

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jan Navrátil

Určení parametrů složeného rozložení

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 1, 41--45

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137391>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

reálné různé, je-li $-7\beta\bar{\beta} < AC < \beta\bar{\beta}$; je-li $AC = -7\beta\bar{\beta}$, je bod dotyku jeden reálný, jinak jsou body dotyku konjugované.

d) je-li $Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = 0$, má křivka všechny dvojnásobné body za body úvratu, tedy $u = 0$, $k = 3$ a $2\tau = 2$. Existuje tedy jediná tečna, jejíž rovnici dostaneme z (5.4)

dosažením $\lambda = 2A = -\frac{2\beta\bar{\beta}}{C}$, t. j.

$$C\bar{\beta}z + C\beta\bar{z} - \beta\bar{\beta} = 0. \quad (5.6)****$$

Dotykové body jsou dva reálné různé, leží na kružnici $C^2z\bar{z} + C\bar{\beta}z + C\beta\bar{z} - 2\beta\bar{\beta} = 0$, s jejímž středem $\left(-\frac{\beta}{C}\right)$ tvoří rovnostranný trojúhelník, jehož těžiště je reálný bod úvratu.

Souhrnně máme tedy výsledek:

Bicirkulární kvartika bez bodů úvratu má čtyři dvojnásobné tečny, z nichž dvě jsou reálné různé a dvě konjugované.

Bicirkulární kvartika s jedním bodem úvratu má dvě dvojnásobné tečny, jež jsou reálné pro $AC < 0$ a konjugované pro $AC > 0$.

Bicirkulární kvartika s body úvratu v kruhových bodech má jedinou dvojnásobnou tečnu, jež je reálná.

Literatura

Basset A. B., *An Elementary Treatise on Cubic and Quartic Curves*, Cambridge 1901.

Bydžovský B., *Úvod do algebraické geometrie*, Praha 1948, JČMF.

Loria G., *Ebene Kurven*, Leipzig u. Berlin 1910.

Pišl M., *Křivky v Gaussově rovině*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, č. 1–3, roč. II (1957).

Teixiera F. G., *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Coïmbre 1908.

Wieleitner H., *Algebraische Kurven*, Leipzig 1905.

URČENÍ PARAMETRŮ SLOŽENÉHO ROZLOŽENÍ

JAN NAVRÁTIL, ČVUT Praha.

Methody k rozdělení rozložení, složeného ze dvou normálních, na složky ([1], [2]), předpokládají, že průměry obou složek jsou různé. Analogická metoda, vycházející z předpokladu, že průměry obou složek jsou stejné [3], vyžaduje výpočet momentů do 6. řádu, což značně snižuje její praktickou aplikabilitu. V této práci je řešena úloha rozkladu rozložení, složeného ze dvou normálních složek se stejnými průměry, použitím absolutních momentů do 3. řádu.

1. Úvod

Při měření hodnot nějaké náhodné veličiny X na souboru jedinců se často předpokládá, že měřená náhodná veličina má normální rozložení $N(m, \sigma^2)$, to znamená: pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá u jedince souboru hodnoty menší než x je dána vztahem

$$P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt. \quad (1)$$

Někdy však není soubor homogenní a rozpadá se na několik skupin. Pro každou skupinu má sice měřená náhodná veličina rozložení normální, avšak hodnoty parametrů m a σ^2 těchto rozložení jsou pro různé skupiny obecně různé. V tomto případě je někdy vhodné provést rozklad složeného rozložení náhodné veličiny na normální složky, to jest určit hodnoty parametrů m a σ^2 pro jednotlivé skupiny.

Příklad: Skupina studentů provádí měření ohniskové dálky čočky. Můžeme předpokládat, že pro jednotlivé studenty je ohnisková délka normální náhodná veličina s parametry m a σ^2 charakteristickými pro jednotlivé studenty, na př. každý ze studentů má jiný rozptyl měření podle své pečlivosti a podobně. Hodnoty ohniskové délky naměřené skupinou studentů tvoří pak složený soubor. Příklad tohoto druhu je v závěru práce uveden jako ilustrace na popsanou metodu rozkladu.

Rozklad složeného normálního rozložení na jednotlivé složky patří ke klasickým úlohám v matematické statistice. K rozkladu se užívá zpravidla metody momentové, r -tý obecný moment normálního rozložení je definován vztahem

$$\mu_r' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2)$$

Momentová metoda spočívá v tom, že parametry m a σ^2 jednotlivých složek určíme tak, aby momenty theoretického rozložení, vzniklého složením těchto složek, byly stejné jako momenty složeného rozložení, jež máme analyzovat. Postup je zřetelný z dalšího výkladu.

První řešení Pearsonovo [1] pro případ nestejných průměrů složek pochází z roku 1894. Toto řešení je numericky obtížné a zdlouhavé i v úpravě Risserově-Traynardově [2] z roku 1933. U nás metodu Risserovu-Traynardovu převzal (i s chybou tisku v [2]) F. Egermayer [3]. Částečné zjednodušení výpočtů přináší práce [4] a [5] z roku 1934. Těchto metod je možno použít pouze v případě, kdy průměry obou složek jsou významně odlišné. Příklad stejných průměrů je formálně jednoduchý, použije-li se momentové metody Pearsonovy (viz na př. Janko [7]), vyžaduje však výpočet momentů do 6. řádu. Výpočet těchto momentů je velmi zdlouhavý a vypočtené hodnoty jsou nepřesné. Proto se metody pro praktické aplikace nedá téměř použít. V této práci je použito k řešení úlohy *momentů absolutních a stačí tu omezit se na momenty 3. řádu.*

Uvedený problém rozkladu složených rozložení má v praxi dosti značný význam (viz na př. Hald [6]); důležité jsou na př. aplikace v geodesii a v teorii chyb. Aplikovat lze ovšem uvedenou metodu jen v tom případě, je-li počet pozorovaných hodnot, z nichž jsou momenty počítány dost veliký, aby momenty vypočtené z experimentálního materiálu mohly s dostatečnou přesností nahradit momenty theoretické. Při aplikaci musí být též dostatečně odůvodněn předpoklad, že rozložení vzniklo složením dvou rozložení normálních.

2. Momentová metoda

2.1. Absolutní momenty normálního rozložení. r -tým absolutním centrálním momentem, příslušným k normálnímu rozložení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

nazveme číslo

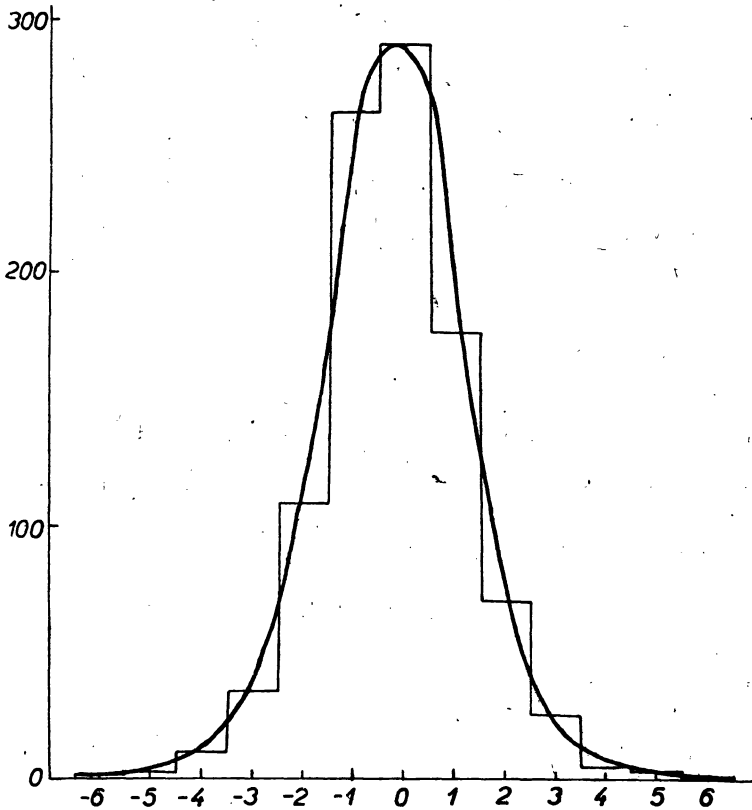
$$\beta_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-m|^r \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2)$$

Snadno se vypočte

$$\beta_{2k} = \sigma^{2k} \cdot \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}, \quad \beta_{2k+1} = \sigma^{2k+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^k \cdot k! \quad (3)$$

2.2. Rozklad složené funkce. Hustota rozložení složeného ze dvou normálních rozložení o stejném průměru je

$$f(x) = k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}} + (1-k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (4)$$



Empirické a theoretické rozložení měřených hodnot z příkladu.

Pro momenty funkce $f(x)$ zřejmě platí vztahy

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= m, \quad \beta_{2s} = \frac{(2s)!}{2^s \cdot s!} [k\sigma_1^{2s} + (1-k)\sigma_2^{2s}], \\ \beta_{2s+1} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^s \cdot s! [k\sigma_1^{2s+1} + (1-k)\sigma_2^{2s+1}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Označme-li

$$\beta_{2s} \cdot \frac{2^s \cdot s!}{(2s)!} = A_{2s}, \quad \beta_{2s+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2^s \cdot s!} = A_{2s+1}, \quad (6)$$

dostáváme pro určení parametrů σ_1, σ_2, k systém tří rovnic

$$A_1 = k(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2, \quad A_2 = k(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + \sigma_2^2, \quad A_3 = k(\sigma_1^3 - \sigma_2^3) + \sigma_2^3 \quad (7)$$

Po elementárních úpravách systému (7) dostáváme tyto výsledky:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{B + D}{2}, & \sigma_2 &= \frac{B - D}{2}, & k &= \frac{A_1 - \frac{B - D}{2}}{D}, \\ \frac{A_3 - A_1 A_2}{A_2 - A_1^2} &= B, & \frac{A_2^2 - A_1 A_3}{A_1^2 - A_2} &= C, & B^2 - 4C &= D^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

kde

2.3. Aplikace na empirické rozložení. Uvedené výsledky můžeme aplikovat na empirické rozložení o velikém rozsahu tak, že momenty ve výrazech (8) nahradíme příslušnými momenty výběrovými. Momenty empirického rozložení četností daného třídami četnostmi n_i počítáme podle známého vzorce

$$m'_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^r n_i, \quad m_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - m'_1)^r n_i, \quad (9)$$

kde x_i značí střed i -té třídy, k je počet tříd a $N = \sum_{i=1}^k n_i$. Když jsou třídy ekvidistantní, používá se k výpočtu s výhodou metody vhodně zvoleného počátku (viz [7]).

Stejně výhody se dá použít i při výpočtu absolutních momentů, které jsou ve shodě s (2) definovány vztahem

$$b_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k |x_i - m'_1|^r \cdot n_i. \quad (10)$$

Pro jednoduchost zavedeme značení

$$\sum_{x_i < m'_1} (x_i - x_0)^r n_i = S_r^-, \quad \sum_{x_i \geq m'_1} (x_i - x_0)^r n_i = S_r^+, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

kde x_0 značí vhodně zvolený počátek. Snadno se odvodí tyto formule, výhodné pro numerický výpočet momentů:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^r \binom{r}{\nu} (x_0 - m'_1)^{r-\nu} \cdot [S_\nu^+ + S_\nu^-], \\ b_r &= \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^r \binom{r}{\nu} (x_0 - m'_1)^{r-\nu} \cdot [S_\nu^+ + (-1)^{r-\nu} \cdot S_\nu^-] \end{aligned} \quad (12)$$

Pro ilustraci uvedu numerický příklad:

Dva studenti prováděli měření ohniskové dálky čočky. Provedli celkem 1000 měření s těmito výsledky (převedeno lin. transformací na vhodné měřítko):

x	Četnost $n(x)$ empirická	Četnost $f(x)$ vypočtená
-6	2	2
-5	3	4
-4	11	12
-3	35	37
-2	109	114
-1	264	243
0	291	290
1	177	189
2	71	73
3	26	23
4	5	8
5	4	3
6	2	2

Vypočtené
charakteristiky:

$$\begin{aligned}
 m_1' &= -0,209 \\
 m_2 &= -2,2413, \\
 b_1 &= 1,1388, \\
 b_3 &= 6,1958, \\
 k &= 0,26, \\
 \sigma_1 &= 2,1879, \\
 \sigma_2 &= 1,1587,
 \end{aligned}$$

Z uvedené tabulky je viděti dobrou shodu mezi empirickým rozložením a mezi rozložením theoretickým, vypočteným popsanou methodou.

Závěr

V práci je popsána methoda určení parametrů rozložení, složeného ze dvou normálních, použitím momentů absolutních. Tím jsou doplněny práce [2], [4], [5], ježto na vyšetřovaný případ nelze použít method tam uvedených. Běžná methoda momentová, uvedená na př. v [7], je málo aplikovatelná, ježto používá momentů 6. řádu. V práci se předpokládá stejně jako v pracích výše citovaných, že výběrové momenty mohou uspokojivě přesně nahradit momenty skutečné, což vyžaduje empirických rozložení velkého rozsahu.

Literatura

- [1] K. Pearson: *Contributions to the mathematical theory of evolution*. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, A, Vol. 185, Part 1, str. 13.
- [2] R. Risser, C. E. Traynard: *Les principes de la statistique mathématique*. Paris, Gauthier-Villars, 1933, str. 96—102.
- [3] F. Egermayer: *Rozpad křivek četnosti*. Statistický obzor. Praha, 1947, sešit 1, str. 26—47.
- [4] C. Burrau: *The half — invariants of the sum of two typical laws of errors, with an application to the problem of dissecting a frequency curve into components*. Skandinavisk Aktuarietidskrift 17, 1934, str. 2.
- [5] B. Strömngren: *Tables and diagrams for dissecting a frequency curve into components by the half — invariant method*. Skandinavisk Aktuarietidskrift 17, 1934, str. 7—54.
- [6] A. Hald: *Statistical Theory with Engineering Applications*. New York, 1952, John Wiley Sons, Inc. London, Chapman Hall.
- [7] J. Janko: *Jak vytváří statistika obrazy světa a života*. I. díl, Praha, 1942, str. 94.