

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Milan Pišl

Křivky v Gaussově rovině [Dokončení]

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 2 (1957), No. 3, 271--284

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137214>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## KŘIVKY V GAUSSOVĚ ROVINĚ

(Dokončení).

### 6. KUŽELOSEČKY V HOMOGENNÍCH ISOTROPICKÝCH SOUŘADNICÍCH

#### 6.1 Rovnice kuželosečky

Geometrické místo bodů  $(\xi, \eta, t)$  splňující rovnici

$$F(\xi, \eta, t) \equiv \bar{\alpha} \xi^2 + 2A \xi \eta + \alpha \eta^2 + 2\bar{\beta} \xi t + 2\beta \eta t + Ct^2 = 0 \quad (20)$$

nazveme kuželosečkou.

Označíme-li poloviční parciální derivace  $F(\xi, \eta, t)$  podle proměnných  $\xi, \eta, t$  postupně  $F_1, F_2, F_3$ , t. j.

$$\begin{aligned} F_1(\xi, \eta, t) &\equiv \bar{\alpha} \xi + A \eta + \bar{\beta} t, \\ F_2(\xi, \eta, t) &\equiv A \xi + \alpha \eta + \beta t, \\ F_3(\xi, \eta, t) &\equiv \bar{\beta} \xi + \beta \eta + Ct, \end{aligned} \quad (20,1)$$

platí, jak se lehkou přesvědčíme, tyto identity:

$$F(\xi, \eta, t) \equiv \xi F_1(\xi, \eta, t) + \eta F_2(\xi, \eta, t) + t F_3(\xi, \eta, t), \quad (20,2)$$

$$\begin{aligned} &\xi_1 F_1(\xi_2, \eta_2, t_2) + \eta_1 F_2(\xi_2, \eta_2, t_2) + t_1 F_3(\xi_2, \eta_2, t_2) \equiv \\ &\equiv \xi_2 F_1(\xi_1, \eta_1, t_1) + \eta_2 F_2(\xi_1, \eta_1, t_1) + t_2 F_3(\xi_1, \eta_1, t_1), \end{aligned} \quad (20,3)$$

$$F_2(\bar{\eta}, \bar{\xi}, t) \equiv \bar{F}_1(\xi, \eta, t), \quad F_3(\bar{\eta}, \bar{\xi}, t) \equiv \bar{F}_3(\xi, \eta, t). \quad (20,4)$$

Determinant utvořený z koeficientů forem  $F_i(\xi, \eta, t)$ ,  $(i = 1, 2, 3)$  označíme

$$Z = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}, A, \bar{\beta} \\ A, \alpha, \beta \\ \bar{\beta}, \beta, C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11}, z_{12}, z_{13} \\ z_{21}, z_{22}, z_{23} \\ z_{31}, z_{32}, z_{33} \end{vmatrix} \quad (20,5)$$

a nazveme ho diskriminantem kuželosečky.

Diskriminant kuželosečky je souměrný determinant, o jehož prvcích platí  $z_{ik} = z_{ki}$ . Determinant  $Z$  je číslo reálné, neboť jest  $Z = \bar{Z}$ . Algebraický doplněk prvku  $z_{ik}$  označíme  $Z_{ik}$ . Pak zřejmě je  $Z_{ik} = Z_{ki}$ . O algebraických doplňcích prvků determinantu  $Z$  platí dále

$$\begin{aligned} Z_{12} &= \bar{Z}_{12}, & Z_{33} &= \bar{Z}_{33}, \\ Z_{23} &= \bar{Z}_{13}, & Z_{22} &= \bar{Z}_{11}, \end{aligned} \quad (20,6)$$

tedy algebraický doplněk reálného prvku je reálný a algebraické doplňky prvků komplexně sdružených jsou komplexně sdružené.

Kuželosečku (20), pro kterou platí  $Z \neq 0$ , nazveme regulární. Kuželosečku (20), pro kterou platí  $Z = 0$ , nazveme singulární.

Poznámka: Nebude-li jinak řečeno, budeme se zabývat kuželosečkami regulárními.

### 6.2 Kuželosečka a přímka

Zvolíme-li na přímce  $\gamma \xi + \delta \eta + Dt = 0$  dva její body  $(\xi_i, \eta_i, t_i)$  ( $i = 1, 2$ ) za základní body řady, pak souřadnice každého bodu řady budou vyjádřeny vzorcem (19,1). Souřadnice společných bodů přímky a kuželosečky (20) budou splňovat též rovnici (20). Bude tedy platit

$$F(\kappa_1 \xi_1 + \kappa_2 \xi_2, \kappa_1 \eta_1 + \kappa_2 \eta_2, \kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2) = 0. \quad (21,1)$$

Po provedení a úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 F(\xi_1, \eta_1, t_1) + 2 \kappa_1 \kappa_2 [\xi_1 F_1(\xi_2, \eta_2, t_2) + \eta_1 F_2(\xi_2, \eta_2, t_2) + t_1 F_3(\xi_2, \eta_2, t_2)] + \\ + \kappa_2^2 F(\xi_2, \eta_2, t_2) = 0. \end{aligned} \quad (21,2)$$

Z této rovnice lze určit poměr homogenních parametrů  $\kappa_1, \kappa_2$  a po dosazení do vzorce (19,1) dostaneme souřadnice průsečíků přímky s kuželosečkou (20).

Přímka  $\gamma \xi + \delta \eta + Dt = 0$  má s kuželosečkou  $\bar{\alpha} \xi^2 + 2A \xi \eta + \alpha \eta^2 + 2\bar{\beta} \xi t + 2\beta \eta t + Ct^2 = 0$  společně dva body, různé nebo splývající.

Poznámka: Pro  $\gamma = \bar{\delta}$  je přímka reálná a má s kuželosečkou (20) společně dva body reálné různé nebo reálné splývající, nebo dva body konjugované, neboť rovnici (21,2) lze pak převést v kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty.

### 6.3 Tečna v bodě kuželosečky

Přímku, která má s kuželosečkou společně dva splývající body, nazýváme tečnou kuželosečky.

K odvození rovnice tečny v bodě  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  kuželosečky (20) použijeme vztahu (21,2).

Nechť  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  je bodem kuželosečky (20) a  $(\xi_2, \eta_2, t_2)$  je libovolný bod roviny. Pak  $F(\xi_1, \eta_1, t_1) = 0$  a rovnice (21,2) nabude tvaru

$$2 \kappa_1 \kappa_2 [\xi_1 F_1(\xi_2, \eta_2, t_2) + \eta_1 F_2(\xi_2, \eta_2, t_2) + t_1 F_3(\xi_2, \eta_2, t_2)] + \kappa_2^2 F(\xi_2, \eta_2, t_2) = 0. \quad (21,3)$$

Tato rovnice má jeden kořen  $\kappa_2 = 0$ . Dosadíme-li jej do vzorce (18,1), dostaneme jako průsečík předpokládaný bod  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$ . Spojnice bodů  $(\xi_i, \eta_i, t_i)$ , ( $i = 1, 2$ ), bude mít s kuželosečkou (20) společný jen bod  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$ , bude-li i druhý kořen  $\kappa_2 = 0$ , což nastane jen tehdy, když

$$\xi_1 F_1(\xi_2, \eta_2, t_2) + \eta_1 F_2(\xi_2, \eta_2, t_2) + t_1 F_3(\xi_2, \eta_2, t_2) = 0. \quad (22)$$

Důsledek: Rovnice tečny v daném bodě  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  kuželosečky (20) zní

$$\begin{aligned} \xi_1 F_1(\xi, \eta, t) + \eta_1 F_2(\xi, \eta, t) + t_1 F_3(\xi, \eta, t) \equiv \\ \equiv \xi F_1(\xi_1, \eta_1, t_1) + \eta F_2(\xi_1, \eta_1, t_1) + t F_3(\xi_1, \eta_1, t_1) = 0. \end{aligned} \quad (22,1)$$

### 6.4 Polára bodu vzhledem ke kuželosečce

Pevný bod  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$ , ležící mimo kuželosečku (20), ( $F(\xi_1, \eta_1, t_1) \neq 0$ ), zvolme za střed svazku přímek (viz odst. 2,73). Na každé z přímek svazku určíme bod  $(\xi_2, \eta_2, t_2)$ , který odděluje harmonicky bod  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  od obou průsečíků této přímky s kuželosečkou

(20). Geometrické místo takových bodů  $(\xi_2, \eta_2, t_2)$  se nazývá polárou bodu  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  vzhledem ke kuželosečce (20).

K odvození rovnice poláry použijeme opět rovnice (21,2), která bude platit pro parametry průsečíků spojnice uvažovaných bodů  $(\xi_i, \eta_i, t_i)$  s kuželosečkou (20). Protože tyto průsečíky mají být harmonicky sdružené vzhledem k základním bodům  $(\xi_i, \eta_i, t_i)$ , budou jejich parametry čísla opačná (viz odst. 5.2). K tomu je nutné a stačí, aby rovnice (21,2) byla ryze kvadratickou, t. j. aby platilo

$$\xi_1 F_1(\xi_2, \eta_2, t_2) + \eta_1 F_2(\xi_2, \eta_2, t_2) + t_1 F_3(\xi_2, \eta_2, t_2) = 0. \quad (23)$$

Hledaným geometrickým místem je tedy přímka o rovnici

$$\begin{aligned} & \xi_1 F_1(\xi, \eta, t) + \eta_1 F_2(\xi, \eta, t) + t_1 F_3(\xi, \eta, t) \equiv \\ & \equiv \xi F_1(\xi_1, \eta_1, t_1) + \eta F_2(\xi_1, \eta_1, t_1) + t F_3(\xi_1, \eta_1, t_1) = 0 \end{aligned} \quad (23,1)$$

a bod  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  nazýváme pólem přímky (23,1).

Zatím jsme předpokládali, že bod  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  leží mimo kuželosečku; přímku o rovnici (23,1) nazýváme však polárou bodu  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  i tehdy, leží-li tento bod na kuželosečce. V tomto případě je tedy polára bodu  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  zároveň tečnou kuželosečky (20) v tomto bodě (viz odst. 6.3).

Je-li pól bodem kuželosečky, leží na své poláře, a obráceně, prochází-li polára svým pólem, leží tento pól na kuželosečce, neboť platí rovnice (20,2).

Z tvaru rovnice (23,1) plyne, že ke každému bodu  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  existuje polára. Platí i obráceně, že ke každé přímce  $\gamma \xi + \delta \eta + Dt = 0$  existuje bod  $(t_1, \xi_1, \eta_1)$ , který je jejím pólem. Má-li totiž být přímka  $\gamma \xi + \delta \eta + Dt = 0$  polárou vzhledem ke kuželosečce (20), musí být její rovnice ekvivalentní s rovnicí (23,1) pro jistý bod  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$ , to jest musí platit

$$\xi F_1(\xi_1, \eta_1, t_1) + \eta F_2(\xi_1, \eta_1, t_1) + t F_3(\xi_1, \eta_1, t_1) \equiv \varrho (\gamma \xi + \delta \eta + Dt). \quad (23,2)$$

Rozepsáním dostáváme soustavu tří rovnic pro souřadnice hledaného bodu  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \xi_1 + A \eta_1 + \bar{\beta} t_1 &= \varrho \gamma, \\ A \xi_1 + \alpha \eta_1 + \beta t_1 &= \varrho \delta, \\ \bar{\beta} \xi_1 + \beta \eta_1 + C t_1 &= \varrho D, \end{aligned} \quad (23,3)$$

kteřá má jediné řešení, neboť determinantem soustavy (23,3) je determinant kuželosečky (20), který je podle předpokladu různý od nuly (viz odst. 6.1).

Poznámka:

1. Je zřejmé, že  $F_1(\xi, \eta, t) = 0$  je polárou kruhového bodu  $(1, 0, 0)$ ,  $F_2(\xi, \eta, t) = 0$  polárou kruhového bodu  $(0, 1, 0)$  a  $F_3(\xi, \eta, t) = 0$  polárou počátku  $(0, 0, 1)$ .
2. Polára je reálná právě tehdy, je-li její pól reálný a naopak.

### 6.5 Sdružené póly a poláry

Zvolíme-li na poláře (23,1) bodu  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  další bod  $(\xi_2, \eta_2, t_2)$ , bude mít jeho polára rovnici (obr. 13)

$$\xi_2 F_1(\xi, \eta, t) + \eta_2 F_2(\xi, \eta, t) + t_2 F_3(\xi, \eta, t) = 0. \quad (24)$$

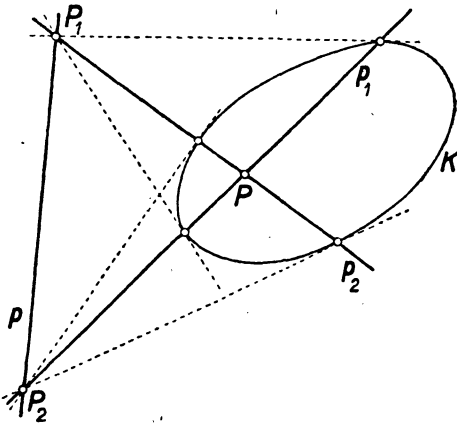
Protože bod  $(\xi_2, \eta_2, t_2)$  leží na poláře (23,1), splňují jeho souřadnice rovnici (23,1), t. j. platí

$$\xi_1 F_1(\xi_2, \eta_2, t_2) + \eta_1 F_2(\xi_2, \eta_2, t_2) + t_1 F_3(\xi_2, \eta_2, t_2) = 0 \quad (24,1)$$

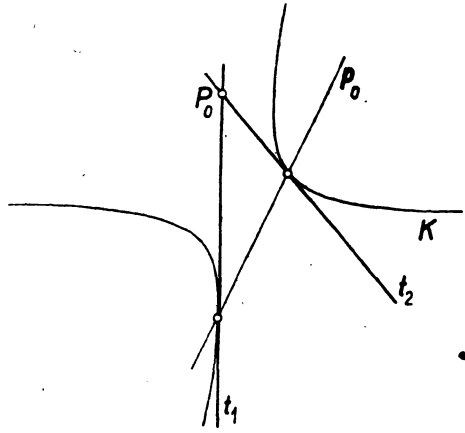
a podle (20,3) platí i

$$\xi_2 F_1(\xi_1, \eta_1, t_1) + \eta_2 F_2(\xi_1, \eta_1, t_1) + t_2 F_3(\xi_1, \eta_1, t_1) = 0. \quad (24,2)$$

To však znamená, že souřadnice bodu  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  splňují rovnici (24) nebo jinak řečeno, polára (24) obsahuje pól  $(\xi_1, \eta_1, t_1)$  přímky (23,1), protože tato obsahuje bod  $(\xi_2, \eta_2, t_2)$ , který je pólem přímky (24).



Obr. 13



Obr. 14

Takové dva body, z nichž jeden leží na poláře druhého (a tudíž i naopak), nazýváme sdružené póly a jim odpovídající přímky sdružené poláry.

Jako důsledek dostáváme známou větu:

Poláry dvou bodů téže přímky protínají se v pólu této přímky. Spojnice pólů dvou přímek procházejících daným bodem je polára tohoto bodu.

### 6.6 Tečny z bodu ke kuželosečce

Zřejmým důsledkem vět z předchozího odstavce je tvrzení: Z bodu  $(\xi_0, \eta_0, t_0)$  ležícího mimo kuželosečku lze k ní vést právě dvě tečny. Jejich dotykové body jsou průsečíky kuželosečky s polárou tohoto bodu (obr. 14).

Mohli bychom tedy rovnice obou tečen určit jako rovnice přímek procházejících bodem  $(\xi_0, \eta_0, t_0)$  a jedním z obou dotykových bodů  $(\xi_i, \eta_i, t_i)$ , ( $i = 1, 2$ ).

Odvodíme však rovnici obou tečen jako rovnici geometrického místa bodů, jejichž spojnice s daným bodem  $(\xi_0, \eta_0, t_0)$  mají s kuželosečkou společné dva splývající body. K tomu je však nutné a stačí, aby byl roven nule diskriminant rovnice (21,2), t. j. (s přihlédnutím k jinému označení bodů)

$$F(\xi_0, \eta_0, t_0) \cdot F(\xi_3, \eta_3, t_3) - [\xi_0 F_1(\xi_3, \eta_3, t_3) + \eta_0 F_2(\xi_3, \eta_3, t_3) + t_0 F_3(\xi_3, \eta_3, t_3)]^2 = 0. \quad (25)$$

Rovnice obou tečen vedených ke kuželosečce (20) z bodu  $(\xi_0, \eta_0, t_0)$  tedy zní

$$F(\xi_0, \eta_0, t_0) \cdot F(\xi, \eta, t) - [\xi_0 F_1(\xi, \eta, t) + \eta_0 F_2(\xi, \eta, t) + t_0 F_3(\xi, \eta, t)]^2 = 0. \quad (25,1)$$

Poznámka:

1. Je-li  $(\xi_0, \eta_0, t_0)$  bodem kuželosečky (20), dává rovnice (25,1) rovnici tečny v bodě kuželosečky (viz 22,1).

2. Snadno lze ukázat, že rovnice (25,1) je rovnicí singulární kuželosečky.

### 6.7 Kuželosečka a přímka nevlastní

Souřadnice průsečíků kuželosečky (20) s přímkou nevlastní  $t = 0$  jsou dány rovnicí

$$\bar{\alpha} \xi^2 + 2A \xi \eta + \alpha \eta^2 = 0, \quad (26)$$

kteřou dostaneme, když v rovnici (20) položíme  $t = 0$ . Pro diskriminant  $D$  rovnice (26) platí:  $D = A^2 - \alpha \bar{\alpha} = -Z_{33}$ , kde  $Z_{33}$  je algebraický doplněk prvku  $C$  v diskriminantu  $Z$  kuželosečky (20).

Pro  $\alpha = 0$  je  $Z_{33} = -A^2 < 0$  a rovnice (26) přejde v rovnici

$$A \xi \eta = 0, \quad (26,1)$$

kde  $A \neq 0$ , takže průsečíky jsou konjugované body  $(1, 0, 0)$  a  $(0, 1, 0)$ , to jest body kruhové.

Je-li  $\alpha \neq 0$ , můžeme rovnici (26) přepsat na tvar

$$[\alpha \xi + (A + \sqrt{-Z_{33}}) \eta] \cdot [\alpha \xi + (A - \sqrt{-Z_{33}}) \eta] = 0, \quad (26,2)$$

odkud plyne, že hledané průsečíky mají souřadnice

$$[\rho(-A - \sqrt{-Z_{33}}), \rho \bar{\alpha}, 0], \text{ resp. } [\rho(-A + \sqrt{-Z_{33}}), \rho \bar{\alpha}, 0], \rho \neq 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že tyto body jsou reálné různé resp. reálné splývající resp. konjugované, je-li  $Z_{33} > 0$  resp.  $Z_{33} = 0$  resp.  $Z_{33} < 0$  (viz odst. 5.1).

Souhrnně: Kuželosečka (20) má s nevlastní přímkou společně dva body reálné různé resp. splývající resp. konjugované, je-li  $Z_{33} > 0$  resp.  $Z_{33} = 0$  resp.  $Z_{33} < 0$ .

Regulární kuželosečku (20), pro níž platí  $Z_{33} > 0$  resp.  $Z_{33} = 0$  resp.  $Z_{33} < 0$ , nazýváme hyperbolou resp. parabolou resp. elipsou.

### 6.8 Střed kuželosečky

Pól nevlastní přímky vzhledem ke kuželosečce (20) se nazývá jejím středem. Odtud plyne, že jeho souřadnice dostaneme řešením soustavy

$$F_1(\xi, \eta, t) \equiv \bar{\alpha} \xi + A \eta + \bar{\beta} t = 0, \quad F_2(\xi, \eta, t) \equiv A \xi + \alpha \eta + \beta t = 0, \quad (27)$$

kteřá je ekvivalentní se soustavou (23,3) pro  $\gamma = \delta = 0$ . Toto řešení je

$$\xi_0 : \eta_0 : t_0 = Z_{13} : Z_{23} : Z_{33}. \quad (27,1)$$

Střed kuželosečky je bod vlastní resp. nevlastní, je-li  $Z_{33} \neq 0$  resp.  $Z_{33} = 0$ .

### 6.9 Asymptoty kuželosečky

Tečnu kuželosečky v jejím bodě nevlastním nazýváme asymptotou. Protože střed  $(\xi_0, \eta_0, t_0)$  je pólem spojnice jejich dotkových bodů, procházejí asymptoty středem (viz odst. 6.5 a 6.6). Jejich rovnici dostaneme tedy jako rovnici dvojice tečen vedených ke kuželosečce z jejího středu (25,1), t. j.

$$F(\xi_0, \eta_0, t_0) \cdot F(\xi, \eta, t) - [\xi F_1(\xi_0, \eta_0, t_0) + \eta F_2(\xi_0, \eta_0, t_0) + t F_3(\xi_0, \eta_0, t_0)]^2 = 0, \quad (28)$$

což můžeme přepsat na tvar

$$Z_{33} \cdot F(\xi, \eta, t) - Zt^2 = 0, \quad (28,1)$$

neboť platí

$$F_1(\xi_0, \eta_0, t_0) = F_2(\xi_0, \eta_0, t_0) = 0, \quad F(\xi_0, \eta_0, t_0) = t_0 \cdot F_3(\xi_0, \eta_0, t_0),$$

$$F_3(\xi_0, \eta_0, t_0) = \bar{\beta} \xi_0 + \beta \eta_0 + C t_0 = \bar{\beta} Z_{13} + \beta Z_{23} + C Z_{33} = Z.$$

Poznámka: Je-li  $Z_{33} = 0$ , přejde rovnice (28,1) v rovnici přímky nevlastní. Později ukážeme, že pro hyperbolu je rovnice (28,1) rovnicí dvojice reálných přímek a pro elipsu dvojicí přímek konjugovaných.

### 6.10 Ohnisko kuželosečky

Ohniska kuželosečky definujeme jako průsečíky tečen vedených ke kuželosečce z kruhových bodů. Rovnice dvojice tečen z kruhového bodu  $(1, 0, 0)$  resp.  $(0, 1, 0)$  zní (viz 25.1):

$$\bar{\alpha} F(\xi, \eta, t) - (\bar{\alpha} \xi + A \eta + \bar{\beta} t)^2 = 0, \quad \alpha F(\xi, \eta, t) - (A \xi + \alpha \eta + \beta t)^2 = 0. \quad (29)$$

Po úpravě

$$Z_{33} \eta^2 - 2 Z_{23} \eta t + Z_{22} t^2 = 0, \quad Z_{33} \xi^2 - 2 Z_{13} \xi t + Z_{11} t^2 = 0. \quad (29,1)$$

Pro další úvahy musíme rozeznávat případ, kdy je  $Z_{33} = 0$  resp.  $Z_{33} \neq 0$ .

1. Je-li  $Z_{33} = 0$ , musí být  $Z_{13} \neq 0$  (a tedy i  $Z_{23} = \bar{Z}_{13} \neq 0$ ), neboť jinak by proti předpokladu platilo  $Z = \bar{\beta} Z_{13} + \beta Z_{23} + C Z_{33} = 0$ . Pak ale soustava (29,1) přejde v soustavu

$$\begin{aligned} 2 Z_{23} \eta - Z_{22} t &= 0, \\ 2 Z_{13} \xi - Z_{11} t &= 0 \end{aligned} \quad (29,2)$$

a její jediné řešení je

$$\xi_1 : \eta_1 : t_1 = \frac{Z_{11}}{2 Z_{13}} : \frac{Z_{22}}{2 Z_{23}} : 1. \quad (30)$$

2. Je-li  $Z_{33} \neq 0$ , je soustava (29,1) ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} [Z_{33} \eta - (Z_{23} - \sqrt{\Delta}) t] \cdot [Z_{33} \eta - (Z_{23} + \sqrt{\Delta}) t] &= 0 \\ [Z_{33} \xi - (Z_{13} - \sqrt{\Delta}) t] \cdot [Z_{33} \xi - (Z_{13} + \sqrt{\Delta}) t] &= 0, \end{aligned} \quad (29,3)$$

kde  $\Delta$  je diskriminant druhé rovnice soustavy (29,3)

$$\begin{aligned} \Delta &= Z_{13}^2 - Z_{11} \cdot Z_{33} = (A \beta - \alpha \bar{\beta})^2 - (C \alpha - \beta^2) \cdot (\alpha \alpha - A^2) = \\ &= A^2 \beta^2 - 2 A \alpha \beta \bar{\beta} + \alpha^2 \bar{\beta}^2 - C \alpha^2 \bar{\alpha} + \alpha \bar{\alpha} \beta^2 + A^2 C \alpha - A^2 \beta^2 = -Z \alpha \end{aligned}$$

a diskriminant první rovnice ze soustavy je číslo komplexně sdružené  $\bar{\Delta} = -Z \bar{\alpha}$ . Jsou tedy hodnoty diskriminantů obou rovnic současně buď rovny nule, nebo od nuly různé. Jelikož je  $Z \neq 0$ , rozlišíme dva případy:

a) Je-li  $\alpha = 0$ , je  $\Delta = \bar{\Delta} = 0$  a soustava (29,3) přejde v ekvivalentní soustavu

$$Z_{33} \eta - Z_{23} t = 0, \quad Z_{33} \xi - Z_{13} t = 0. \quad (29,4)$$

Její jediné řešení je

$$\xi_0 : \eta_0 : t_0 = Z_{13} : Z_{23} : Z_{33}, \quad (31)$$

to je však střed uvažované kuželosečky (20), (viz 27,1).

Poznámka: Kuželosečka (20) je pro  $\alpha = 0$  kružnicí.

b) Je-li  $\alpha \neq 0$ , má soustava (29,3) čtyři různá řešení

$$\begin{aligned} \xi_1 : \eta_1 : t_1 &= (Z_{13} + \sqrt{-Z\alpha}) : (Z_{23} + \sqrt{-Z\alpha}) : Z_{33}, \\ \xi_2 : \eta_2 : t_2 &= (Z_{13} - \sqrt{-Z\alpha}) : (Z_{23} - \sqrt{-Z\alpha}) : Z_{33}, \\ \xi_3 : \eta_3 : t_3 &= (Z_{13} + \sqrt{-Z\alpha}) : (Z_{23} - \sqrt{-Z\alpha}) : Z_{33}, \\ \xi_4 : \eta_4 : t_4 &= (Z_{13} - \sqrt{-Z\alpha}) : (Z_{23} + \sqrt{-Z\alpha}) : Z_{33}. \end{aligned} \quad (32)$$

Lehko se přesvědčíme, že body  $(\xi_i, \eta_i, t_i)$ , ( $i = 1, 2$ ) jsou reálné různé a body  $(\xi_i, \eta_i, t_i)$ , ( $i = 3, 4$ ) konjugované.

Souhrnně máme tedy výsledek: Ohniska kuželosečky (20) jsou vždy body vlastní. Parabola má jediné ohnisko vždy reálné. Jediným ohniskem kružnice je její střed. Elipsa a hyperbola mají dvě ohniska reálná a dvě konjugovaná.

## 7. KUŽELOSEČKY V NEHOMOGENNÍCH ISOTROPICKÝCH SOUŘADNICÍCH

### 7.1 Přechod k nehomogenním isotropickým souřadnicím

V homogenních souřadnicích je bod dán poměrem tří čísel  $\xi : \eta : t$ . Uvažujeme-li pouze body vlastní, pak  $t \neq 0$ , a bod lze pak určit poměrem  $\xi : \eta : 1$ . Lze tedy vlastní bod charakterisovat uspořádanou dvojicí komplexních čísel  $(\xi; \eta)$ . Pro body reálné platí podle odst. 5.1  $\eta = \bar{\xi}$ . Každý vlastní reálný bod bude v nehomogenních isotropických souřadnicích dán uspořádanou dvojicí komplexních čísel  $(z; \bar{z})$ . Stručně budeme mluvit o bodu  $z$ . Přechod k nehomogenním souřadnicím je tedy dán rovnicemi

$$z = \frac{\xi}{t}, \quad \bar{z} = \frac{\eta}{t}, \quad t \neq 0. \quad (33)$$

Z rovnice (17,2) vydělením  $t \neq 0$  dostáváme rovnici přímky v souřadnicích nehomogenních ve tvaru

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + C = 0, \quad (33,1)$$

což je rovnice (6).

Obdobně rovnice kuželosečky v souřadnicích nehomogenních zní:

$$f(z) \equiv \alpha z^2 + 2A z \bar{z} + \alpha \bar{z}^2 + 2\bar{\beta}z + 2\beta\bar{z} + C = 0. \quad (33,2)$$

Označme

$$f_1(z) \equiv \bar{\alpha}z + A\bar{z} + \bar{\beta}, \quad f_2(z) \equiv Az + \alpha\bar{z} + \beta, \quad f_3(z) \equiv \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + C. \quad (33,3)$$

Zřejmě platí

$$\begin{aligned} f(z) &\equiv z f_1(z) + \bar{z} f_2(z) + f_3(z), \\ z_1 f_1(z_2) + \bar{z}_1 f_2(z_2) + f_3(z_2) &\equiv z_2 f_1(z_1) + \bar{z}_2 f_2(z_1) + f_3(z_1) \end{aligned} \quad (33,4)$$



(viz rovnice 20,3).

Dále

$$f_2(z) = \bar{f}_1(z); \quad f_1(z) = \bar{f}_2(z). \quad (33,5)$$

Rovnice tečny v bodě  $z_1$  (poláry bodu  $z_1$ ) zní

$$z_1 f_1(z) + \bar{z}_1 f_2(z) + f_3(z) \equiv z \cdot f_1(z_1) + \bar{z} \cdot f_2(z_1) + f_3(z_1) = 0 \quad (33,6)$$

(viz rovnice 23,1).

Dvojice tečen z bodu  $z_0$  ke kuželosečce (33,2) má rovnici

$$f(z_0) \cdot f(z) - [z_0 f_1(z) + z_0 f_2(z) + f_3(z)]^2 = 0 \quad (33,7)$$

(viz rovnice 25,1).

Souřadnice středu kuželosečky dostaneme řešením soustavy  $f_1(z) = 0; f_2(z) = 0$  při  $Z_{33} \neq 0$  ve tvaru (viz odst. 6.8)

$$z_0 = \frac{Z_{13}}{Z_{33}}; \quad \bar{z}_0 = \frac{Z_{23}}{Z_{33}}. \quad (33,8)$$

Rovnice dvojice asymptot má tvar ( $Z_{33} \neq 0$ , viz rovnice 28,1)

$$f(z) - \frac{Z}{Z_{33}} = 0. \quad (33,9)$$

## 7.2 Transformace posunutím a otočením

Provedme transformaci kuželosečky (33,2) posunutím. Je-li novým počátkem bod  $z_0$ , zní transformační rovnice (viz odst. 1.2)

$$z = w + z_0$$

a kuželosečka má po transformaci rovnici

$$\bar{\alpha} w^2 + 2A w \bar{w} + \alpha w^2 + 2f_1(z_0) w + 2f_2(z_0) \bar{w} + f(z_0) = 0. \quad (34)$$

Posunutím se nemění koeficienty u kvadratických členů v rovnici kuželosečky. Pro  $Z_{33} \neq 0$

můžeme za nový počátek zvolit střed kuželosečky. Pro  $z_0 = \frac{Z_{13}}{Z_{33}}$  je  $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$  a  $f(z_0) = z_0 f_1(z_0) + \bar{z}_0 f_2(z_0) + f_3(z_0) = f_3(z_0) = \frac{\bar{\beta} Z_{13} + \beta Z_{23} + C Z_{33}}{Z_{33}} = \frac{Z}{Z_{33}}$ .

Rovnice (34) má pak tvar

$$\bar{\alpha} z^2 + 2A z \bar{z} + \alpha \bar{z}^2 + \frac{Z}{Z_{33}} = 0. \quad (34,1)$$

Je-li nová soustava otočená o úhel  $\varphi$  vzhledem k soustavě původní, zní transformační rovnice (viz odst. 1.3)

$$z = w e^{j\varphi}$$

a kuželosečka (33,2) má po transformaci rovnici

$$\bar{\alpha} e^{2j\varphi} w^2 + 2A w \bar{w} + \alpha e^{-2j\varphi} \bar{w}^2 + 2\bar{\beta} e^{j\varphi} w + 2\beta e^{-j\varphi} \bar{w} + C = 0. \quad (34,2)$$

Otočením se nemění absolutní člen a koeficient  $A$  v rovnici kuželosečky.

Poznámka: Otočením lze dosáhnout, aby koeficienty u kvadratických členů byly vesměs reálné.

### 7.3 Invarianty rovnice kuželosečky

Výrazy  $A, Z_{33}, Z$  (viz odst. 6.1) jsou invariantní vůči posunutí a otočení.

1. Pro  $A$  plyne tvrzení přímo z rovnic (34) a (34,2).

2. Determinant  $Z_{33}$  pro rovnici (34) resp. (34,2) označme  $Z'_{33}$  resp.  $Z''_{33}$ . Vztah  $Z'_{33} = Z_{33}$  plyne přímo z rovnice (34).

$$Z''_{33} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} e^{2j\varphi}, & A \\ A, & \alpha e^{-2j\varphi} \end{vmatrix} = \alpha \bar{\alpha} - A^2 = Z_{33}.$$

3. Determinant  $Z$  pro rovnici (34) resp. (34,2) označme  $Z'$  resp.  $Z''$ . Platí

$$Z' = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}, & A, & f_1(z_0) \\ A, & \alpha, & f_2(z_0) \\ f_1(z_0), f_2(z_0), & f(z_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}, & A, & \bar{\beta} \\ A, & \alpha, & \beta \\ f_1(z_0), f_2(z_0), & f_3(z_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}, & A, & \bar{\beta} \\ A, & \alpha, & \beta \\ \bar{\beta}, & \beta, & C \end{vmatrix} = Z,$$

kde jsme nejprve od třetího sloupce odečetli  $z_0$  — násobek prvního a  $\bar{z}_0$  — násobek druhého a potom od třetího řádku odečetli  $z_0$  — násobek prvního a  $\bar{z}_0$  — násobek druhého.

Pro  $Z''$  dostáváme, vytkneme-li nejprve  $e^{j\varphi}$  z prvního řádku a prvního sloupce, a potom  $e^{-j\varphi}$  z druhého řádku a druhého sloupce

$$Z'' = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} e^{2j\varphi}, & A, & \bar{\beta} e^{j\varphi} \\ A, & \alpha e^{-2j\varphi}, & \beta e^{-j\varphi} \\ \bar{\beta} e^{j\varphi}, & \beta e^{-j\varphi}, & C \end{vmatrix} = e^{2j\varphi} \cdot e^{-2j\varphi} \begin{vmatrix} \bar{\alpha}, & A, & \bar{\beta} \\ A, & \alpha, & \beta \\ \bar{\beta}, & \beta, & C \end{vmatrix} = Z.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

### 7.4 Elipsa

Rovnice (33,2) je podle odst. 6.7 rovnicí elipsy, je-li  $Z_{33} = \alpha \bar{\alpha} - A^2 < 0$ . Podle odst. 6.8 a 7.1 je jejím středem bod  $z_0 = \frac{Z_{13}}{Z_{33}}$ . Provedeme-li transformaci posunutím  $z = w + z_0$ , přejde rovnice (33,2) v rovnici

$$\bar{\alpha} w^2 + \alpha \bar{w}^2 + 2A w \bar{w} + C' = 0, \quad (35)$$

kde  $C' = f(z_0) = f_3(z_0) = \frac{Z}{Z_{33}}$  (viz odst. 7.2).

Provedme rozbor rovnice (35). Z předpokladu  $Z_{33} < 0$  a  $Z \neq 0$  plyne  $AZ \neq 0$  a mohou tedy nastat dva případy:

1.  $AZ < 0$ . Pak je-li  $A > 0$ , je  $Z < 0$  a platí

$$\bar{\alpha} w^2 + \alpha \bar{w}^2 + 2A w \bar{w} + \frac{Z}{Z_{33}} \equiv (\sqrt{\bar{\alpha}} w + \sqrt{\alpha} \bar{w})^2 + 2(A - \sqrt{\bar{\alpha}} \sqrt{\alpha}) w \bar{w} + \frac{Z}{Z_{33}} > 0$$

pro všechna  $w$ . Podobně, je-li  $A > 0$ , je  $Z < 0$  a dále

$$\bar{\alpha} w^2 + \alpha \bar{w}^2 + 2A w \bar{w} + \frac{Z}{Z_{33}} \equiv (\sqrt{\bar{\alpha}} w - \sqrt{\alpha} \bar{w})^2 + 2(A + \sqrt{\bar{\alpha}} \sqrt{\alpha}) w \bar{w} + \frac{Z}{Z_{33}} < 0$$

pro všechna  $w$ . To znamená: je-li  $AZ < 0$ , nemá čára o rovnici (33,2) reálných bodů (t. zv. imaginární elipsa) a nebudeme se jí blíže zabývat (viz odst. 5.3).

2.  $AZ > 0$ . Pak  $AC' = \frac{AZ}{Z_{33}} < 0$  a rovnice (35) má shodný tvar s rovnicí (13,2) odst. 4.2, jež reprezentuje (reálnou) elipsu.

Výsledky odst. 4.2 a 6.10 lze shrnout takto: Geometrické místo bodů  $z$ , vyhovujících rovnici

$$f(z) \equiv \bar{\alpha} z^2 + \alpha \bar{z}^2 + 2A z \bar{z} + 2\bar{\beta} z + 2\beta \bar{z} + C = 0, Z_{33} < 0, AZ > 0, \quad (36)$$

je (reálná) elipsa. Jejím středem je bod  $z_0 = \frac{Z_{13}}{Z_{33}}$ , ohniska jsou body  $z_{1,2} = \frac{Z_{13} \pm \sqrt{-Z\alpha}}{Z_{33}}$ ,

čtverec výstřednosti  $e^2 = \frac{|Z\alpha|}{Z_{33}^2}$ , čtverec hlavní poloosy je  $a^2 = \frac{1}{2} \frac{|Z|}{Z_{33}^2} (|A| + |\alpha|)$ ,

čtverec vedlejší poloosy je  $b^2 = \frac{1}{2} \frac{|Z|}{Z_{33}^2} (|A| - |\alpha|)$  a směr hlavní osy je určen

$\arg \sqrt{-Z\alpha}$  ( $\alpha \neq 0$ ).

Poznámka: Pro  $\alpha = 0$  dostáváme kružnici o rovnici

$$2A z \bar{z} + 2\bar{\beta} z + 2\beta \bar{z} + C = 0, AZ > 0. \quad (36,1)$$

Ohniska splynou se středem  $z_0 = \frac{Z_{13}}{Z_{33}} = -\frac{\beta}{A}$ . Výstřednost  $e = 0$ , čtverec poloměru

$$r^2 = a^2 = b^2 = \frac{1}{2} \frac{|AZ|}{Z_{33}^2} = \frac{1}{2} \frac{|Z|}{A_3} > 0, \text{ což je ve shodě s odst. 3.2.}$$

### 7.5 Hyperbola

Geometrické místo bodů  $z$ , vyhovujících rovnici

$$f(z) \equiv \bar{\alpha} z^2 + 2A z \bar{z} + \alpha \bar{z}^2 + 2\bar{\beta} z + 2\beta \bar{z} + C = 0, Z_{33} > 0, Z \neq 0 \quad (37)$$

je hyperbola se středem v bodě  $z_0 = \frac{Z_{13}}{Z_{33}}$ , ohniska jsou body  $z_{1,2} = \frac{Z_{13} \pm \sqrt{-Z\alpha}}{Z_{33}}$ ,

čtverec výstřednosti je  $e^2 = \frac{|Z\alpha|}{Z_{33}^2}$ , čtverec hlavní poloosy je  $a^2 = \frac{1}{2} \frac{|Z|}{Z_{33}^2} (|\alpha| + \epsilon A)$ ,

čtverec vedlejší poloosy je  $b^2 = \frac{1}{2} \frac{|Z|}{Z_{33}^2} (|\alpha| - \epsilon A)$ , kde  $\epsilon = \text{sign} Z$ . Směr hlavní osy

je určen  $\arg \sqrt{-Z\alpha}$ . Rovnice asymptot zní:  $f(z) - \frac{Z}{Z_{33}} = 0$ . Důkaz provedeme opět

tak, že rovnicí (37) převedeme posunem  $z = w + z_0$  na tvar

$$\alpha w^2 + \alpha \bar{w}^2 + 2A w \bar{w} + \frac{Z}{Z_{33}} = 0 \quad (37,1)$$

a srovnáním s rovnicí (14,2) dojdeme k výše uvedeným výsledkům.

Poznámka: Pro  $A = 0$  dostáváme rovnoosou hyperbolu o rovnici

$$\alpha z^2 + \alpha \bar{z}^2 + 2\bar{\beta} z + 2\beta \bar{z} + C = 0. \quad (37,2)$$

Pro její poloosy platí  $a^2 = b^2 = \frac{1}{2} e^2 = \frac{1}{2} \frac{|Z\alpha|}{Z_{33}^2}$ .

### 7.6 Parabola

Zbývá podrobněji vyšetřit kuželosečku o rovnici

$$\alpha z^2 + \alpha \bar{z}^2 + 2A z \bar{z} + 2\bar{\beta} z + 2\beta \bar{z} + C = 0, \quad Z_{33} = \alpha\alpha - A^2 = 0. \quad (38)$$

Tuto kuželosečku jsme nazvali parabolou (viz odst. 6.7). Její jediné ohnisko je v bodě  $z_0 = \frac{Z_{11}}{2Z_{13}}$  viz vzorec (30).

Zvolíme-li  $z_0$  za nový počátek, zní rovnice posunutí  $z = w + z_0$  a kuželosečka (38) bude mít po transformaci rovnici

$$\bar{\alpha} w^2 + \alpha w^2 + 2A w \bar{w} + 2f_1(z_0) \bar{w} + 2f_2(z_0) w + f(z_0) = 0 \quad (38,1)$$

(viz odst. 7.2). Pro další úpravu použijeme vztahů platných pro algebraické doplňky prvků diskriminantu  $Z$  (odst. 6.1) kuželosečky (38). Snadno se přesvědčíme, že platí:

$$Z = \bar{\beta} Z_{13} + \beta Z_{23}, \quad Z_{13} Z_{23} = AZ, \quad Z_{13}^2 = -Z\alpha, \quad (38,2,3,4)$$

$$\begin{aligned} f_1(z_0) &= \bar{\alpha} z_0 + A z_0 + \beta = \bar{\alpha} \frac{Z_{11}}{2Z_{13}} + A \frac{Z_{22}}{2Z_{23}} + \beta = \\ &= \frac{\bar{\alpha} Z_{11} Z_{23} + A Z_{22} Z_{13} + 2\bar{\beta} Z_{13} Z_{23}}{2Z_{13} Z_{23}} = \frac{Z_{23}}{2A}, \end{aligned} \quad (38,6)$$

$$f(z_0) = z_0 f_1(z_0) + \bar{z}_0 f_2(z_0) + f_3(z_0) = \frac{Z_{11} Z_{23}^2 + Z_{22} Z_{13}^2 - 2Z_{13} Z_{11} Z_{23}}{4AZ_{13} Z_{23}} = -\frac{Z}{4A^2}. \quad (38,6)$$

Použitím těchto vztahů můžeme rovnici (38,1) přepsat na tvar

$$(Z_{23} w - Z_{13} \bar{w})^2 - 2k Z_{23} w - 2k Z_{13} \bar{w} + k^2 = 0, \quad k = \frac{Z}{2A}. \quad (39)$$

Srovnáním rovnice (39) s rovnicí paraboly (15) dostáváme:

Kuželosečka (39) je parabola s ohniskem  $w_0 = 0$  a přímkou řídící  $Z_{23} w + Z_{13} \bar{w} - \frac{Z}{2A} = 0$ . Poloparametr  $p = \frac{|Z_{13}|}{4A^2}$ , osa má rovnici  $Z_{23} w - Z_{13} \bar{w} = 0$ , tečna vrcholová rovnici  $Z_{23} w + Z_{13} \bar{w} - \frac{Z}{4A} = 0$ , vrchol  $w_v = \frac{Z_{13}}{8A^2}$ .

Vrátíme-li se k původním proměnným, můžeme vyslovit tuto větu:

Geometrické místo bodů, splňujících rovnici (38), je parabola s ohniskem v bodě  $z_0 = \frac{Z_{11}}{2Z_{13}}$  a přímkou řídící  $Z_{23} z + Z_{13} \bar{z} - Z_{13} = 0$ . Poloparametr  $p = \frac{|Z_{13}|}{4A^2}$ . Směr osy je určen  $\sqrt{-Z\alpha}$ .

### 7.7 Singulární kuželosečky

Kuželosečku, pro kterou platí  $Z = 0$ , jsme v odst. 6.1 nazvali singulární. Rozlišme nyní dva případy:

1. Necht  $Z = 0$ ;  $Z_{33} \neq 0$ . Snadno se přesvědčíme, že rovnici (33,2) lze transformací posunem  $z = w + \frac{Z_{13}}{Z_{33}}$  uvést na tvar (kde za  $w$  píšeme opět  $z$ ):

$$\alpha z^2 + 2A z \bar{z} + \alpha \bar{z}^2 = 0, \quad \alpha \bar{\alpha} - A^2 \neq 0. \quad (40,1)$$

Necht je dále  $Z_{33} > 0$ . Rovnici (40,1) lze psát takto:

$$[\bar{\alpha} z + (A + j \sqrt{Z_{33}}) \bar{z}] [\bar{\alpha} z + (A - j \sqrt{Z_{33}}) \bar{z}] = 0.$$

Pak platí  $\left| \begin{array}{cc} \bar{\alpha}, & A \pm j \sqrt{Z_{33}} \\ A \mp j \sqrt{Z_{33}}, & \alpha \end{array} \right| = 0$  a podle výsledků odst. 5.2 rovnice

$$\bar{\alpha} z + (A + j \sqrt{Z_{33}}) \bar{z} = 0,$$

$$\bar{\alpha} z + (A - j \sqrt{Z_{33}}) \bar{z} = 0$$

jsou rovnice dvou (reálných) různoběžek.

Necht je  $Z_{33} < 0$ . Na základě odst. 7.4 můžeme udělat tento závěr: Kuželosečka má jediný reálný bod  $z = 0$ .

Poznámka: Snadno se přesvědčíme, že rozklad levé strany rovnice (40,1) na součin lze i nyní provést. Podle výsledků odst. 5.2 jsou obě přímky v tomto případě konjugované.

2. Necht  $Z = 0$ ,  $Z_{33} = 0$ . Snadno dokážeme, že  $Z_{12}$  je invariantní vůči posunutí a otočení a že rovnici (33,2) lze transformovat posunutím  $z = w - \frac{\beta}{2A}$  na tvar (kde za  $w$  píšeme opět  $z$ )

$$\bar{\alpha} z^2 + 2A z z + \alpha \bar{z}^2 - \frac{Z_{12}}{A} = 0, \quad \alpha \bar{\alpha} - A^2 = 0. \quad (40,3)$$

Obdobně jako v prvním případě bychom se přesvědčili, že levou stranu rovnice (40,3) lze rozložit v součin dvou lineárních forem, jež anulovány jsou rovnicemi přímek, na něž se kuželosečka v tomto případě rozpadá, a to:

pro  $Z_{12} > 0$  dvou reálných různoběžek,

pro  $Z_{12} = 0$  dvou reálných splývajících přímek (čili jedné dvojnásobné přímky),

pro  $Z_{12} < 0$  dvou konjugovaných přímek (se společným nevlastním reálným bodem).

## 7.8 Příklady

1. Dokázat, že nutná a postačující podmínka, aby počátek byl ohniskem kuželosečky, zní:  $Z_{11} = Z_{22} = 0$ .

Pro parabolu plyne tvrzení přímo ze vzorce (30).

Je-li  $Z_{33} \neq 0$ , je ohnisko kuželosečky (33,2) dáno vzorcem

$$Z_{1,2} = \frac{Z_{13} \pm \sqrt{-Z\alpha}}{Z_{33}} = \frac{Z_{13} \pm \sqrt{Z_{13}^2 - Z_{11}Z_{33}}}{Z_{33}},$$

odtud pro  $z_i = 0$  ( $i = 1$  nebo  $2$ ) je  $Z_{13}^2 = Z_{13}^2 - Z_{11}Z_{33}$ ,

a tedy  $Z_{11} = 0$  a obráceně.

2. Dokázat, že nutnou a postačující podmínkou, aby existovalo posunutí, které zachová lineární koeficienty kuželosečky (33,2), je:  $Z_{33} = 0$ .

Předně dokážeme, že daná podmínka je nutná. Pro posunutí  $z = w + z_0$ ,  $z_0 \neq 0$  musí platit (viz rovnice 34)

$$f_1(z_0) = \bar{\beta}, \quad f_2(z_0) = \beta.$$

Rozepsáním dostáváme soustavu

$$\bar{\alpha} z_0 + A \bar{z}_0 = 0, \quad A z_0 + \alpha \bar{z}_0 = 0,$$

která musí mít nenulové řešení. Tedy  $\begin{vmatrix} \bar{\alpha}, & A \\ A, & \alpha \end{vmatrix} = Z_{33} = 0$ .

Pro důkaz postačitelnosti podmínky  $Z_{33} = 0$  ukážeme, že posunutí  $z = w + k Z_{13}$  k reálné nemění lineární koeficienty v rovnici (33,2). Platí

$$f_1(k Z_{13}) = \bar{\alpha} k Z_{13} + A k Z_{23} + \bar{\beta} = k Z_{33} + \bar{\beta} = \bar{\beta}$$

a dále

$$f_2(k Z_{13}) = \bar{f}_1(k Z_{13}) = \beta.$$

Poznámka: Posun je rovnoběžný s osou paraboly.

3. Stanovit geometrické místo bodů souměrných k ohnisku podle tečny v libovolném bodě paraboly.

Parabola nechť má ohnisko v počátku. Její rovnice bude (viz 15)

$$f(z) \equiv \bar{\beta}^2 z^2 + \beta^2 \bar{z}^2 - 2\beta\bar{\beta} z \bar{z} + 2\bar{\beta} z + 2\beta \bar{z} + 1 = 0.$$

Tečna paraboly v bodě  $z_0$  zní (viz 33,6)

$$t \equiv f_1(z_0) z + f_2(z_0) \bar{z} + f_3(z_0) = 0.$$

O bodech  $z$  souměrných s počátkem podle tečny  $t$  platí (viz odst. 2.6)

$$f_1(z_0) z + f_3(z_0) = 0,$$

$$f_2(z_0) \bar{z} + f_3(z_0) = 0,$$

$$f_1(z_0) z_0 + f_2(z_0) \bar{z}_0 + f_3(z_0) = 0,$$

(\*)

kde poslední rovnice vyjadřuje podmínku, že bod  $z_0$  leží na parabole. Soustava (\*) má nenulové řešení, jelikož parabola není singulární, a tedy

$$\begin{vmatrix} z, & 0, & 1 \\ 0, & \bar{z}, & 1 \\ z_0, & \bar{z}_0, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a po vyčíslení

$$z \bar{z} - z_0 \bar{z} - \bar{z}_0 z = 0. \quad (**)$$

Soustavu (\*) lze tedy přepsat takto

$$\bar{\beta}(\bar{\beta} z + 1) z_0 - \beta(\beta \bar{z} - 1) \bar{z}_0 + \bar{\beta} z + 1 = 0,$$

$$-\bar{\beta}(\beta \bar{z} - 1) z_0 + \beta(\beta \bar{z} + 1) \bar{z}_0 + \beta \bar{z} + 1 = 0,$$

$$\bar{z} z_0 + z \bar{z}_0 - z \bar{z} = 0. \quad (***)$$

Jelikož musí existovat nenulové řešení soustavy (\*\*\*) (bod  $z_0$  je bodem paraboly), musí být determinant soustavy roven nule. Snadno se přesvědčíme, že tento požadavek je ekvivalentní s rovnicí

$$\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + 1 = 0,$$

což je hledaná rovnice geometrického místa. Výsledná rovnice je rovnicí řídící přímky (viz rovnice 15,3).

4. Najít rovnici přímek, v něž se rozpadá kuželosečka

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} z^2 + 2A z \bar{z} + \alpha \bar{z}^2 + 2\bar{\beta} z + 2\beta \bar{z} + C = 0, \\ Z = 0, \quad Z_{33} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Rozlišíme tyto případy:

1.  $C \neq 0$ . Pak rovnice (a) je ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{aligned} C \bar{\alpha} z^2 + 2AC z \bar{z} + C \alpha \bar{z}^2 + 2C \bar{\beta} z + 2C \beta \bar{z} + C^2 = \\ = [(\bar{\beta} + \bar{\gamma}) z + (\beta + \gamma) \bar{z} + C] \cdot [(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) z + (\beta - \gamma) \bar{z} + C] = 0, \end{aligned}$$

kde  $\gamma^2 = \beta^2 - C\alpha = -Z_{11}$ ,  $AC = \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma}$ . Kuželosečka (a) se rozpadne ve dvě různoběžky

$$(\bar{\beta} \pm \bar{\gamma}) z + (\beta \pm \gamma) \bar{z} + C = 0.$$

2.  $C = 0$ ,  $\beta \neq 0$ . Pak platí

$$\bar{\alpha} z^2 + 2A z \bar{z} + \alpha \bar{z}^2 + 2\bar{\beta} z + 2\beta \bar{z} = (\bar{\alpha} \beta z + \alpha \bar{\beta} \bar{z} + 2\beta \bar{\beta}) \cdot (\bar{\beta} z + \beta \bar{z}) = 0,$$

kde bylo použito vztahu  $2A\beta\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta^2 + \alpha\bar{\beta}^2$ , plynoucího z předpokladu  $Z = 0$ ,  $C = 0$ . Rovnice hledaných přímek tedy jsou

$$\bar{\alpha} \beta z + \alpha \bar{\beta} \bar{z} + 2\beta \bar{\beta} = 0,$$

resp.

$$\bar{\beta} z + \beta \bar{z} = 0.$$

3. Příklad  $Z = C = \beta = 0$  byl řešen v odst. 7.7.

#### Použitá literatura

1. Beck H., *Koordinatengeometrie*, Berlin 1919, J. Springer.
2. Bydžovský B., *Úvod do analytické geometrie*, Praha 1923, JČMF.
3. Michael W., *Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene*, Basel 1950.
4. Pirko Z., *O souřadnicích v rovině*, Praha 1950, JČFM.
5. Privalov I. I., *Analytické funkce*, Praha 1955, NČAV.
6. Zwikker C., *Advanced plane geometry*, Amsterdam 1950.