Z}}{\bar{\beta}^2}, \quad \eta_4 = \frac{-Z_{13} - \sqrt{-\alpha Z}}{\beta^2}; \tag{3.12}$$

první dvě představují reálné body, druhá dvě body konjugované.

Poznámka: Z postupu je zřejmé, že (3.12) dostaneme z (3.9) pro $C = 0$.

b) Je-li $Z_{33} = 0$, má křivka bod úvratu (viz odst. 2), tedy $u = 0$, $k = 1$, $m = 3$, $m - t = 1$. Z každého kruhového bodu lze vést po jedné tečně o rovnicích (3.11) při $Z_{33} = 0$, tedy

$$\beta^2 \eta + 2Z_{13} = 0 \quad \text{resp.} \quad \bar{\beta}^2 \xi + 2Z_{23} = 0\,, \tag{3.11)*}$$

kde $Z_{13} \neq 0$, $Z_{23} \neq 0$ (jinak by se křivka rozpadla). Soustava (3.11)* dává jediné řešení a to reálné

$$\xi_1 = -\frac{2Z_{23}}{\bar{\beta}^2}, \quad \eta_1 = \bar{\xi}_1 = -\frac{2Z_{13}}{\beta^2}\,. \tag{3.12)*}$$

Poznámka: (3.12)* dostaneme z (3.9)* pro $C = 0$.

Souhrnně máme tedy výsledek:

Cirkulární kubika bez bodu úvratu má čtyři řádná ohniska (z nichž dvě jsou reálná) a jedno ohnisko mimořádné (reálné).

Cirkulární kubika s bodem úvratu má jedno ohnisko řádné a jedno mimořádné (obě reálná).

4. Tečny z dvojnásobného bodu

Počet a rovnice teček, vedených ke křivce (2.3) z jejího reálného dvojnásobného bodu určíme analogicky jako u kruhových bodů.

U cirkulární kubiky ($n = 3$) tyto tečny neexistují, neboť je-li a) $u = 1$, $k = 0$, je $t = 4$, $m = 4$, tedy $m - t = 0$; b) $u = 0$, $k = 1$, je $t = 3$, $m = 3$, tedy $m - t = 0$.

Ani u bicirkulární kvartiky ($n = 4$) s kruhovými body úvratu ($Z_{11} = Z_{22} = 0$, viz odst. 1.4 a 2) tyto tečny neexistují. Je-li totiž a) $u = 1$, $k = 2$, je $t = 4$, $m = 4$, tedy $m - t = 0$; b) $u = 0$, $k = 3$, je $t = 3$, $m = 3$, tedy $m - t = 0$.

Zbývá případ $Z_{11} \neq 0$ ($\Leftrightarrow Z_{22} \neq 0$), t. j. bicirkulární kvartiky bez bodů úvratu nebo s jedním bodem úvratu (viz odst. 1.4 a 2). V tomto případě, je-li a) $u = 3$, $k = 0$, je $t = 4$, $m = 6$, tedy $m - t = 2$; b) $u = 2$, $k = 1$, je $t = 3$, $m = 5$, tedy $m - t = 2$; hledané tečny existují tedy v tomto případě vždy dvě.

Pro stanovení rovnic hledaných teček budeme postupovat takto:

Zvolme libovolný vlastní reálný bod $z_1 \neq 0$. Jeho spojnice s reálným dvojnásobným bodem křivky (2.3) ($C \neq 0$) má rovnici

$$z = kz_1\,, \quad \bar{z} = k\bar{z}_1\,, \tag{4.1}$$

kde k je reálný parametr (viz odst. 2.2). Pro průsečíky přímky (4.1) s přivkou (2.3) dostáváme rovnici

$$k^2(Cz_1^2\bar{z}_1^2k^2 + 2(\bar{\beta}z_1 + \beta\bar{z}_1)\, z_1\bar{z}_1k + \bar{\alpha}z_1^2 + \alpha\bar{z}_1^2 + 2Az_1\bar{z}_1) = 0\,, \tag{4.2}$$

kde $k \neq 0$, neboť uvažujeme průsečíky různé od dvojnásobného bodu (v našem případě počátku). Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímka (4.1) byla tečnou křivka (2.3), je nulovost diskriminantu rovnice (4.2): $C(\bar{\alpha}z_1^2 + \alpha\bar{z}_1^2 + 2Az_1\bar{z}_1) - (\bar{\beta}z_1 + \beta\bar{z}_1)^2 \equiv Z_{22}z_1^2 - 2Z_{12}z_1\bar{z}_1 + Z_{11}\bar{z}_1^2 = 0$. Rovnice teček vedených z reálného dvojnásobného bodu ke kvartice ((2.3), $Z_{11} \neq 0$) tedy zní

$$Z_{22}z^2 - 2Z_{12}z\bar{z} + Z_{11}\bar{z}^2 = 0 . \tag{4.3}$$

Tečny (4.3) jsou reálné různé resp. konjugované, je-li záporně vzatý diskriminant rovnice (4.3) (viz podmínku nerozložitelnosti bicirkulární kvartiky v odst. 2)

$$CZ > 0 \quad \text{resp.} \quad CZ < 0 \,.\,^{10)} \tag{4.4}$$

Platí identita

$$\begin{aligned} &C(Cz^2\bar{z}^2 + 2\bar{\beta}z^2\bar{z} + 2\beta z\bar{z}^2 + \bar{\alpha}z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z}) \equiv \\ &\equiv (Cz\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z})^2 + (Z_{22}z^2 - 2Z_{12}z\bar{z} + Z_{11}\bar{z}^2) . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Odtud plyne:

Body dotyku tečen, vedených z reálného dvojnásobného bodu k bicirkulární kvartice $Cz^2\bar{z}^2 + 2\bar{\beta}z^2\bar{z} + 2\beta z\bar{z}^2 + \bar{\alpha}z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z} = 0$, $C \neq 0$, $Z_{11} \neq 0$ *leží na kružnici*

$$Cz\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} = 0 , \tag{4.6}$$

která prochází dvojnásobným bodem kvartiky a jejíž střed (bod $\left(-\frac{\beta}{C}\right)$ [11])) je středem souměrnosti mimořádných ohnisek kvartiky (viz (3.1) v odst. 3.1).

5. Dvojnásobné tečny

Dvojnásobné tečny existují u křivek stupně $n \geq 4$ a jejich počet je dán Plückerovým vzorcem[12]) $2\tau = (n^2 - 2n - 2u - 3k).\ (n^2 - 2u - 3k - 9) + 2u$, kde τ je počet dvojnásobných tečen, n stupeň křivky, u počet uzlových (nebo isolovaných) bodů a k počet bodů úvratu.

U cirkulární kubiky dvojnásobné tečny tedy neexistují. U bicirkulární kvartiky je jejich počet dán vzorcem

$$2\tau = (8 - 2u - 3k)(7 - 2u - 3k) + 2u . \tag{5.1}$$

Ukážeme nejprve, jak se určí rovnice hledaných tečen.

Pro bicirkulární kvartiku (2.3) ($C \neq 0$) platí identita

$$\begin{aligned} C(Cz^2\bar{z}^2 + 2\bar{\beta}z^2\bar{z} + 2\beta z\bar{z}^2 + \bar{\alpha}z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z}) \equiv (Cz\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \lambda)^2 + \\ + (Z_{22}z^2 + Z_{11}\bar{z}^2 - 2(Z_{12} + C\lambda)\, z\bar{z} - 2\lambda\bar{\beta}z - 2\lambda\beta\bar{z} - \lambda^2) , \end{aligned} \tag{5.2}$$

kde λ je libovolné reálné. Určíme-li λ tak, aby kuželosečka

$$Z_{22}z^2 + Z_{11}\bar{z}^2 - 2(Z_{12} + C\lambda)\, z\bar{z} - 2\lambda\bar{\beta}z - 2\lambda\beta\bar{z} - \lambda^2 = 0 \tag{5.3}$$

byla singulární, bude (5.3) representovat dvojici přímek, které mají s (2.3) společné dva dvojnásobné průsečíky. Musí být $\lambda \neq 0$, neboť $\lambda = 0$ vede k tečnám kvartiky z jejího reálného dvojnásobného bodu, což musíme vyloučit. Rovnice hledaných dvojnásobných tečen obecně tedy zní

$$Z_{22}z^2 + Z_{11}\bar{z}^2 - 2(Z_{12} + C\lambda_i)\, z\bar{z} - 2\lambda_i\bar{\beta}z - 2\lambda_i\beta\bar{z} - \lambda_i^2 = 0 , \tag{5.4}$$

kde $\lambda_i \neq 0$ je kořenem rovnice

$$\lambda^2 - 2A\lambda - Z_{33} = 0 , \tag{5.5}$$

(což je podmínka pro to, aby kuželosečka (5.3) byla singulární).

Rozlišíme nyní čtyři případy:

---

[10]) Viz. pozn. [1]) odst. 7.7.

[11]) Tamtéž, odst. 3.2.

[12]) Viz pozn. [3]), odst. 169.

a) Je-li $Z_{11} \neq 0$ ($\Leftrightarrow Z_{22} \neq 0$), $Z_{33} \neq 0$, nemá bicirkulární kvartika bodů úvratu (viz odst. 2), tedy (podle (5.1)) $u = 3$, $k = 0$ a $2\tau = 8$. Existují tedy v tomto případě čtyři dvojnásobné tečny, jejichž rovnice dostaneme podle (5.4) dosazením $\lambda_1 = A + |\alpha|$ resp. $\lambda_2 = A - |\alpha|$, tedy

$$(C\bar\alpha - \bar\beta^2)\, z^2 + (C\alpha - \beta^2)\, \bar z^2 - 2(\beta\bar\beta + C|\alpha|)\, z\bar z - \\ - 2(A + |\alpha|)\, \bar\beta z - 2(A + |\alpha|)\, \beta\bar z - (A + |\alpha|)^2 = 0\,, \tag{5.6}$$

resp.

$$(C\bar\alpha - \bar\beta^2)\, z^2 + (C\alpha - \beta^2)\, \bar z^2 - 2(\beta\bar\beta - C|\alpha|)\, z\bar z - \\ - 2(A - |\alpha|)\, \bar\beta z - 2(A - |\alpha|)\, \beta\bar z - (A - |\alpha|)^2 = 0\,, \tag{5.6}^*$$

Můžeme předpokládat, že $C > 0$; pak (5.6) resp. (5.6)* representuje dvojici přímek konjugovaných resp. reálných různých. Platí totiž:[13])

$Z'_{33} = Z_{11}Z_{22} - (Z_{12} + C\lambda_1)^2 = (C\bar\alpha - \bar\beta^2)(C\alpha - \beta^2) - (\beta\bar\beta + C|\alpha|)^2 = - C(\sqrt{\bar\alpha}\beta + \sqrt{\alpha}\bar\beta)^2 \geqq 0$, $Z'^*_{33} = Z_{11}Z_{22} - (Z_{12} + C\lambda_2)^2 = (C\alpha - \beta^2)(C\bar\alpha - \bar\beta^2) - (\beta\bar\beta - C|\alpha|)^2 = -C(\sqrt{\bar\alpha}\beta - \sqrt{\alpha}\bar\beta)^2 \gtreqless 0$, $Z'_{12} = \lambda_1^2(\beta\bar\beta - Z_{12} - C\lambda_1) = -C|\alpha|(A + |\alpha|)^2 < 0$, $Z'^*_{12} = \lambda_2^2(\beta\bar\beta - Z_{12} - C\lambda_2) = C|\alpha|(A - |\alpha|)^2 > 0$, což bylo dokázat.

Kuželosečku (5.6)* můžeme tedy rozložit ve dvě přímky reálné různé, jejichž rovnice jsou 1) $(\bar\beta \pm \sqrt{C\bar\alpha})\, z + (\beta \pm \sqrt{C\alpha})\, \bar z + (A - |\alpha|) = 0$, je-li $Z'^*_{33} > 0$; 2) $\bar\beta z + \beta\bar z + \dfrac{A - |\alpha|}{1 \pm k} = 0$, je-li $Z'^*_{33} = 0$, $\beta \neq 0 \Rightarrow C\alpha = k^2\beta^2$, $k^2 \neq 1$; 3) $\sqrt{C\bar\alpha}z + \sqrt{C\alpha}\bar z \pm (A - |\alpha|) = 0$, je-li $Z'^*_{33} = 0$, $\beta = 0$.

b) Je-li $Z_{11} \neq 0$ ($\Leftrightarrow Z_{22} \neq 0$), $Z_{33} = 0$, má bicirkulární kvartika reálný bod úvratu (viz odst. 2), tedy $u = 2$, $k = 1$ a $2\tau = 4$. Existují tedy dvě dvojnásobné tečny, jejichž rovnice dostaneme z (5.4) dosazením $\lambda_1 = 2A$ (druhý kořen rovnice (5.5) je nulový), t. j.

$$(C\bar\alpha - \bar\beta^2)\, z^2 + (C\alpha - \beta^2)\, \bar z^2 - 2(\beta\bar\beta + AC)\, z\bar z - 4A\bar\beta z - 4A\beta\bar z - 4A^2 = 0\,. \tag{5.6}^{**}$$

Předpokládejme opět $C > 0$, pak (5.6)** representuje dvojici přímek konjugovaných, je-li $A > 0$ a dvojici přímek reálných různých, je-li $A < 0$ (viz předcházející případ). Platí totiž $Z'_{33} = (C\alpha - \beta^2)(C\bar\alpha - \bar\beta^2) - (\beta\bar\beta + AC)^2 = - C(\sqrt{\bar\alpha}\beta + \varepsilon\sqrt{\alpha}\bar\beta)^2$, $\varepsilon = \operatorname{sign} A$, $Z'_{12} = 4A^2(\beta\bar\beta - \beta\bar\beta - AC) = -4A^3C$, je tedy $Z'_{33} \leqq 0$, $Z'_{12} < 0$ pro $A > 0$ a $Z'_{33} \geqq 0$, $Z'_{12} > 0$ pro $A < 0$. Je-li tedy $A < 0$, můžeme kuželosečku (5.6)** rozložit ve dvě přímky reálné různé, jejichž rovnice jsou 1) $(\bar\beta \pm \sqrt{C\bar\alpha})\, z + (\beta \pm \sqrt{C\alpha})\, \bar z + 2A = 0$, je-li $Z'_{33} > 0$; 2) $\bar\beta z + \beta\bar z + \dfrac{2A}{1 \pm k} = 0$, je-li $Z'_{33} = 0 \Rightarrow C\alpha = k^2\beta^2$, $k^2 \neq 1$;

c) je-li $Z_{11} = Z_{22} = 0$, $Z_{33} \neq 0$, má bicirkulární kvartika oba kruhové body za body úvratu, tedy $u = 1$, $k = 2$ a $2\tau = 2$. Existuje tedy jediná dvojnásobná tečna, jejíž rovnici dostaneme z (5.4) dosazením $\lambda = A - |\alpha| = \dfrac{AC - \beta\bar\beta}{C}$, t. j.

$$2C\bar\beta z + 2C\beta\bar z + (AC - \beta\bar\beta) = 0\,. \tag{5.6}^{***}$$

(5.6)*** je zřejmě reálná přímka [14]). Dotykové body leží na kružnici $C^2 z\bar z + C\bar\beta z + C\beta\bar z + (AC - \beta\bar\beta) = 0$ (jak plyne z (5.2) dosazením $\lambda = A - |\alpha| = \dfrac{AC - \beta\bar\beta}{C}$), jejímž středem je bod $\left(-\dfrac{\beta}{C}\right)$ (viz střed kružnice (4.6)). Snadno se dá ukázat, že body dotyku jsou

[13]) Viz pozn. [1]), odst. 7.7.

[14]) Tamtéž, odst. 5.2.

reálné různé, je-li $-7\beta\bar{\beta} < AC < \beta\bar{\beta}$; je-li $AC = -7\beta\bar{\beta}$, je bod dotyku jeden reálný, jinak jsou body dotyku konjugované.

d) je-li $Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = 0$, má křivka všechny dvojnásobné body za body úvratu, tedy $u = 0$, $k = 3$ a $2\tau = 2$. Existuje tedy jediná tečna, jejíž rovnici dostaneme z (5.4) dosazením $\lambda = 2A = -\dfrac{2\beta\bar{\beta}}{C}$, t. j.

$$C\bar{\beta}z + C\beta\bar{z} - \beta\bar{\beta} = 0\,. \tag{5.6}$$****

Dotykové body jsou dva reálné různé, leží na kružnici $C^2z\bar{z} + C\bar{\beta}z + C\beta\bar{z} - 2\beta\bar{\beta} = 0$, s jejímž středem $\left(-\dfrac{\beta}{C}\right)$ tvoří rovnostranný trojúhelník, jehož těžiště je reálný bod úvratu.

Souhrnně máme tedy výsledek:

Bicirkulární kvartika bez bodů úvratu má čtyři dvojnásobné tečny, z nichž dvě jsou reálné různé a dvě konjugované.

Bicirkulární kvartika s jedním bodem úvratu má dvě dvojnásobné tečny, jež jsou reálné pro $AC < 0$ a konjugované pro $AC > 0$.

Bicirkulární kvartika s body úvratu v kruhových bodech má jedinou dvojnásobnou tečnu, jež je reálná.

Literatura

Basset A. B., *An Elementary Treatise on Cubic and Quartic Curves*, Cambridge 1901.
Bydžovský B., *Úvod do algebraické geometrie*, Praha 1948, JČMF.
Loria G., *Ebene Kurven*, Leipzig u. Berlin 1910.
Pišl M., *Křivky v Gaussově rovině*, Pokroky matematiky, fysiky a astronomie, č. 1—3, roč. II (1957).
Teixiera F. G., *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Coïmbre 1908.
Wieleitner H., *Algebraische Kurven*, Leipzig 1905.

URČENÍ PARAMETRŮ SLOŽENÉHO ROZLOŽENÍ

Jan Navrátil, *ČVUT Praha.*

Methody k rozdělení rozložení, složeného ze dvou normálních, na složky ([1], [2]), předpokládají, že průměry obou složek jsou různé. Analogická methoda, vycházející z předpokladu, že průměry obou složek jsou stejné [3], vyžaduje výpočet momentů do 6. řádu, což značně snižuje její praktickou aplikabilitu. V této práci je řešena úloha rozkladu rozložení, složeného ze dvou normálních složek se stejnými průměry, použitím absolutních momentů do 3. řádu.

1. Úvod

Při měření hodnot nějaké náhodné veličiny X na souboru jedinců se často předpokládá, že měřená náhodná veličina má normální rozložení $N\,(m, \sigma^2)$, to znamená: pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá u jedince souboru hodnoty menší než x je dána vztahem

$$P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt\,. \tag{1}$$