Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

P. K. Raševskij

Geometrie a její axiomatika

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 5, 520--537

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137376

GEOMETRIE A JEJÍ AXIOMATIKA[1])

P. K. Raševskij, Moskva

Geometrie a skutečnost[2])

Když studujeme geometrii poprvé — tak, jak je vykládána ve škole — vznikne v našem vědomí svérázný svět idejí, které jsou zvláštním způsobem současně reálné i průzračné. Uvažujeme o přímkách, o rovinách, o geometrických tělesech (na příklad o kouli), připisujeme jim zcela určité vlastnosti. Kde však a v jakém smyslu existují tyto věci ve tvaru, v němž jsou předmětem našeho studia? Víme přece, že ať bychom na příklad leštili povrch kovové desky jakkoli, nedosáhneme nikdy, aby byl „ideálně rovinný" — pro nevyhnutelné nedostatky v nástrojích i pro chyby v operaci samé. A nejen to. Nejen nelze dosáhnout ideálního rovinného tvaru, ale pro atomovou strukturu látky nelze se tomuto tvaru ani neomezeně blížit. Budeme-li totiž zvyšovat požadovanou přesnost, bude se kovová deska rozpadat v jednotlivé atomy, a nemá pak obecně smyslu mluvit o jejím povrchu.

A co je to přímka? Můžeme snad říci, že světelné paprsky se šíří po ideálně přímých drahách? Kvantová teorie učí, že světlo se šíří v dávkách, v kvantech, při čemž obecně nemá smyslu mluvit o dráze, po níž se takové kvantum pohybuje.

Co tedy studujeme v geometrii? Snad pouhé přeludy, vytvářené naší obrazivostí a cizí hmotnému světu? Víme však velmi dobře z každodenní zkušenosti i z technické praxe, že zákony a pravidla, odvozená pro tyto myšlené objekty, si s železnou zákonitostí podřizují hmotnou přírodu. Inženýr, který propočítává novou konstrukci, může v případě neúspěchu dojít k nedůvěře ke kterémukoli svému úsudku, nikdy ho však nenapadne pochybovat o platnosti na příklad vzorce pro objem hranolu.

Co tedy představují samy o sobě tyto geometrické obrazy, které, bez váhy, nehmotné, jakoby pojímaly v sebe hmotný svět, a jak možno myslet (jak také idealistická filosofie často učila), že tento svět přetváří podle svého obrazu?

Najít odpověď nám pomůže materialistické pojetí světa. Začneme úmyslně hrubým příkladem. Mysleme si pozemek, ohraničený plotem. Budeme-li tento pozemek vyměřovat, bude v našich geometrických úvahách vystupovat místo plotu uzavřená čára, a místo pozemku část roviny. V čem je podstata této záměny hmotného objektu geometrickým pojmem?

Věc záleží v tom, že náš pozemek se prakticky nezmění, uděláme-li plot kolem něj ze dřeva nebo z drátěného pletiva, bude-li plot tak a tak široký, tak a tak vysoký, posuneme-li jej o centimetr stranou atd. Od toho všeho lze abstrahovat, pokud nás zajímá pouze sám pozemek, a pokud to, co se děje na samém jeho okraji, je bezvýznamné. Takovým způsobem abstrahujeme od

---

[1]) П. К. Рашевский (Москва), *Геометрия и ее аксиоматика*, Matěmatičeskoje prosveščenije, č. 5, 1960.

Článek je přepracovaným úvodem autora k ruskému překladu knihy D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (ruský název Д. Гильберт, *Основания геометрии*), originál u B. G. Teubner, Lipsko—Berlín 1930, ruský překlad v OGIZ, izd. těchniko-těoretičeskoj litěratury, Moskva—Leningrad 1948. Do ruštiny přeložil P. K. Raševskij.

[2]) Tento a další odstavec „Geometrie a axiomatická metoda" vyšly v českém jazyce (v poněkud jiné úpravě) samostatně v článku P. K. Raševskij, *O dvou stránkách geometrie*, SOVĚTSKÁ VĚDA — matematika, fysika, astronomie, III (1953), č. 5. *Pozn. překl.*

naprosté většiny vlastností, které má plot jako hmotné těleso a jež pro nás v daném případě nejsou důležité. Ty vlastnosti pak, které pro nás důležité jsou — vlastnosti spjaté s jeho délkovým rozměrem — máme v patrnosti. A právě tyto vlastnosti budou vlastnostmi čáry v geometrickém smyslu slova. Totéž platí pro nepřeberné množství nejrůznějších jiných příkladů. Zabýváme-li se provazem, trajektorií letící střely atd., zajímáme se — s jistým stupněm přesnosti — jen o ty jejich vlastnosti, které nazýváme vlastnostmi geometrické čáry.

Studujeme-li tedy geometrickou čáru, studujeme současně i plot, ohraničující pozemek, i dlouhý — ve srovnání s tloušťkou — provaz, i dráhu letící střely. Neuvažujeme však všechny tyto věci se všemi jejich rozmanitými vlastnostmi, a také ne s maximální přesností, nýbrž uvažujeme je pouze s hlediska jejich jednorozměrného charakteru, s přesností takovou, jaká je pro nás v daném případě důležitá a prakticky nutná. Pak vystoupí ony obecné vlastnosti předmětu, které nazýváme vlastnostmi geometrických čar. Říkáme-li tedy, že čára nemá tloušťku, je to jen zkrácený výraz pro to, že tloušťka plotu se prakticky neprojeví na ohraničeném pozemku, že rozměry průřezu provazu lze zanedbat ve srovnání s jeho délkou atd.

Analogický smysl mají všechny ostatní geometrické pojmy a poučky. Všechny odrážejí vlastnosti hmotných předmětů, zákony hmotného světa. Jejich „ideální" charakter znamená prostě abstrahování od vlastností hmotných věcí, které jsou v daném případě nepodstatné, znamená pak zejména pouze jistý stupeň přesnosti, s nímž se berou v úvahu. Tato abstrakce umožňuje také, aby vystoupily v ryzí formě ony obecné a hluboké vlastnosti hmotných věcí, které nazýváme prostorovými a které vykládáme v geometrii. Zákony geometrie jsou proto zákony závislé na přírodě, neboť jsou z ní vzaty.

Takto geometrické pravdy, odrážející hmotnou skutečnost, reprodukují tuto skutečnost přibližně, ve schematisované formě. Zejména proto, že geometrie abstrahuje od nepřeberného množství věc komplikujících okolností, stává se tak imponující, vnitřně sladěnou a úplnou theorií. Avšak je-li tomu tak, je přirozené, že geometrie (máme tu všude na mysli jen euklidovskou geometrii) si nemůže činit nárok na neomezenou aplikovatelnost v bádání o hmotném světě. Překročí-li přesnost takového bádání jisté hranice, pak geometrie — samou svou podstatou skutečnost jen přibližně odrážející — již přestává vyhovovat.

Aby byla znovu použitelná, je nutné ji zpřesnit v souhlase s novými experimentálními fakty, vrátit se k tomu, co bylo cestou odloženo, od čeho se abstrahovalo.

Geometrie a axiomatická metoda

Zatím jsme nechali zcela stranou otázku logické struktury geometrie, ač tato je pravděpodobně stránkou, která nejvíc překvapuje začátečníka a klade na jeho schopnost soustředit myšlenky největší nároky. To není ovšem náhodné. Právě zde je totiž podstata geometrie, díváme-li se na ni jako na matematiku.

Můžeme říci, že „geometrie jako matematika" je geometrie, uvažovaná z hlediska její logické struktury. Vynasnažíme se proniknout v tomto směru. Pro větší konkrétnost se omezíme na trojrozměrnou euklidovskou geometrii.

Především je jasné, že geometrie není prostý soubor pouček, které mají odděleně každá o sobě svůj zvláštní význam. Geometrické poučky jsou navzájem spjaty hustou sítí logických závislostí. Přesněji řečeno, jednu poučku lze odvodit z jiných čistě logickou cestou, bez užití názorných, z pokusu čerpaných vlastností geometrických objektů, lze ji odvodit pouhou aplikací pravidel formální logiky. Tak např. z pouček „každý obdélník má úhlopříčky stejně dlouhé" a „čtverec je obdélník" plyne, že „každý čtverec má úhlopříčky stejně dlouhé". K tomuto závěru není vůbec nutné představovat si čtverec s jeho úhlopříčkami, není obecně ani třeba vědět, co to „čtverec" a „obdélník" jsou, ani co znamená „má stejně dlouhé úhlopříčky". Tento soud obsahuje jeden z typů sylogismů formální logiky, je proto správný zcela nezávisle na obsahu v něm použitých termínů.

Vzniká přirozeně otázka: Jak lze obsáhnout, jak lze učinit patrným celý systém formálně logických závislostí tohoto druhu, a nikoli jen jednotlivé jejich příklady?

Odpověď dává axiomatická stavba geometrie. Jejím cílem je dostat v geometrické teorii tak říkajíc maximum výsledků z takových formálně logických spekulativních závěrů. Poněvadž ovšem tzv. formální logika učí pouze, jak odvodit nové poučky z pouček již daných, nemůže formální logika udělat něco „z ničeho". Je proto nutné alespoň některé z geometrických pouček přijmout jako výchozí, a všechny ostatní se pak snažit z těchto výchozích odvozovat cestou čistě logických spekulací.

Podaří-li se to, pak poučky, z nichž se všechny ostatní odvozují čistě logickou cestou (bez odvolávání se na geometrický názor) se nazývají axiomy, poučky pak, které se z nich odvozují, větami.

Přitom je přirozené a nutné se snažit, aby axiomů bylo co nejméně a aby při budování geometrie současně nejvíc práce připadlo na formálně logické soudy. Takový stav věci totiž nejlépe ukáže rozsah logických spojitostí a nejlépe osvětlí logickou strukturu geometrie.

Proveďme souhrn výše uvedených úvah:

Geometrie vykládá prostorové vlastnosti hmotných těles. V tomto smyslu její poučky mohou a musí být ověřeny experimentálně. Jako všechny fysikální poučky, také geometrické poučky reprodukují hmotný svět jen v abstrakci a geometrické pravdy jsou proto jen přibližné.

Geometrie jako matematika se zabývá jen logickými vztahy mezi svými poučkami, přesněji, zabývá se logickým odvozováním všech svých pouček z několika základních (axiomů). O pravdivosti geometrických pouček je proto možno hovořit jen jako o podmíněné, a to právě v tom smyslu, že daná poučka se skutečně odvozuje z axiomů.

Euklidovy „Základy"

Euklidovy „Základy" (asi roku 300 p. n. l.) jsou soustavným výkladem základů geometrie ve formě, k jaké v tehdejší době geometrie dozrála jako výsledek cca 300 let trvajícího rozvoje matematiky na řecké půdě. Od té doby až téměř po naše dny se Euklidovy „Základy" pokládaly za vzor přísně vědeckého stylu výkladu. Nikdo nenašel ani příčin ani důvodů k základnímu jejich přepracování a naše školní učebnice je dodnes v podstatě reprodukují. Příčina je v mistrovství a v dokonalosti — z vědeckého hlediska tehdejší doby — s jakou Euklid logicky geometrii rozvíjel přesným odvozováním, jak se tehdy zdálo, následujících pouček z pouček předcházejících. Bylo by ovšem nadsazováním říkat, že Euklid vycházel z hlediska axiomatické výstavby geometrie. Tendenci k tomu lze však u něho spatřovat. Euklid klade totiž na začátek svého díla čtrnáct základních pouček — pět, jež nazývá postuláty a devět, jež nazývá axiomy — které jsou východiskem pro všechny další úvahy, a jež tak tvoří základy díla. Těchto čtrnáct pouček však zdaleka nestačí k vybudování geometrie čistě logickou cestou a Euklid v dalších úvahách používá stále vedle logických závěrů také názorných představ. Mnohé definice, i definice nejzákladnější, jež Euklid podává, nejsou definicemi v logickém smyslu, nýbrž jen názorným popisem geometrických objektů. Na příklad „přímka je délka bez šířky" ap. Z takové definice se přísně logicky nic odvodit nedá, taková definice slouží jen za ukazatele pro práci s názorem.

V Euklidových „Základech" nemůžeme proto vidět axiomatické dílo v dnešním slova smyslu. Tendence k tomu tu však je a tato tendence se v dalším rozvíjí. Lze to vidět v pracích mnoha komentátorů Euklida, kteří se často snažili o zdokonalení Euklidova výkladu a o jeho lepší fundování. Tyto pokusy šly cestou rozmnožování počtu axiomů, jejichž nedostatečnost pro logickou výstavbu geometrie byla pociťována. Dodnes nevíme, které axiomy a postuláty vyslovil Euklid sám, a které byly později připojeny. Tyto pokusy však nepřinesly ve srovnání se „Základy" podstatně nic nového a dělaly se namátkou. I když ukazovaly správně mezery, jež bylo třeba vyplnit, měly touž logicky nekonsistentní formu.

Pečlivé propracovávání otázky základů geometrie nešlo cestou přímého logického zpřesňování axiomatiky a Euklidových důkazů, nýbrž dělo se dlouhou řadou pokusů opravit Euklida tam, kde měl naprostou pravdu. Máme na mysli historii pátého Euklidova postulátu.

Pátý Euklidův postulát a objev neeuklidovské geometrie

Pátý Euklidův postulát zní:

Kdykoli přímka, protínající jiné dvě přímky, tvoří s nimi dva souhlasné úhly tak, že jejich součet je menší než úhel přímý, tyto dvě jiné přímky se protínají na té straně, kde je tento součet menší než úhel přímý.

Tento postulát má zvláštní úlohu v Euklidově systému: dochází užití až poměrně pozdě; dvacetosm prvých Euklidových pouček se dokazuje bez něj. Tato okolnost vedla přirozeně k myšlence, že pátý Euklidův postulát je snad jako postulát zbytečný, a že jej lze odvodit jako větu. Po dvě tisíciletí se skutečně děly pokusy o toto odvození, někdy s přesvědčením, že se to podařilo, (a někteří diletanti se o to pokoušejí dodnes).

Všechny důkazy v tomto směru mají jeden společný rys: vychází se vždy z jistého předpokladu, který je s pátým Euklidovým postulátem ekvivalentní. Na příklad „každým bodem uvnitř úhlu prochází alespoň jedna přímka, která protíná obě ramena úhlu", „přímky v rovině, které se neprotínají, nemohou se vzájemně vzdalovat", „není absolutní délkové jednotky, to jest úsečky, jež by se od jiných úseček lišila zvláštními geometrickými vlastnostmi (jako se na příklad pravý úhel liší od všech jiných úhlů)", „existují alespoň dva podobné trojúhelníky" a podobně.

Z takového předpokladu se vyšlo jako ze samozřejmého, zjistilo se, že negace pátého Euklidova postulátu mu odporuje, a autor důkazu měl za to, že je u cíle. Bylo by však nesprávné vidět v tom všem hrubou logickou chybu. Až do vybudování dnešní axiomatiky geometrie (konec 19. století) nebylo totiž spolehlivého kriteria pro přesný resp. nepřesný důkaz v geometrii. Ve všech důkazech byly odkazy na názor a hranice pro oprávněnost takových odkazů nebyly vymezeny. Mohl tedy v jisté míře každý autor tvrdit, že jeho předpoklady jsou zákonité, a že tedy pátý Euklidův postulát dokázal. Nekonsistence těchto důkazů je jasná teprve dnes; dříve byla poznávána spíše jen matematickým důmyslem.

Tak se postupně s pokusy o důkaz pátého Euklidova postulátu hromadily poučky, s tímto postulátem ekvivalentní. Ukázalo se, že negace pátého Euklidova postulátu znamená negaci všech těchto pouček, to jest že tato negace má za následek řadu nepravděpodobných paradoxních důsledků, v nichž však nebylo možno najít logického sporu.

Při hledání takového logického sporu se již v 18. století dosti daleko rozvíjely důsledky negace pátého Euklidova postulátu (Saccheri v roce 1733, Lambert v roce 1788). V podstatě se tu již vypracovávaly elementy neeuklidovské geometrie, i když autoři si toho nebyli vědomi[3]).

V roce 1823 začal velký ruský geometr N. I. Lobačevskij (1793—1856) tušit neúčelnost pokusů dokázat postulát o rovnoběžkách. Brzy přišel na myšlenku, že negace pátého Euklidova postulátu vůbec ke sporu nevede a že tedy znamená nový, neeuklidovský geometrický systém. Lobačevskij byl první, kdo vystoupil se soustavným výkladem neeuklidovské geometrie veřejně. Dne 11. 2. 1826 vyložil na zasedání fysikálně matematického oddělení Kazaňské university základy svého objevu a v roce 1829 uveřejnil v „Kazaňském věstníku" práci „O základech geometrie", v níž byla podrobně vyložena neeuklidovská geometrie[4]). Nezávislé na Lobačevském došel k neeuklidovské geometrii také znamenitý maďarský matematik János Bolyai (1802—1860). Také v Gaussově (1777—1855) díle najdeme v tomto směru základní výsledky. Gauss však svoje práce o neeuklidovské geometrii neuveřejnil, obávaje se nepochopení a zesměšňování[5]).

Myšlenka jiné než euklidovské geometrie natolik předstihla svou dobu, že po tři desítiletí zůstala neeuklidovská geometrie neuznána a dokonce neznáma. Až teprve asi v šedesátých letech 19. století dochází uznání, a ve 20. století, s objevem teorie relativity, dobývá pevně fysiku.

Význam neeuklidovské geometrie v otázce základů geometrie

V čem je obsah neeuklidovské geometrie? Ukazuje se, že v geometrii je možno se vzdát pátého Euklidova postulátu, to jest připustit, že v rovině lze kterýmkoli bodem, ležícím mimo přímku, vést nekonečně mnoho přímek, jež tuto přímku neprotínají. Z tohoto předpokladu, ač zdánlivě nesprávného, lze neomezeně odvozovat důsledky, dokazovat věty, aniž se dojde k logickému sporu. Vzniká tak nová, neeuklidovská geometrie. Je pravda, že některé věty této geometrie jsou z našeho názorového hlediska zdánlivě ještě méně správné,

[3]) Viz na příklad В. Ф. Каган, *Лобачевский и его геометриа*, Moskva—Leningrad 1955.

[4]) Viz В. Ф. Каган, *Лобачевский*, Moskva 1944, 2. vydání 1948; П. С. Александров, *Н. И. Лобачевский* (*Краткий очерк жизни и деятельности*) v knize *Н. И. Лобачевский*, Moskva—Leningrad, 1949; viz také A. P. Norden, *125 let neeuklidovské geometrie,* SOVĚTSKÁ VĚDA — matematika, fysika, astronomie, II (1952), str. 89 ad.; Markov N. N., *Význam geometrie N. I. Lobačevského pro rozvoj fysiky,* tamtéž, III (1953), str. 61 ad.; K. Havlíček, *Sté výročí smrti Jánose Bolyaie,* v tomto časopise, V (1960), č. 3. *Pozn. překl.*

[5]) Viz sborník *Об основаниях геометрии*, Moskva 1956.

než výchozí předpoklad, některé jsou dokonce fantastické. Logický výklad však zůstává bezesporný.

Již tato okolnost svědčí o jisté autonomii logické výstavby geometrie vzhledem ke geometrickému názoru. Ukazuje, že geometrii lze logicky rozvíjet do jisté míry nezávisle na názorných představách a dokonce i proti těmto představám. Ještě větší význam měla však druhá stránka věci, která zajímala již i Gausse i Lobačevského, a to přirozená otázka: jestliže jsou obě geometrie — euklidovská i neeuklidovská — logicky bezesporné, může v materiálním světě platit jen jedna z nich (přesněji, jedna z nich musí odrážet vlastnosti prostoru lépe než druhá).

Poprve tak vznikla situace, typická i pro dnešní vědu: pro zobrazení prostorových forem reálného světa může matematika předložit na výběr různé systémy (neeuklidovská geometrie se v dalším rozvíjela a zobecňovala). Volba nejlepšího systému musí být ovšem rozhodnuta fysikálním pokusem. Pokud existovala jen euklidovská geometrie, pokládala se bez výhrad pro přírodu za závaznou. Kdyby toto hledisko nebylo překonáno, nebyla by fysika dosáhla takového pronikavého úspěchu, jakým je teorie relativity.

Dále je jasné, že naše intuice, naše názorné představy nemohou ani za předpokladu, že nám poskytují zcela určité poznatky, současně odpovídat všem vzájemně podstatně se lišícím geometriím. Máme proto jediné východisko: co nejúplněji využít logických souvislostí mezi předpoklady v oblasti geometrie a jimi zdůvodnit stavbu geometrických systémů. To znamená, že přecházíme k axiomatickému stanovisku.

Avšak skutečné vypracování uspokojivé axiomatiky euklidovské geometrie a řešení problémů s tím spojených nebylo nijak snadné. V posledních desítiletích 19. století se tím zabývalo mnoho vědců (Pasch, Peano, Hilbert a jiní). Nejlepší axiomatický systém vypracoval D. Hilbert ve svých „Základech geometrie". O tomto systému v dalším pohovoříme.[6])

Hilbertova axiomatika
(skupiny axiomů I—IV)

Hilbertovy „Základy geometrie" vyšly poprvé v roce 1899. Během dalšího vydávání tohoto díla provedl Hilbert v knize řadu zpřesnění a oprav, v podstatě však zůstala jeho axiomatika nedotčena. Podáme přehled o ní v její dnešní formě.

Hilbertova práce se stala klasickou hlavně proto, že se mu podařilo sestrojit axiomatickou geometrii tak přirozeně, že její logická struktura je zcela průzračná. Rozdělení Hilbertovy axiomatiky umožňuje za prvé formulovat axiomy nejjednodušším a nejstručnějším způsobem, za druhé umožňuje zkoumat, kam až lze propracovávat geometrii, vyjde-li se nikoli z úplné axiomatiky, nýbrž jen z některých skupin axiomů, v něž se Hilbertova axiomatika přirozeně

---

[6]) D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* Kniha byla přeložena do všech světových jazyků a došla osmi vydání. V roce 1948 vyšel její ruský překlad podle 7. přepracovaného vydání: Д. Гульберт, *Основиния геометрии*, Moskva—Leningrad, 1948.

V tomto krátkém článku se nemůžeme zabývat historií analytického směru v geometrii, spjatého se jmény S. Lie a F. Klein, ani řadou jiných momentů ve vývoji geometrie. Zájemce odkazujeme na knihu В. Ф. Каган, *Основания геометрии*, т. II, *Исторический очерк развития учения од основаниях геометрии*, 1907 (nezaměňovat s knihou téhož autora a týmž názvem, která vyšla v roce 1949 (I. díl) a v roce 1956 (II. díl)).

člení. Hilbert také skutečně takovou analysu provedl v řadě zajímavých prací, jež v podstatě představují velkou část jeho knihy.

Hilbertova práce byla kromě toho podnětem k mnoha dalším bádáním v tomto směru.

V Hilbertově systému se uvažují tři druhy objektů: „Body“, „přímky“ a „roviny“. Dále se zavádějí tři druhy vztahů mezi těmito objekty: „Leží v“ (resp. „prochází“[7]), „mezi“ a „shodný“. To jsou základní pojmy. Všechny ostatní pojmy se zavádějí přímými definicemi na podkladě těchto základních pojmů.

Co tyto základní pojmy představují? Již jsme řekli, že v axiomatické výstavbě geometrie se zajímáme jen o logické odvozování geometrických vět z jistého omezeného počtu vět daných. Tyto dané věty nazýváme axiomy. Jestliže se však věty odvozují výlučně jen podle pravidel formální logiky, je lhostejné, co se pod věcmi nebo pod vztahy mezi věcmi rozumí. Formální logika se právě proto nazývá „formální“, poněvadž učí formám odvozování a závěrů, správným nezávisle na tom, o čem uvažujeme. To znamená, že ve formální logice se odrážejí mimořádně obecné zákonitosti reálného světa, které se vnucují našemu vědomí s nepřekonatelnou silou proto, že vyplývají z nepřehledného množství zkušeností a pozorování.

Při axiomatickém vypracovávání geometrie zůstane proto přísně logicky odvozená věta správnou, ať pod pojmy „bod“, „přímka“, „bod leží na přímce“ atd. rozumíme cokoli. Stačí, aby zůstaly v platnosti axiomy, z nichž se věta odvodila. Zejména není nijak nutné spojovat s pojmy „bod“, „přímka“ atd. obvyklé názorové představy. Tedy:

Při axiomatické výstavbě geometrie rozumíme „body“, „přímkami“, „rovinami“, „leží na (v), prochází“, „mezi“, „shodný s“ jisté věci a vztahy, o nichž víme jen to, že vyhovují axiomům.

Tyto věci ani vztahy se nijak přímo nedefinují. Lze však říci, že soustava axiomů je souhrnně nepřímo charakterisuje.

Skupina I axiomů obsahuje osm axiomů:

Zde jde o vztah „leží na (v), prochází“, který v jistých případech platí pro bod a přímku a pro bod a rovinu. Výroky „bod leží na přímce“ a „přímka prochází bodem“ říkají totéž. V zájmu lepšího vyjadřování budeme používat i jiných slovních vazeb, na příklad místo „přímka a prochází každým z bodů A a B“ řekneme „přímka a prochází body A a B“, nebo „přímka a spojuje body A a B“; místo „A leží na a“ řekneme také „A je bodem a“ a podobně. Leží-li bod A na přímce a a také na přímce b, řekneme také, že „přímky a a b se protínají v bodě A“, „ přímky a a b mají společný bod A“ atd. Totéž se týká konfigurace bod a rovina.

Axiomy skupiny I jsou:

Axiom I_1: *Ke každým dvěma bodům A a B existuje přímka a, která je spojuje.*

Axiom I_2: *Ke každým dvěma bodům A a B existuje ne více než jedna přímka, jež je spojuje.*

[7]) V originále Принадлежит — „náleží (čemu)“. Tento termín není v češtině nejvhodnější, neboť je dosti nezvyklé říkat na příklad „přímka náleží bodu“. Bylo by možno dosti dobře použít termínu „incidentní s“, zde však je zase závada v tom, že tento termín se v češtině nepoužívá vždy ve stejném smyslu; používá se sice běžně výroků „přímka je incidentní s bodem“, „rovina je incidentní s přímkou“ a podobně, ve smyslu „přímka prochází bodem“, „rovina prochází přímku“, avšak také ve smyslu „rovina protíná přímku“, „dvě přímky se protínají v bodě“ (dvě přímky jsou incidentní) a podobně, což zase není zahrnuto ve významu Hilbertových axiomů. Autor však sám mluví v dalším o koncesích v tomto směru. *Pozn. překl.*

Axiom I_3: *Na přímce existují nejméně dva body. Existují nejméně tři body, které neleží v téže přímce.*

Axiom I_4: *Ke kterýmkoli třem bodům, neležícím v téže přímce, existuje rovina, která jimi prochází. Ke každé rovině existuje bod, který v ní leží.*

Axiom I_5: *Ke kterýmkoli třem bodům A, B, C, neležícím v téže přímce, existuje ne více než jedna rovina, která jimi prochází.*

Axiom I_6: *Leží-li dva body A a B přímky a v rovině α, leží každý bod přímky a v rovině α.*

Axiom I_7: *Mají-li dvě roviny α a β společný bod A, mají nejméně ještě jeden další společný bod B.*

Axiom I_8: *Existují nejméně čtyři body, které neleží v téže rovině.*

V těchto osmi axiomech je řečeno všechno, co pro vypracování geometrie musíme znát o vztazích ,,bod leží na přímce" a ,,bod leží v rovině". Není přitom nutné představovat si ,,kuličku na dlouhé tyči" ap., není vůbec nutné vkládat do uvedených výroků jakýkoli konkrétní obsah. Je však naprosto nutné vědět, že jsou-li dány dva různé body, existuje právě jedna přímka, jež oběma body prochází (axiomy I_1 a I_2) atd. Takto tedy jisté vztahy, jež mohou být mezi bodem a přímkou a mezi bodem a rovinou, a které vyjadřujeme vazbou ,,leží na resp. v", musí splňovat pouze požadavek, že pro ně platí osm axiomů skupiny I, nic více.

V tomto smyslu můžeme říci, že axiomy skupiny I nepřímo definují pojem ,,leží na (v)". Hilbert používá v dalším i jiné terminologie, na příklad ,,prochází", ,,spojuje" ap. Nejde tu pochopitelně o nové pojmy, nýbrž jen o jiná slovní označení.

Vztah ,,přímka leží v rovině" není základní. Zavádí se přímou definicí:

Přímka leží v rovině, jestliže každý bod, který leží na přímce, leží také v rovině.

Podle axiomu I_6 je taková situace možná. Poznamenejme ještě, že axiom I_8 zajišťuje nejméně trojrozměrnost prostoru (to jest neredukovatelnost prostoru na rovinu). Axiom I_7 naproti tomu odstraňuje možnost více než trojrozměrného prostoru. Ve čtyřrozměrném prostoru se totiž mohou dvě dvojrozměrné roviny protnout pouze v jednom bodě (mít jen jeden bod společný). V trojrozměrném prostoru je však tak ,,těsno", že dvě roviny se nemohou od společného bodu rozcházet na různé strany, aniž by se protťaly v přímce. To právě vyjadřuje axiom I_7.

Ve skupině II axiomů jde o jistý vztah, který může platit pro bod a další dva body, jež s ním leží v jedné přímce. Tento vztah označujeme slovem ,,mezi".

Ve skupině II jsou axiomy:

Axiom II_1: *Leží-li bod B mezi body A a C, jsou body A, B, C body téže přímky a bod B leží také mezi body C a A.*

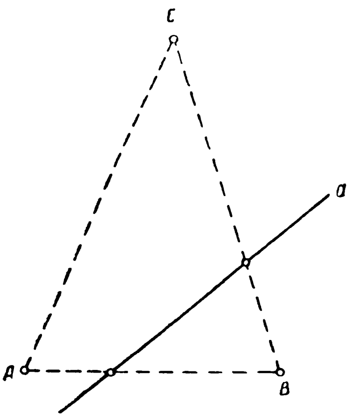
Axiom II_2: *K libovolným dvěma různým bodům A a C přímky AC existuje nejméně jeden bod B takový, že bod C leží mezi body A a B.*

Axiom II_3: *Ze tří libovolných bodů přímky nejvýše jeden leží mezi zbývajícími dvěma.*

Axiom II_4: *Buďtež A, B, C tři body, které neleží v téže přímce. Budiž a přímka, ležící v rovině ABC a neprocházející žádným z bodů A, B, C. Je-li přitom na přímce bod, ležící mezi body A, B, je na přímce také bod, ležící mezi body A, C nebo mezi body B, C* (obr. 1).

Axiomy II_1, II_2, II_3 se týkají uspořádání bodů na přímce (lineární uspořádání), axiom II_4 se týká uspořádání v rovině.

Vše, co je možno požadovat od pojmu „mezi" při logické výstavbě geometrie, je v axiomech II_1, II_2, II_3, II_4 obsaženo. Názorných představ se tu můžeme vzdát. Nejdůležitější úlohu v této skupině axiomů má axiom II_4 (axiom Paschův), který charakterisuje vlastnosti pojmu „mezi" pro úsečky, tvořící trojúhelník (neležící tedy v jedné přímce). Axiomy II_1, II_2, II_3 se týkají jen přímočarého rozmístění bodů a jsou obsahově dosti chudé. Samy nestačí dokonce ani k tomu, aby charakterisovaly vztah „mezi" pro body na téže přímce. Umožňuje to teprve axiom Paschův, to jest je k tomu třeba rovinných konstrukcí. Teprve potom lze dokázat linearitu rozložení bodů na přímce, to jest teprve potom je možné očíslovat body libovolné konečné množiny tak, aby bod, jehož „kóta" leží mezi „kótami" dvou jiných bodů, ležel mezi těmito dvěma body.



Obr. 1

Na podkladě pojmu „mezi", charakterisovaném axiomy skupiny II, se pak zavádějí přímými definicemi pojmy úsečka, polopřímka[8]), úhel a polorovina.

Úsečka AB se definuje jako dvojice bodů A, B. Vnitřní body úsečky AB se definují jako body ležící mezi body A a B. Dokazuje se dále, že kterýkoli bod O na přímce a rozděluje ostatní body přímky a na dvě třídy tak, že bod O leží vždy mezi dvěma body různých tříd a nikdy mezi dvěma body téže třídy, přičemž toto rozdělení je jediné. Tyto třídy se nazývají polopřímky, v něž bod O rozděluje přímku a. Bod O se nazývá vrchol těchto polopřímek. Úhel se definuje jako dvojice $(\widehat{h, k})$ polopřímek h a k o společném vrcholu, které nepatří téže přímce. Dále se dokazuje z axiomů II_1, II_2, II_3, II_4, že rovina je každou přímkou v ní ležící dělena ve dvě poloroviny.

U axiomů skupiny III uvidíme, že již v jejich formulaci je obsažen pojem „mezi", neboť v těchto axiomech se hovoří o úsečkách a úhlech[9]).

Účel axiomů skupiny III je formulovat ty vlastnosti shodnosti, které by byly postačující pro čistě logické odvozování všech vět, v nichž tento vztah vystupuje.

Předpokládáme, že úsečka nebo úhel může být k jiné úsečce nebo k jinému úhlu v jistém vztahu, který označíme slovem „shodný" (nebo symbolem $\equiv$) a o němž je známo jen to, že vyhovuje pěti axiomům skupiny III.

Axiom III_1: *Je-li dána úsečka AB a polopřímka h' s vrcholem A', existuje na polopřímce h' bod B' takový, že úsečka AB je shodná s úsečkou $A'B'$:*

$$AB \equiv A'B' .$$

---

[8]) U Hilberta *Halbstrahl* — polopaprsek. *Pozn. překl.*

[9]) Viz odstavec o nezávislosti axiomů. *Pozn. překl.*

Tento axiom umožňuje vynášení úseček (jednoznačnost takového vynášení se dokazuje později).

Úsečka byla definována jako dvojice bodů, aniž se cokoli řeklo o jejich pořadí. Proto mají zápisy

$$AB \equiv A'B' \,, \quad AB \equiv B'A' \,, \quad BA \equiv A'B' \,, \quad BA \equiv B'A'$$

týž smysl.

Axiom III_2: *Jsou-li úsečka $A'B'$ a úsečka $A''B''$ shodné s touž úsečkou AB, je úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou $A''B''$.*

Kratčeji, jsou-li dvě úsečky shodné s úsečkou třetí, jsou také vzájemně shodné (v libovolném pořadí).

Z takto zavedené shodnosti neplyne nijak, že shodnost úsečky sama se sebou je zamozřejmá. Plyne to však z axiomů III_1 a III_2: Úsečku AB naneseme na jakoukoli polopřímku, to jest sestrojíme úsečku $A'B'$ shodnou s úsečkou AB, a na shodnosti $AB \equiv A'B'$ a $AB \equiv A'B'$ aplikujeme axiom III_2.

Na tomto podkladě se pak (užitím axiomu III_2) ukazuje, že shodnost je symetrická a transitivní, to jest že platí: je-li $AB \equiv A'B'$, je $A'B' \equiv AB$ a je-li $AB \equiv A'B'$, $A'B' \equiv A''B''$, je $AB \equiv A''B''$.

Vzhledem k symetrii shodnosti má smysl výrok „dvě úsečky jsou vzájemně shodné“.

Axiom III_3: *Buďtež AB a BC dvě úsečky na přímce a takové, že B leží mezi A a C. Buďtež dále $A'B'$ a $B'C'$ dvě úsečky téže přímky nebo jiné přímky a' takové, že B' leží mezi A' a C'. Je-li potom $AB \equiv A'B'$ a $BC \equiv B'C'$, je také $AC \equiv A'C'$.*

Tento axiom umožňuje skládat úsečky jednoznačně (až na shodnost). Vynášení úhlů se zavádí stejně jako vynášení úseček. Zde je však nutno axiomaticky vyžadovat jednoznačnost vynášení. Pak se transitivnost vynášení a skládání úhlů dají dokázat.

Axiom III_4: *Budiž dán úhel $(\widehat{h, \mathrm{k}})$ v rovině α a polopřímka h' v rovině α'. Budiž dále stanovena jedna z polorovin, v něž přímka a', na níž leží polopřímka h', rozděluje rovinu α'. Pak vychází z vrcholu O' polopřímky h' právě jedna polopřímka k', která leží ve stanovené polorovině a taková, že úhel $(\widehat{h, k})$ je shodný s úhlem $(\widehat{h', k'})$:*

$$(\widehat{h, k}) \equiv (\widehat{h', k'}) \,.$$

Každý úhel je shodný sám se sebou, to jest platí vždy

$$(\widehat{h, k}) \equiv (\widehat{h, k}) \,.$$

Kratčeji: Každý úhel lze vynést jedním jediným způsobem v dané rovině při daném rameni (polopřímce) na danou jeho stranu.

Při definování zůstal stranou smysl otáčení. Proto zápisy

$$(\widehat{h, k}) \equiv (\widehat{h', k'}) \,, \quad (\widehat{h, k}) \equiv (\widehat{k', h'}) \,, \quad (\widehat{k, h}) \equiv (\widehat{h', k'}) \,, \quad (\widehat{k, h}) \equiv (\widehat{k', h'})$$

mají týž smysl.

Úhel s vrcholem B, na jehož jednom rameni leží bod A, na druhém bod C, se označuje také znakem $\widehat{ABC}$ nebo kratčeji $\widehat{B}$.

Slovem trojúhelník označíme trojici bodů neležících na téže přímce.

Axiom III$_5$: *Platí-li pro dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ shodnosti $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, platí také shodnost $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$.*

Záměnou označení dostaneme, že jsou-li splněny předpoklady axiomu III$_5$, platí vždy

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}\ , \quad \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}\ .$$

Zdůrazněme, že dokud nemáme naprosto přesného logického důkazu, nesmíme pojmu shodnosti připisovat ani ty „nejzřejmější" vlastnosti. Tak na příklad nelze zatím předpokládat, že $\widehat{(h, k)} \equiv \widehat{(h', k')}$ a $\widehat{(h', k')} \equiv \widehat{(h, k)}$ je totéž. Tato symetrie se dokazuje až poměrně pozdě.

Axiom III$_5$ má zvláště důležitou úlohu, neboť postuluje souvislost mezi shodností úseček a shodností úhlů.

Skupina IV Hilbertových axiomů obsahuje jen jeden axiom, a to axiom rovnoběžnosti:

Axiom IV: *Budiž a libovolná přímka a A bod ležící mimo ni. Pak v rovině určené přímkou a a bodem A existuje ne více než jedna přímka která prochází bodem A a která neprotíná přímku a.*

Přidáním tohoto axiomu dostáváme euklidovskou geometrii. Negace tohoto axiomu vede na geometrie neeuklidovské.

Pátá skupina Hilbertových axiomů — axiomy spojitosti. Nearchimedovská geometrie

Zcela zvláštní postavení mají axiomy skupiny V, které dovršují Hilbertovu knihu. V prvním vydání této knihy obsahovala skupina V pouze známý axiom Archimedův:

Axiom V$_1$: *Naneseme-li na přímce dostatečněkrát úsečku shodnou s danou úsečkou, můžeme přesáhnout jakoukoli danou úsečku.*

Hilbert sám formuluje Archimedův axiom takto:

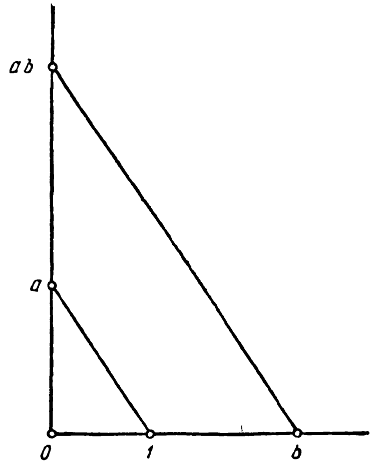
Axiom V$_1$: *Buďtež AB a CD dvě libovolné úsečky. Pak existuje na přímce AB konečný počet bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takových, že úsečky AA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n$ jsou shodné s úsečkou CD a že bod B leží mezi body A a A_n* (obr. 2).

Zdá se zvláštní, že Hilbert si zpočátku nevšímal nedostatečnosti těchto axiomů pro vybudování euklidovské geometrie v obvyklém smyslu. Vezmeme-li totiž obyčejný euklidovský prostor, vztažený ke kartézské souřadnicové soustavě, a vyloučíme-li z něj body, jejichž souřadnice nejsou algebraická čísla, dostaneme neúplný, „proděravělý" prostor, v němž však, jak se můžeme snadno přesvědčit, platí všechny Hilbertovy axiomy.

Když na tuto mezeru v Hilbertově axiomatice někteří autoři poukázali (na příklad Poincaré v roce 1900), doplnil Hilbert v druhém vydání ,,Základů geometrie" skupinu V ještě axiomem V_2, tak zvaným axiomem úplnosti:

Axiom V_2: *Systém bodů, přímek a rovin nelze rozšířit novými prvky tak, aby v rozšířeném systému platily všechny jmenované axiomy I—IV a V_1.*[10])

Okolnost, že axiom úplnosti v prvním vydání Hilbertovy knihy není, lze vysvětlit z celkového pojetí knihy. Ústřední myšlenkou Hilbertovou bylo totiž vypracování geometrie nezávisle na axiomech spojitosti. Nedošlo proto nikde k chybám nebo mezerám v důkazech, a axiom úplnosti zůstal více méně mrtvě narozeným dítětem; nikde se tohoto axiomu nepoužilo.



Obr. 2

Sama formulace axiomu V_2 je velmi umělá, a ihned ukazuje důvod, proč byl tento axiom zaveden — učinit systém axiomů formálně úplný, vyplnit ,,skuliny" v prostoru, jež bez tohoto axiomu v něm mohou vzniknout.

Hlavní myšlenkou, vyjádřenou axiomem úplnosti, je, zhruba řečeno, vyloučení neúplného prostoru, to jest prostoru, v němž některé body, přímky a roviny jsou vypuštěny[11]).

Vidíme, že axiomy spojitosti mají zvláštní místo v Hilbertově axiomatice. Hilbert je ochoten se bez nich obejít — bez axiomu úplnosti vždy, bez Archimedova axiomu z velké části. Musíme se proto podívat blíže na příčiny tohoto jevu. Tyto příčiny jsou velmi hluboké.

Omezíme-li se na axiomy skupin I až IV, je pro Hilbertův systém charakteristické, že tu není vůbec pojem nekonečné množiny. Autor sice podává formulace, jež můžeme zcela přirozeně chápat v množinovém smyslu; na příklad úvodní slova Hilbertovy knihy jsou: ,,... *Mysleme si tři různé systémy věcí* ...". Takové formulace mají však v podstatě jen povahu deklarací, skutečný výklad pokračuje bez nich. Podívejme se na věc blíže. Především je velmi důležité, že Hilbert upouští od pojmů přímky a roviny jako nekonečných bodových množin, a zavádí je jako samostatné pojmy. Pak ovšem vystupuje ve formulaci kteréhokoli axiomu a v důkazu kterékoli elementárně geometrické věty zřejmě jen konečný počet bodů (a také jen konečný počet přímek a rovin). Pojem nekonečné množiny zůstává prázdný. Není zejména vůbec nutno uvažovat na příklad množinu všech bodů na přímce, v rovině, v prostoru (taková množina by nutně musela být nekonečná). Ani v jednom axiomu nevystupují takové množiny. Jestliže se v kterékoli poučce tvrdí, že existuje (nebo neexistuje) bod s danými vlastnostmi (na příklad bod ležící mezi dvěma body), je to třeba chápat bezprostředně v tom smyslu, že se připouští (nebo nepřipouští) uvažo-

[10]) V posledním vydání ,,Základů geometrie" je tento axiom formulován poněkud jednodušeji jako axiom lineární úplnosti.

[11]) Axiom úplnosti je v naší soustavě axiomů ekvivalentní s Cantorovým a Dedekindovým axiomem.

vat bod s danou vlastností. Není naprosto závazné představovat si přitom množinu všech bodů, v níž jako prvek existuje (nebo neexistuje) bod s danou vlastností.

Zrovna tak není nutno při dělení přímky na dvě polopřímky bodem O hovořit o rozdělení množiny všech bodů přímky na dvě části. Jde v podstatě o to, že konstruujeme-li v rámci našich úvah body na přímce, můžeme pro každé dva z nich, A a B, říci, leží-li na různých polopřímkách nebo na téže polopřímce. Jinými slovy, dělení na dvě třídy se realisuje pro všechny body, s nimiž se fakticky v úvahách setkáváme, ať jdeme jakkoli daleko, a to je pro nás postačující. Takových bodů bude však vždy jen konečný počet, a pojem nekonečné množiny všech bodů na přímce zůstává zase zbytečný.

Rozebereme-li takto krok za krokem všechny výklady, přesvědčíme se, že všude jde v podstatě o konečné konstrukce, jejichž zákonitosti plynou z axiomů. Nic tu nevyžaduje, abychom se obraceli k pojmu nekonečné množiny.

Všechno, co jsme řekli, se vztahuje — opakujme — k axiomům skupiny I až IV a k té části geometrie, která z nich vyplývá. Zcela jinak je tomu s axiomy spojitosti (skupina V). Mezi touto skupinou axiomů a skupinami I—IV je propast. V axiomech spojitosti je pojem nekonečné množiny podstatný, bez něj tyto axiomy nelze formulovat, V axiomu úplnosti se přímo hovoří o množině všech bodů (v axiomu lineární úplnosti o množině všech bodů na přímce). Množinové hledisko je tu fundamentální.

I v Archimedově axiomu, zdánlivě elementárnějším, se předpokládá pojem nekonečné množiny. Podle konstrukce v tomto axiomu uvedené potřebujeme sice v každém jednotlivém případě jen konečný počet bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$. V obecné formulaci však musíme obsáhnout všechny možné případy, mezi nimiž budou případy s libovolně velkým n. Je tedy nutno uvažovat v obecné formulaci nejen část posloupnosti $A_0, A_1, A_2, \ldots$, nýbrž celou tuto posloupnost, a tvrdit, že v ní existují body s požadovanou vlastností $A_0A_n > CD$. Bez pojmu nekonečné posloupnosti není tedy formulace Archimedova axiomu možná.

Vzniká otázka: V jakém smyslu je podstatné, že axiomy skupin I až IV — proti axiomům skupiny V — nevyžadují množinově teoretických pojmů.

Ve výstavbě geometrie na podkladě axiomů skupiny I až IV můžeme se opírat o zákony formální logiky. Aplikujeme je jen na konstrukce fakticky uvažované a dokazované, které jsou vždy konečné. Díky tomu jsou všechny úvahy zcela průzračné a není nejmenší příčiny k nejasnostem.

Naproti tomu v axiomech skupiny V je podstatný pojem nekonečné množiny. To vede k jisté principiální nejasnosti: chceme klást základy geometrie a zatím se opíráme o teorii množin, která sama vyžaduje fundování, jako každá matematická teorie. Vzniká nutnost rozšířit okruh výzkumů; v každém případě zcela mizí dokonalá průzračnost, charakteristická pro dřívější situaci.

Nepůjdeme v této věci hlouběji. I to, co bylo řečeno, ukazuje jasně složitost základů geometrie, jež se axiomy V_1 a V_2 vytváří.

Největším úspěchem Hilbertovým v logické analyse geometrie bylo právě, že objevil možnost vybudovat geometrii ve všem podstatném, a to bez axiomů spojitosti.

Geometrii bez axiomů spojitosti budeme nazývat nearchimedovskou geometrií. Zejména této geometrii je věnována Hilbertova kniha[12]).

[12]) Hilbert sám používá termínu „nearchimedovská geometrie" v poněkud užším smyslu, ve smyslu geometrie, kde nejen se axiomy spojitosti nepostulují, ale kde přímo neplatí.

V důkazech prvních, nejelementárnějších vět ani nepozorujeme, že není axiomu spojitosti. Situace se však změní, jakmile máme co dělat s poměry úseček, to jest jakmile máme měřit jednu úsečku jinou úsečkou, vzatou za jednotku (což je nezbytné v nauce o podobnosti a v teorii obsahů).

V obvyklých výkladech se tato úloha řeší zavedením čísla do geometrie, to jest: každé dvojici úseček AB, CD odpovídá reálné číslo, vyjadřující jejich poměr. Rozdělíme jednu úsečku, na příklad úsečku AB, na n stejných dílů a vynášíme úsečku $\frac{AB}{n}$ postupně tak dlouho, až dostaneme úsečku, přesahující úsečku CD. Dejme tomu, že se to stane poprvé, když úsečku $\frac{AB}{n}$ vyneseme $(m + 1)$ krát. Pak je možno dokázat, že $\frac{m+1}{n}$ konverguje při neomezeně rostoucím n k jisté limitě, kterou nazveme poměrem $\frac{CD}{AB}$.

Vidíme, že tato konstrukce předpokládá Archimedův axiom jako podstatnou součást. V nearchimedovské geometrii je možné, že ať vynášíme úsečku $\frac{AB}{n}$ jakkoli mnohokrát, nikdy nepřekročíme úsečku CD, že tedy nemůžeme určit číslo $m + 1$. Je také možné, že ať zvolíme n jakkoli, bude $\frac{AB}{n} > CD$, takže $m + 1$ bude vždy rovno 1. To vede k tomu, že poměr $\frac{CD}{AB}$ nutno brát jako nulový, i když CD se neredukuje na bod.

Obr. 3

V nearchimedovské geometrii nemůžeme tedy charakterisovat poměr úseček číslem v obvyklém smyslu.

Tím se ovšem stává také nauka o podobnosti bezpředmětnou. Stejně nemožné je měření obsahů — ze zcela analogických příčin.

Hilbert obchází tuto obtíž zajímavou, přitom přirozenou geometrickou metodou. Ukazuje, že není nutné opírat se v geometrii o pojem čísla, že je možné geometrickými prostředky samými vypracovat kalkul (úsečkový počet), který má všechny přednosti aritmetiky reálných čísel. Postupuje takto:

Objekty našeho kalkulu budou úsečky, uvažované s přesností až na shodnost. Jinými slovy: poloha úsečky v prostoru není podstatná, zajímá nás — zhruba řečeno — jen její rozměr.

Úsečky se sčítají obvyklým způsobem (vynášením), přičemž úsečka, která vznikne postupným vynášením jiných úseček, se bere za jejich součet. Jednoznačnost této operace se zajišťuje axiomem III_3. Snadno se pak dokáže, že $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$. Dále, jednu úsečku zvolíme jednou pro vždy za pevnou a nazveme ji jednotkou. Tato úsečka má velmi důležitou úlohu v operaci násobení úseček. V obraze 3 je znázorněno vynásobení úseček a, b. Lze pak dokázat, že $ab = ba$, $(ab)c = a(bc)$, $(a + b)c = ac + bc$.

Takový úsečkový kalkul je analogický aritmetice kladných čísel. Zavede-li se nyní „nulová úsečka“ a „záporné úsečky“ (analogicky tomu, jak se zavádí nula a záporná čísla), a rozšíří-li se na ně — zase obvyklým způsobem — operace sčítání a násobení, představují úsečky v celku, jak lze dokázat, pole ve smyslu dnešní algebry. S úsečkami pak můžeme provádět operace sčítání, odčítání, násobení a dělení stejně jako s reálnými čísly. Kromě toho je pole úseček uspořádané pole, to jest je možno přirozenou geometrickou cestou zavést vztah $>$ (větší), který existuje mezi jakýmikoli dvěma úsečkami a, b, které nejsou shodné ($a > b$ nebo $b > a$). Vztah $>$ má přitom — zhruba řečeno — všechny vlastnosti, které má tento vztah u reálných čísel (na příklad z $a > b$, $b > c$ plyne $a > c$ ap.).

Zdůrazněme, že vše to vyplývá z axiomů skupiny I až IV, to jest bez ideje spojitosti (nearchimedovská geometrie). I když pak naše úsečky nejsou čísla, umožňuje skutečnost, že tvoří uspořádané pole, použít jich v geometrii skoro stejně jako čísel, zejména: vyjadřoval-li se dříve poměr úseček číslem, bude nyní vyjádřen úsečkou, a na tomto podkladě můžeme vypracovat nauku o podobnosti obvyklou cestou bez jakýchkoli potíží. Obsah mnohoúhelníka, vyjádřený dříve číslem (při zvolené plošné jednotce) vyjádří se nyní úsečkou, což umožňuje vypracovat teorii obsahů.

Úsečky, vyjadřující poměry úseček a obsahy obrazců, závisí ovšem na volbě jednotky. Nakonec však lze říci, že do konečných geometrických výsledků vstupují jen úměry (rovnosti poměrů) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, které se neporuší změnou jednotkové úsečky.

Celkem lze říci, že elementární geometrie se jen nepatrně opírá o axiomy skupiny V; vše podstatné lze získat i v nearchimedovské geometrii.

Problém bezespornosti

První otázka, která vyvstane, budujeme-li geometrii čistě logickou cestou na podkladě axiomů, je otázka bezespornosti přijaté axiomatiky. Je záruka, že nedojdeme ke sporu v naší soustavě? Nemohlo by se stát, že z daných axiomů dokážeme větu a zároveň její opak? Kdyby se něco takového přihodilo, je naše axiomatika bezcenná.

Především lze dokázat toto:

Euklidovská geometrie je bezesporná, pokud je bezesporná aritmetika reálných čísel.

Důkaz lze podat touto aritmetickou interpretací geometrie:

Již jsme řekli, že při axiomatické výstavbě geometrie zůstanou její závěry v platnosti, ať interpretujeme základní pojmy jakkoli, s jedinou podmínkou, že vyhovují našim axiomům. Aplikujme tuto myšlenku takto:

Smluvíme se na tom, že „bodem“ budeme rozumět uspořádanou trojici čísel (x, y, z), „rovinou“ lineární rovnici

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \tag{1}$$

danou až na ekvivalenci (předpokládáme, že konstanty A, B, C nejsou zároveň všechny rovny nule). „Přímkou“ budeme rozumět soustavu dvou konsistentních a lineárně nezávislých rovnic tvaru

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0\,, \tag{2}$$

daných až na ekvivalenci. Smluvíme se dále, že „bod bude ležet v rovině nebo na přímce", bude-li trojice (x, y, z) vyhovovat rovnici (1) nebo rovnicím (2).

Smluvíme se dále, že „bod Q bude ležet mezi body P a R", jestliže P, Q, R budou různé body, budou ležet na téže přímce, a bude-li platit alespoň jeden ze vztahů

$$\begin{gathered} x_P < x_Q < x_R\,, \quad y_P < y_Q < y_R\,, \quad z_P < z_Q < z_R\,; \\ x_P > x_Q > x_R\,, \quad y_P > y_Q > y_R\,, \quad z_P > z_Q > z_R\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Definujeme konečně „shodnost" úseček PQ a ST ($P = [x_P, y_P, z_P]$, $Q = [x_Q, y_Q, z_Q]$, $S = [x_S, y_S, z_S]$, $T = [x_T, y_T, z_T]$), to jest $PQ \equiv ST$ rovností

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} = \\ &= \sqrt{(x_S - x_T)^2 + (y_S - y_T)^2 + (z_S - z_T)^2}\,, \end{aligned} \tag{4}$$

a „shodnost" úhlů $\widehat{PQR} \equiv \widehat{STU}$ rovností

$$\frac{(x_P - x_Q)(x_R - x_Q) + (y_P - y_Q)(y_R - y_Q) + (z_P - z_Q)(z_R - z_Q)}{\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}\,\sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2 + (z_R - z_Q)^2}} =$$

$$= \frac{(x_S - x_T)(x_U - x_T) + (y_S - y_T)(y_U - y_T) + (z_S - z_T)(z_U - z_T)}{\sqrt{(x_S - x_T)^2 + (y_S - y_T)^2 + (z_S - z_T)^2}\,\sqrt{(x_U - x_T)^2 + (y_U - y_T)^2 + (z_U - z_T)^2}}.$$

Přiznejme, že tato interpretace je bezbarvá kopie z analytické geometrie v prostoru. Přesto je zde základní rozdíl: v analytické geometrii předpokládáme, že jsme již ve vypracované euklidovské geometrii, že tedy na příklad čísla (souřadnice) x, y, z pouze vymezují polohu bodu, existujícího nezávisle na nich. V našem případě se však trojicí (x, y, z) rozumí přímo bod, nic více. V analytické geometrii vyjadřuje vztah (3) to, že z bodů P, Q, R, ležících v jedné přímce, bod Q leží mezi body P a R. Fakt „polohy mezi" má samostatný geometrický smysl. V našem případě má vztah (3) sám smysl „polohy mezi", nic jiného. Totéž platí i pro ostatní vztahy.

Budeme-li mít dost trpělivosti, abychom prošli znění všech našich axiomů a nahradili všude termíny „bod", „přímka", „rovina", „leží na (v)", „mezi", „shodný" výše uvedenými pojmy trojice (x, y, z) atd., přesvědčíme se, že se axiomy změní ve správné analytické poučky. Tak na příklad axiom I_1 dostane tvar: Pro každé dvě různé uspořádané trojice čísel (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B) lze sestavit soustavu rovnic tvaru (2), které jsou vzájemně lineárně nezávislé a jimž trojice (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B) vyhovují.

Dá se snadno dokázat, že toto tvrzení je správné. Totéž platí i pro ostatní axiomy, i když prověrka příslušných analytických pouček bude někde složitější.

Připusťme nyní na chvíli, že Hilbertův systém axiomů připouští spor, to jest že na podkladě Hilbertových axiomů lze zároveň dokázat i vyvrátit jisté tvrzení A. Interpretujeme-li výrok A podle výše uvedených dohod, dostaneme aritmetickou poučku. Vyjdeme-li tedy z transformovaných Hilbertových axiomů, můžeme tuto poučku zároveň dokázat i vyvrátit. Kdyby tedy byl spor v euklidovské geometrii, přešel by ihned do aritmetiky reálných čísel a porušil by základnu veškeré matematiky.

Pokládáme-li tedy aritmetiku reálných čísel za bezespornou, plyne z toho ihned také bezespornost euklidovské geometrie. Zcela analogicky se ukáže také bezespornost Lobačevského geometrie aritmetickou interpretací, ovšem jinou (na příklad pomocí Kleinova nebo Poincaréova modelu).

Tyto výsledky jsou však podmíněné: vše se redukuje na otázku bezespornosti aritmetiky reálných čísel.

A více ještě. Poněvadž činíme na podkladě axiomů logické závěry, musíme při zkoumání bezespornosti té či jiné soustavy podrobit rozboru vedle matematického obsahu také samu logiku.

Metody, jak zkoumat tuto otázku, naznačil Hilbert a jeho škola. Rozvinuly se do dnešní doby ve velkou matematickou disciplinu — v matematickou logiku. Základní jejich myšlenka je tato: Matematické poučky i logické zákony se zapisují pomocí zvláštní symboliky bez jakýchkoli slovních obratů. Logické myšlení se nahrazuje manipulací s takovými formulemi podle přesně stanovených pravidel, zejména se z již sestrojených formulí dovoluje konstruovat mechanicky podle přesných návodů nové formule, čímž se nahrazují vědomé rozumové závěry, jimiž se z jedné poučky odvozují jiné. Tak se matematický i logický obsah zkoumané matematické partie představuje jako řetězec formulí. Tento řetězec začíná formulemi, jež zobrazují matematické a logické axiomy, a lze jej neomezeně prodlužovat. Není přitom vůbec nutné přihlížet k matematickému obsahu zapsaných formulí, zajímá nás jen formule sama jako zcela konkrétní, přehledná konečná kombinace znaků. A z těchto posic přistupuje matematická logika k problému bezespornosti: je třeba ukázat, že v řetězci formulí nemůže být formule, jež zobrazuje spor.

Zde se musíme zastavit, neboť tyto otázky jdou daleko za hranice našeho thematu a nejsou dnes ještě definitivně rozřešeny. Ukázalo se také, že cesty, jimiž se tyto otázky řeší, nejsou zdaleka tak hladké, jak se původně domníval Hilbert.

O nezávislosti axiomů

Již jsme mluvili o tom, že je přirozené žádat, aby systém axiomů byl minimální pokud jde o požadavky, jež jsou axiomy vyjádřeny, aby nebylo požadavků nadbytečných. Přesná formulace této myšlenky vede k pojmu nezávislosti axiomů.

Říkáme, že

daný axiom je nezávislý na ostatních axiomech (*nebo na jejich části*), *nelze-li jej z těchto axiomů logicky odvodit.*

Takový axiom, na ostatních axiomech nezávislý, nelze beze ztráty ze soustavy axiomů vypustit, neboť jej pomocí ostatních axiomů nelze nahradit.

Z hlediska minimálnosti soustavy axiomů by bylo ideální, kdyby každý axiom soustavy byl na ostatních axiomech soustavy nezávislý. Pak by již nebylo možné další zjednodušování soustavy axiomů bez jejího oslabení a tedy bez změny geometrického systému.

V Hilbertově axiomatice tohoto ideálního stavu nelze dosáhnout. Tak na příklad ve formulacích axiomů skupiny II (pojem „mezi“) se předpokládá, že již byl stanoven pojem „leží na (v)“ s vlastnostmi, jež popisují axiomy skupiny I. Ve formulaci axiomů skupiny III (pojem „shodný“) se kromě toho předpokládá, že již byl stanoven pojem „mezi“. Ve formulaci na příklad axiomu III_4 vystupuje pojem poloroviny, který není možno vytvořit bez axiomů skupiny II. Bylo by proto nesmyslné položit na příklad otázku, je-li axiom II_4 (Pasch) závislý na axiomech skupiny III. Nelze se pokoušet o důkaz, že tento axiom neplyne (nebo plyne) z axiomů skupiny III, neboť k samé formulaci axiomů této skupiny je nutné Paschův axiom předpokládat.

Sotva však lze tuto okolnost pokládat za nedostatek. Požadavek nezávislosti axiomů (proti požadavku bezespornosti) je spíše přepych, než životní nutnost. Jen v některých případech má důkaz nezávislosti axiomu zásadní význam, na příklad důkaz nezávislosti axiomu rovnoběžnosti (axiom IV) na všech axiomech. Na něm ukážeme obecnou myšlenku, na jejímž podkladě se důkaz nezávislosti toho či onoho axiomu provádí.

Mysleme si Hilbertovu soustavu axiomů bez axiomu rovnoběžnosti. Tento axiom nahraďme jeho negací, to jest axiomem, podle něhož existuje přímka a mimo ni bod takový, že jím lze vést více než jednu přímku, ležící s danou přímkou v téže rovině a neprotínající danou přímku. Předpokládejme, že zjistíme, že tato nová soustava axiomů je bezesporná. Z toho pak plyne, že axiom rovnoběžnosti je na ostatních axiomech nezávislý. Kdyby totiž tomu tak nebylo, bylo by možno jej z ostatních axiomů odvodit. To by ovšem znamenalo, že jej lze odvodit i v nové soustavě axiomů, v níž byl nahrazen svou negací. Byl by tedy v nové soustavě spor, nemohla by tedy být bezesporná.

Princip, podle něhož se důkaz nezávislosti axiomu provádí, je odtud jasný. V našem příkladě jde o bezespornost Lobačevského geometrie.

Závěr

Otázky axiomatiky elementární geometrie, jimiž jsme se zde zabývali, byly v matematice aktuální na zlomu 19. a 20. století. Mezitím uplynulo hodně času. Dnešní věda používá k vytváření potřebných geometrických teorií hlavně analytické konstrukce, nebo, je-li to účelné, axiomatiky v analytické formě (Riemannova geometrie, teorie relativity). Taková axiomatika je mnohem pružnější a obecnější, než elementární axiomatika.

Nicméně neztratila a nikdy neztratí elementární axiomatika svůj význam jako jeden z klasických výsledků vědeckého myšlení, a co je hlavní, jako nezbytné upřesnění školního kursu geometrie, jako logického dovršení počátečních geometrických poznatků, kterých nabývá každá nová generace a jež jsou všude nezbytné — od nejjednodušších praktických činností po nejjemnější a nejsložitější technické výpočty.

Přeložil dr. Josef Veselka